目 录

第一章　弹性动力学基础

§1　应力概念及其性质

在弹性力学中，外力的作用必须考虑它的分布情况，因为弹性体的变形与力的分布情况有关。

考虑一连续介质，里面质点的位置可以通过取定某一坐标系（比如直角坐标系）x_1，x_2，x_3 来表示。用 τ 代表这介质在坐标系中所占的区域，$\Delta\tau$ 是 τ 内的一个小体积元。考虑作用在这小体积元物质上的力，假如这个力总是和 $\Delta\tau$ 的质量成正比，像重力、离心力等，则称这种力为体力。

假定体力是 x_1，x_2，x_3 的连续函数，令矢量 $\boldsymbol{\varphi}=\boldsymbol{i}f_1+\boldsymbol{j}f_2+\boldsymbol{k}f_3$ 代表每单元体积所受的体力（这里 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 分别为 x_1、x_2、x_3 轴向单位矢量），则整个介质的体力合力 $\boldsymbol{\Psi}$ 为

$$\boldsymbol{\Psi}=\iiint_{\tau}\boldsymbol{\varphi}\mathrm{d}\tau=\iiint_{\tau}\boldsymbol{\varphi}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3 \tag{1.1}$$

$\boldsymbol{\varphi}$ 对坐标原点生成的总力矩是

$$\boldsymbol{M}=\iiint_{\tau}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{\varphi})\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3=\hat{\boldsymbol{i}}M_1+\hat{\boldsymbol{j}}M_2+\hat{\boldsymbol{k}}M_3 \tag{1.2}$$

式中，$\boldsymbol{r}$ 是坐标原点到介质中任一点的矢径，及

$$\left.\begin{aligned}M_1&=\iiint_{\tau}(x_2f_3-x_3f_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\\M_2&=\iiint_{\tau}(x_3f_1-x_1f_3)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\\M_3&=\iiint_{\tau}(x_1f_2-x_2f_1)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\end{aligned}\right\} \tag{1.3}$$

作用在物体表面的力称为面力，像所谓力的压强便是。面力可以这样来描述：令表面小块面积 ΔS 上有任意一点 O（图 1.1），作用在 O 点邻近的表面力的方向是各不相同的，作用在 ΔS 面上的力可用作用在 O 点的合力 $\boldsymbol{T}$ 和一个力偶 $\boldsymbol{G}$ 来代替，把 ΔS 慢慢地缩小而使 O 点始终包含在内，若极限

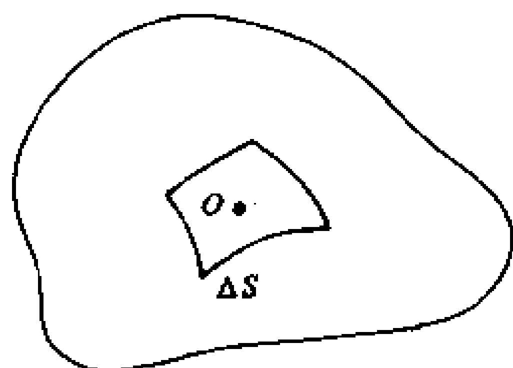


图 1.1　表面上包含有 O 点的小块面积 ΔS

$$\lim_{\substack{\Delta S\to 0\\ G\to 0}}\frac{\boldsymbol{G}}{\Delta S}=0,\qquad \lim_{\substack{\Delta S\to 0\\ T\to 0}}\frac{\boldsymbol{T}}{\Delta S}=\boldsymbol{\sigma}$$

存在，便称上述的 $\boldsymbol{\sigma}$ 为面力，它的量纲是［力］［长度］$^{-2}$。

若弹性体在表面受外力作用，则这些力的作用会传至物体内部。我们用应力的概念来表示物体内部的力的作用。

假想一物体（图 1.2）被一平面截断成两部分 A 和 B，则 B 部分对 A 部分的作用可用 A 部分截面上的应力矢量来代表。应力矢量是面力的一种。在 A 部分的截面上任取一点 O，O 点是包含在微小面积 ΔS 内的，ΔS 的外法线是 $\boldsymbol{N}$，令 O 点的面力是 $\boldsymbol{F}_N$，它是一个矢量，称之为应力矢量。它表示作用在法线为 $\boldsymbol{N}$ 的微元平面上的单位面积

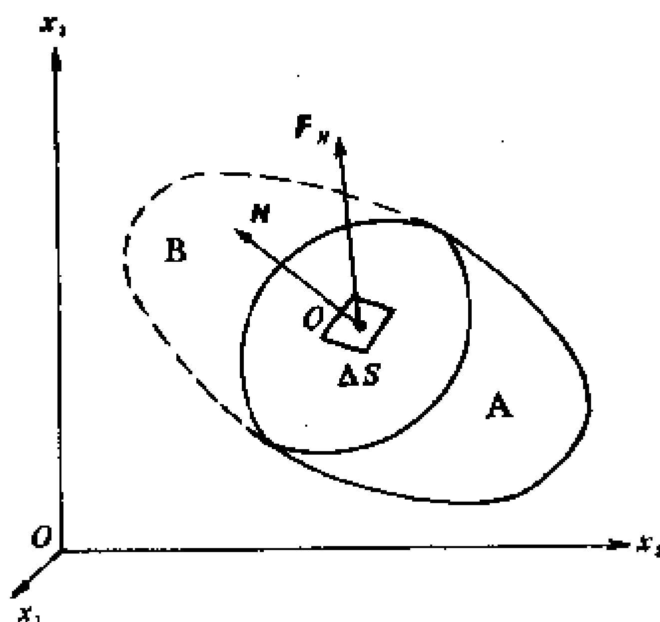


图 1.2　物体被假想平面截成两部分 A 和 B，B 对 A 的作用

上的力。F_N 可分解为 X_N，Y_N，Z_N 三个分量。

在 B 部分上同一点 O，这时微小面积 ΔS 的外法线为 N'（图 1.3），它与 N 方向相反，按牛顿定律知，应力矢量为 $F_{N'}$，并有

$$F_N = - F_{N'} \quad (1.4)$$

它们分别表示 B 部分对 A 部分的作用以及反过来——A 部分对 B 部分的作用。

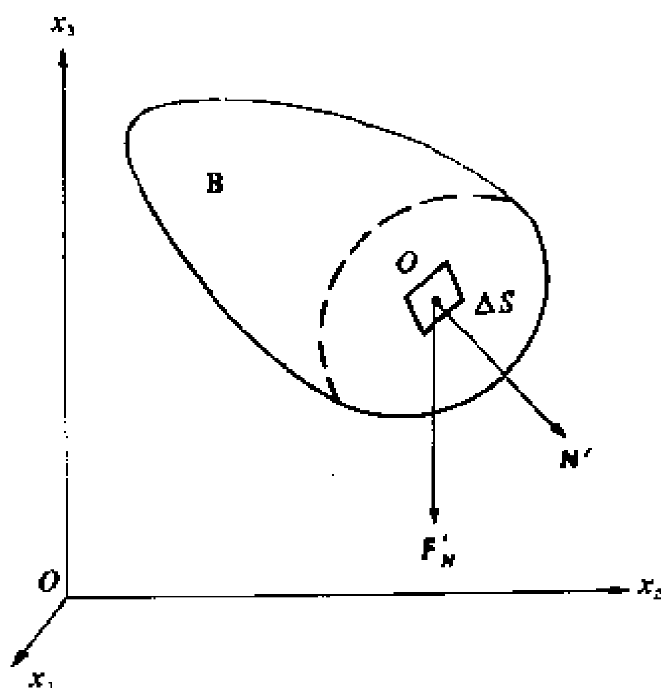


图 1.3　A 部分对 B 部分的反作用

现在进一步叙述物体内部一点的应力。

首先在弹性体中取一正方微元体，整个弹性体可看作是由无数个这样的正方微元体组成。因为这正方体很小，在这正方体上的各平面上的应力矢量便相当于通过正方体内部一点，并作用在原来各个平面上的应力矢量。若所选择的坐标轴与正方体的相邻三条棱相平行（图 1.4），正方体各面上的应力都可用三个应力分量来表示：在 $ABCD$ 平面上的应力分量是 $(\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13})$，在 $CFED$ 平面上的应力分量是 $(\sigma_{21}, \sigma_{22}, \sigma_{23})$，在 $ADEG$ 平面上的应力分量是 $(\sigma_{31}, \sigma_{32}, \sigma_{33})$，在上述三个平面相对的平面上的应力分量分别与其所对的平面上的应力分量大小相等、方向相反。这样，一共引进了九个应力分量

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

这些分量的下标规定如下：第一个数字表示作用平面，第二个数字表示应力分量的方向。两个下标相同的分量是法向应力，不相同的是切向应力。这些分量和两个方向有关，即应力矢量的方向

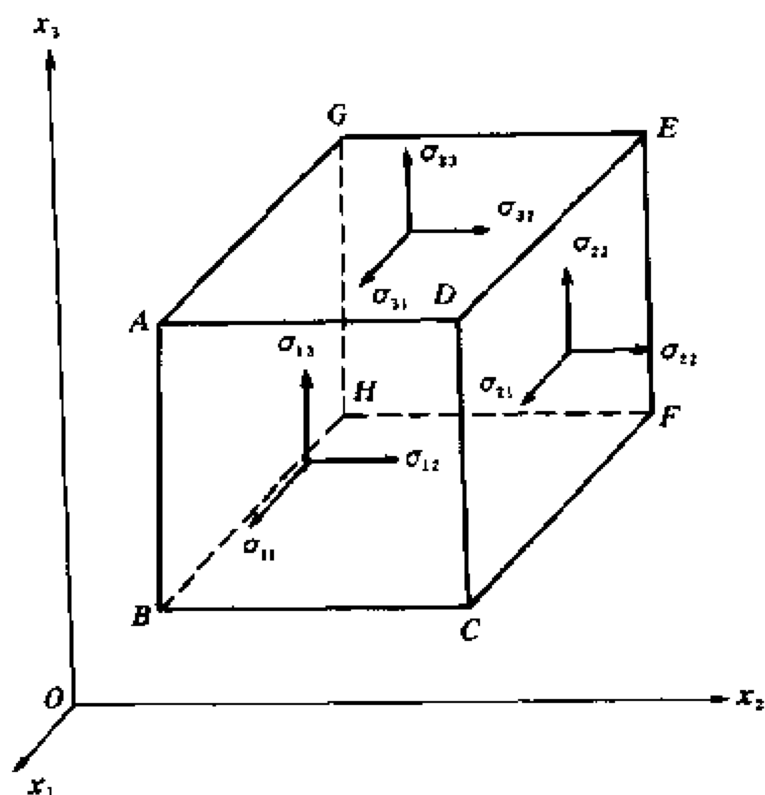


图 1.4 正方微元体上的应力分量

和作用平面的方向。因而它们构成一个张量，用 Σ 表示。它的分量也可表示为 σ_{ij}，$i=1$，2，3；$j=1$，2，3。

此九个应力分量不是完全独立的，如果利用微元体的力矩平衡条件，则有

$$\sigma_{ij}=\sigma_{ji} \tag{1.6}$$

这就是所谓切应力成对性定律。应力分量中只有六个是独立的。这样，应力张量是一个二阶对称张量。这六个分量充分表示了一点 M 上的应力状态，即在该点任意方向的作用面上的应力矢量完全可由这六个分量表示。比如要表示法线为 N 平面上的应力矢量 F_N（X_N，Y_N，Z_N）（图 1.5），作 ABC 平面，它的法线为 N，但不通过 M 点。一般说来，ABC 平面上的应力矢量与要求的平面上的应力矢量是有差别的。但当这两个平面无限接近时，这种应力矢量的差别就完全消失。设这两个平面间的垂直距离是 h，在 ABC 面上的应力矢量为 F_N^*（X_N^*，Y_N^*，Z_N^*），则有

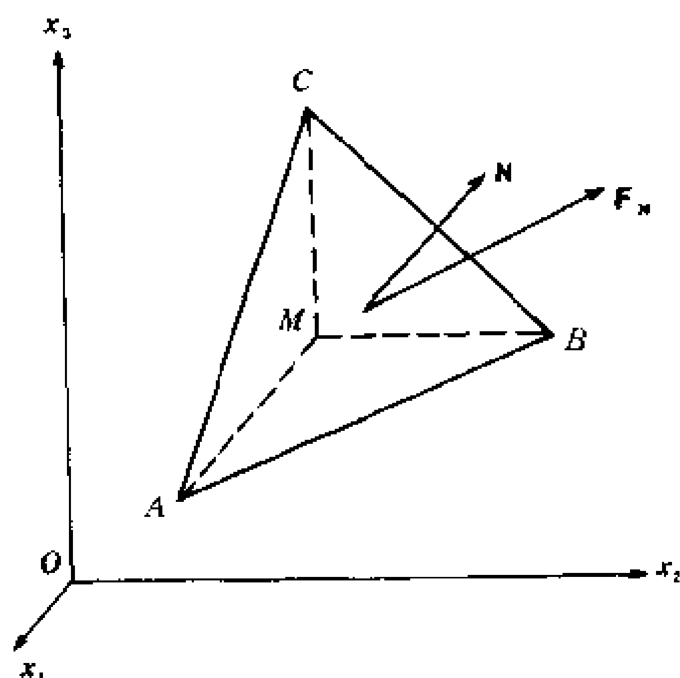


图 1.5　任意方向作用 ABC 构成的四面体

$$\lim_{h\to 0}\boldsymbol{F}_N^*(X_N^*,Y_N^*,Z_N^*)=\boldsymbol{F}_N(X_N,Y_N,Z_N) \tag{1.7}$$

设在 $MABC$ 四面体的侧面上，如 MAB 面上的平均应力矢量是（σ_{31}^*，σ_{32}^*，σ_{33}^*），MCA 面上是（σ_{21}^*，σ_{22}^*，σ_{23}^*），MBC 面上是（σ_{11}^*，σ_{12}^*，σ_{13}^*）（图 1.6）。当 $h\to 0$ 时，有

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to 0}(\sigma_{11}^*,\sigma_{22}^*,\sigma_{33}^*,\sigma_{12}^*,\sigma_{13}^*,\sigma_{21}^*,\sigma_{23}^*,\sigma_{31}^*,\sigma_{32}^*)\\&=(\sigma_{11},\sigma_{22},\sigma_{33},\sigma_{12},\sigma_{13},\sigma_{21},\sigma_{23},\sigma_{31},\sigma_{32})\end{aligned} \tag{1.8}$$

设 ABC 的面积是 ΔS，则四面体 $MABC$ 的体积是

$$\Delta V=\frac{1}{3}h\Delta S \tag{1.9}$$

而平面 MBC、MCA，MAB 的面积分别是 ΔS_1，ΔS_2，ΔS_3 且分别有

$$\left.\begin{aligned}\Delta S_1&=\Delta S\cos(x_1,\boldsymbol{N})=l_1\Delta S\\\Delta S_2&=\Delta S\cos(x_2,\boldsymbol{N})=l_2\Delta S\\\Delta S_3&=\Delta S\cos(x_3,\boldsymbol{N})=l_3\Delta S\end{aligned}\right\} \tag{1.10}$$

这里 l_1，l_2，l_3 是法线 $\boldsymbol{N}$ 的方向余弦。

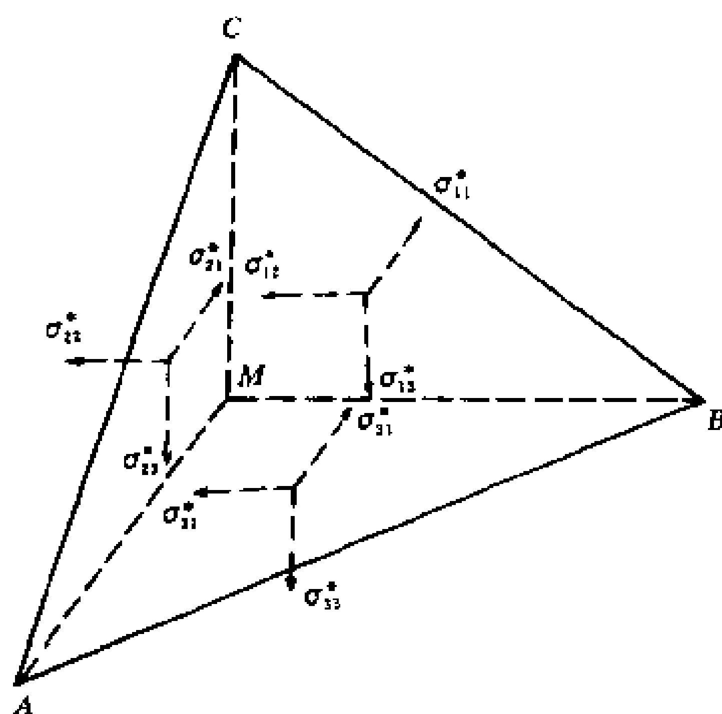


图 1.6　四面体上的平均应力分量

又若四面体中平均体力的三个分量是 f_1，f_2，f_3，则考虑 x_1 方向上的力的平衡，有

$$f_1\Delta V + X_N^*\Delta S + (-\sigma_{11}^*)\Delta S_1 + (-\sigma_{21}^*)\Delta S_2 + (-\sigma_{31}^*)\Delta S_3 = 0$$

也即

$$f_1 \cdot \frac{1}{3}h + X_N^* - \sigma_{11}^* l_1 - \sigma_{21}^* l_2 - \sigma_{31}^* l_3 = 0$$

当 $h \to 0$ 时，便得到

$$X_N = \sigma_{11} l_1 + \sigma_{21} l_2 + \sigma_{31} l_3 \tag{1.11}$$

同理，有

$$\left.\begin{aligned} Y_N &= \sigma_{12} l_1 + \sigma_{22} l_2 + \sigma_{32} l_3 \\ Z_N &= \sigma_{13} l_1 + \sigma_{23} l_2 + \sigma_{33} l_3 \end{aligned}\right\} \tag{1.12}$$

由此可以看出，若一点上的六个独立应力分量已知，则过这一点的任意平面上的应力矢量都可用这六个应力分量表示，故可以说，六个独立应力分量描述了这点的应力状态。

§2　小变形的几何关系

在刚体上，作用力只引起刚体的整体移动与转动。如果物体是弹性的，则还会引起物体内部各点间的相对位置改变，当移去外力的作用后，物体又会恢复原来的状态。假定物体是各向同性的，且不考虑刚性运动部分，我们来讨论弹性体的变形。

考虑两个相邻的点 P 和 Q（图 1.7），变形后它们分别移动到新位置 P' 和 Q'。设 P 点的位移是 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}$，$Q$ 点的位移是

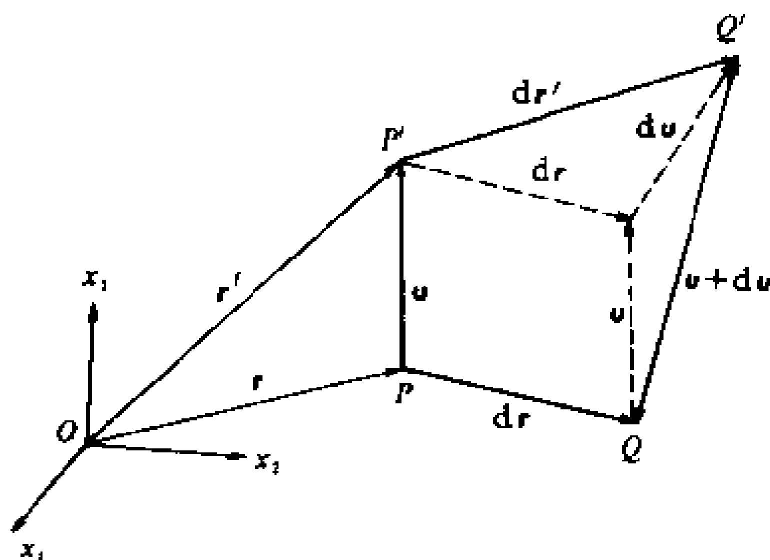


图 1.7　位移 $\boldsymbol{u}$ 和相对位移 $\mathrm{d}\boldsymbol{u}$

$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}+\mathrm{d}\boldsymbol{r})=\boldsymbol{u}+\mathrm{d}\boldsymbol{u}$。写成分量形式并用 Taylor 展开，有

$$u_1(\boldsymbol{r}+\mathrm{d}\boldsymbol{r})=u_1(\boldsymbol{r})+\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\nabla u_1(\boldsymbol{r})+\cdots$$

考虑到小变形，可近似地写成

$$\mathrm{d}u_1=u_1(\boldsymbol{r}+\mathrm{d}\boldsymbol{r})-u_1(\boldsymbol{r})=\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\nabla u_1(\boldsymbol{r})$$

同样，也可以写出另外两个分量的关系。写成矢量形式，为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{u}=\mathrm{d}\boldsymbol{r}'-\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\nabla\boldsymbol{u}\qquad(1.13)$$

这里 $\nabla\boldsymbol{u}$ 是位移梯度，是一个并矢，定义为

$$\nabla \boldsymbol{u}(x_1,x_2,x_3) = \nabla x_1 \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_1} + \nabla x_2 \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_2} + \nabla x_3 \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_3} \tag{1.14}$$

即

$$\nabla \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_3} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \tag{1.15}$$

也可写成

$$(\nabla \boldsymbol{u})_{ij} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \tag{1.16}$$

还可引进如下两个并矢，分别代表介质一点上的应变与转动：应变并矢（又称应变张量）为

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}(\nabla \boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}\nabla) \tag{1.17}$$

其中 $\boldsymbol{u}\nabla$ 定义为

$$\boldsymbol{u}\nabla = \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_1}\boldsymbol{i} + \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_2}\boldsymbol{j} + \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_3}\boldsymbol{k} \tag{1.18}$$

这样，应变并矢可写成

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \tag{1.19}$$

或写成分量形式

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{1.20}$$

转动并矢（又称转动张量）为

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{I} + \frac{1}{2}(\nabla \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}\nabla) \tag{1.21}$$

式中 $\boldsymbol{I}$ 为单位并矢。

在地震学的问题中，经常会遇到正交曲线坐标系的情况，这里给出在正交曲线坐标系中应变的表达形式及其推导。

现考虑某一点的一般正交曲线坐标 (q_1, q_2, q_3)，它与直角坐标的关系是

$$x_1 = x_1(q_1, q_2, q_3), x_2 = x_2(q_1, q_2, q_3), x_3 = x_3(q_1, q_2, q_3) \tag{1.22}$$

或写成

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{r} &= \boldsymbol{r}(q_1, q_2, q_3) \\ x_i &= x_i(q_1, q_2, q_3) \quad i = 1,2,3 \end{aligned}\right\} \tag{1.23}$$

$\boldsymbol{r}$ 为坐标原点至该点的矢径。

曲线坐标系中沿坐标轴的单位矢量可表示为

$$\hat{\boldsymbol{e}}_\alpha = \frac{1}{h_\alpha}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_\alpha}, \quad h_\alpha = \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_\alpha}\right|, \alpha = 1,2,3 \tag{1.24}$$

式 (1.24) 中的 h_α 称为尺度因子。

按正交性，有

$$\hat{\boldsymbol{e}}_\alpha \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_\beta = \hat{\delta}_{\alpha\beta}, \quad \hat{\boldsymbol{e}}_\alpha \times \hat{\boldsymbol{e}}_\beta = \hat{\boldsymbol{e}}_\gamma \tag{1.25}$$

这里 $\delta_{\alpha\beta}$是 Kronecker δ，而 α、β、γ 必须是轮回顺序 ($\alpha\beta\gamma$、$\beta\gamma\alpha$、$\gamma\alpha\beta$)。

根据式 (1.24)，可有

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_\alpha}\mathrm{d}q_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{3} h_\alpha \hat{\boldsymbol{e}}_\alpha \mathrm{d}q_\alpha \tag{1.26}$$

因而微元段长度是

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = h_1^2(\mathrm{d}q_1)^2 + h_2^2(\mathrm{d}q_2)^2 + h_3^2(\mathrm{d}q_3)^2 \tag{1.27}$$

由此式可确定尺度因子。

接着计算微商$\dfrac{\partial \hat{\boldsymbol{e}}_\alpha}{\partial q_\beta}$，这是一个矢量，可以写成

$$\frac{\partial \hat{e}_\alpha}{\partial q_\beta} = c_1(\alpha,\beta)\hat{e}_1 + c_2(\alpha,\beta)\hat{e}_2 + c_3(\alpha,\beta)\hat{e}_3 = \sum_{\gamma=1}^{3} c_\gamma(\alpha,\beta)\hat{e}_\gamma \tag{1.28}$$

为方便，引进第二类 Christoffel 符号

$$c_\gamma(\alpha,\beta) = \left\{ {\gamma \atop \alpha \quad \beta} \right\} \tag{1.29}$$

将式（1.29）代入式（1.28），并用 $\hat{e}_\gamma$ 点乘，则有

$$\hat{e}_\gamma \cdot \frac{\partial \hat{e}_\alpha}{\partial q_\beta} = \hat{e}_\gamma \cdot \sum_{\gamma=1}^{3} c_\gamma(\alpha,\beta)\hat{e}_\gamma = \hat{e}_\gamma \cdot \sum_{\gamma=1}^{3} \left\{ {\gamma \atop \alpha \quad \beta} \right\} \hat{e}_\gamma = \left\{ {\gamma \atop \alpha \quad \beta} \right\} \tag{1.30}$$

又有

$$\frac{\partial \hat{e}_\alpha}{\partial q_\beta} = \frac{\partial}{\partial q_\beta}\left(\frac{1}{h_\alpha} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_\alpha} \right) \tag{1.31}$$

$$\hat{e}_\gamma \cdot \hat{e}_\alpha = \delta_{\gamma\alpha} = \frac{1}{h_\gamma h_\alpha} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_\alpha} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_\gamma} \tag{1.32}$$

利用这些关系很容易推导出如下关系：

$$\left.\begin{aligned}
&\left\{ {\gamma \atop \alpha \quad \beta} \right\} = 0, \quad \text{当 } \gamma \neq \beta \neq \alpha \\
&\left\{ {\alpha \atop \alpha \quad \beta} \right\} = 0, \quad \left\{ {\alpha \atop \alpha \quad \alpha} \right\} = 0 \\
&\left\{ {\gamma \atop \alpha \quad \alpha} \right\} = -\frac{1}{h_\gamma}\frac{\partial h_\alpha}{\partial q_\gamma}, \quad \left\{ {\gamma \atop \alpha \quad \gamma} \right\} = \frac{1}{h_\alpha}\frac{\partial h_\gamma}{\partial q_\alpha}
\end{aligned}\right\} \tag{1.33}$$

可见，$\frac{\partial \hat{e}_\alpha}{\partial q_\beta}$完全可由尺度因子确定。

继续推导曲线坐标系中梯度算子的基本微分表达式。设 $\varphi(q_1, q_2, q_3)$ 是一标量函数，则它的梯度是

$$\nabla\varphi = f_1\hat{e}_1 + f_2\hat{e}_2 + f_3\hat{e}_3 \tag{1.34}$$

其中 $f_i\ (q_1, q_2, q_3)$ 是 $\nabla\varphi$ 的分量。φ 的微分可用两种方式表示，即

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial q_2}dq_2 + \frac{\partial\varphi}{\partial q_3}dq_3 \tag{1.35}$$

及

$$d\varphi = \nabla\varphi\cdot d\boldsymbol{r} = \nabla\varphi\cdot\left(\sum_{\alpha=1}^{3} h_\alpha \hat{\boldsymbol{e}}_\alpha dq_\alpha\right) = h_1 f_1 dq_1 + h_2 f_2 dq_2 + h_3 f_3 dq_3 \tag{1.36}$$

比较上面两式，有

$$f_1 = \frac{1}{h_1}\frac{\partial\varphi}{\partial q_1},\quad f_2 = \frac{1}{h_2}\frac{\partial\varphi}{\partial q_2},\quad f_3 = \frac{1}{h_3}\frac{\partial\varphi}{\partial q_3} \tag{1.37}$$

代人式（1.34），得

$$\nabla\varphi = \frac{1}{h_1}\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}\hat{\boldsymbol{e}}_1 + \frac{1}{h_2}\frac{\partial\varphi}{\partial q_2}\hat{\boldsymbol{e}}_2 + \frac{1}{h_3}\frac{\partial\varphi}{\partial q_3}\hat{\boldsymbol{e}}_3 \tag{1.38}$$

这样，梯度算子可表示为

$$\nabla = \frac{\hat{\boldsymbol{e}}_1}{h_1}\frac{\partial}{\partial q_1} + \frac{\hat{\boldsymbol{e}}_2}{h_2}\frac{\partial}{\partial q_2} + \frac{\hat{\boldsymbol{e}}_3}{h_3}\frac{\partial}{\partial q_3} \tag{1.39}$$

特殊情况下有

$$\nabla q_\alpha = \frac{\hat{\boldsymbol{e}}_\alpha}{h_\alpha}$$

如果将算子∇置于矢量$\boldsymbol{u} = u_1\hat{\boldsymbol{e}}_1 + u_2\hat{\boldsymbol{e}}_2 + u_3\hat{\boldsymbol{e}}_3$的前面，结果是并矢，它的分量为

$$(\nabla\boldsymbol{u})_{\alpha\beta} = \frac{1}{h_\alpha}\frac{\partial u_\beta}{\partial q_\alpha} + \sum_{\gamma=1}^{3}\frac{u_\gamma}{h_\alpha}\left({}^{\ \ \beta}_{\gamma\ \ \ \alpha}\right) \tag{1.40}$$

我们再用梯度算子来表示矢量的散度与旋度，它们是

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}\boldsymbol{u} &= \nabla\cdot\boldsymbol{u} = \nabla\cdot\sum_{\alpha=1}^{3} u_\alpha\hat{\boldsymbol{e}}_\alpha \\
&= \sum_{\alpha=1}^{3}\sum_{\beta=1}^{3}\left[\frac{1}{h_\beta}\hat{\boldsymbol{e}}_\beta\cdot\frac{\partial}{\partial q_\beta}(u_\alpha\hat{\boldsymbol{e}}_\alpha)\right] \\
&= \sum_{\alpha=1}^{3}\sum_{\beta=1}^{3}\left[\frac{1}{h_\alpha}\frac{\partial u_\alpha}{\partial q_\alpha} + \frac{u_\alpha}{h_\beta}\left({}^{\ \ \beta}_{\alpha\ \ \ \beta}\right)\right] \\
&= \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(h_2 h_3 u_1) + \frac{\partial}{\partial q_2}(h_3 h_1 u_2) + \frac{\partial}{\partial q_3}(h_1 h_2 u_3)\right]
\end{aligned} \tag{1.41}$$

及 $$\mathrm{curl}\boldsymbol{u}=\nabla\times\boldsymbol{u}=\nabla\times\sum_{\alpha=1}^{3}u_\alpha\hat{\boldsymbol{e}}_\alpha=\nabla\times\sum_{\alpha=1}^{3}(u_\alpha h_\alpha)\nabla q_\alpha \tag{1.42}$$

再应用如下矢积恒等关系

$$\nabla\times(\lambda\boldsymbol{a})=(\nabla\lambda)\times\boldsymbol{a}+\lambda\,\mathrm{curl}\boldsymbol{a}$$

及 curl grad $\boldsymbol{a}=0$

则式（1.42）可写成

$$\begin{aligned}\mathrm{curl}\,\boldsymbol{u}&=\sum_{\alpha=1}^{3}\nabla(u_\alpha h_\alpha)\times\nabla q_\alpha=\sum_{\alpha=1}^{3}\left[\nabla(u_\alpha h_\alpha)\times\frac{\hat{\boldsymbol{e}}_\alpha}{h_\alpha}\right]\\&=\sum_{\gamma=1}^{3}\hat{\boldsymbol{e}}_\gamma\left\{\sum_{\alpha=1}^{3}\sum_{\beta=1}^{3}\frac{\varepsilon_{\beta\alpha\gamma}}{h_\alpha h_\beta}\frac{\partial}{\partial q_\beta}(u_\alpha h_\alpha)\right\}\end{aligned} \tag{1.43}$$

这里引入了置换张量（Levi-Civita 符号）ε_{ijk}，它定义为

$$\varepsilon_{ijk}=\begin{cases}1, & \text{当 } ijk \text{ 是顺序轮回时}\\-1, & \text{当 } ijk \text{ 是逆序轮回时}\\0, & \text{当任意两个下标相同时}\end{cases} \tag{1.44}$$

式中 $\varepsilon_{\beta\alpha\gamma}$ 相当于 ε_{ijk}。

这样，旋度的分量是：

$$\left.\begin{aligned}(\mathrm{curl}\,\boldsymbol{u})_1&=\frac{1}{h_2h_3}\left[\frac{\partial(u_3h_3)}{\partial q_2}-\frac{\partial(u_2h_2)}{\partial q_3}\right]\\(\mathrm{curl}\,\boldsymbol{u})_2&=\frac{1}{h_3h_1}\left[\frac{\partial(u_1h_1)}{\partial q_3}-\frac{\partial(u_3h_3)}{\partial q_1}\right]\\(\mathrm{curl}\,\boldsymbol{u})_3&=\frac{1}{h_1h_2}\left[\frac{\partial(u_2h_2)}{\partial q_1}-\frac{\partial(u_1h_1)}{\partial q_2}\right]\end{aligned}\right\} \tag{1.45}$$

有了这些曲线坐标系的基本运算之后，就不难写出曲线坐标系中的应变表达式，它们是

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\alpha\beta}=[\mathbf{E}(\boldsymbol{u})]_{\alpha\beta}&=\frac{1}{2}[(\nabla\boldsymbol{u})_{\alpha\beta}+(\boldsymbol{u}\nabla)_{\alpha\beta}]\\&=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{h_\alpha}\frac{\partial u_\beta}{\partial q_\alpha}+\frac{1}{h_\beta}\frac{\partial u_\alpha}{\partial q_\beta}+\sum_{\gamma=1}^{3}u_\gamma\times\right.\end{aligned}$$

$$\left[\frac{1}{h_\alpha}\begin{Bmatrix}\beta\\ \gamma\quad\alpha\end{Bmatrix}+\frac{1}{h_\beta}\begin{Bmatrix}\alpha\\ \gamma\quad\beta\end{Bmatrix}\right]\Bigg\}\tag{1.46}$$

因此，线应变有

$$\varepsilon_{kk}=\frac{1}{h_k}\left[\frac{\partial u_k}{\partial q_k}+\sum_{\gamma=1}^{3}u_\gamma\begin{Bmatrix}k\\ \gamma\quad k\end{Bmatrix}\right]\tag{1.47}$$

切应变有

$$\varepsilon_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}\left[\frac{h_\beta}{h_\alpha}\frac{\partial(u_\beta/h_\beta)}{\partial q_\alpha}+\frac{h_\alpha}{h_\beta}\frac{\partial(u_\alpha/h_\alpha)}{\partial q_\beta}\right]\quad(\alpha\neq\beta)\tag{1.48}$$

于是，按式（1.47）和（1.48）就可写出两个常用曲线坐标系中的应变分量：

对于圆柱坐标系（r，φ，z），有

$$\left.\begin{aligned}
&\varepsilon_{rr}=\frac{\partial u_r}{\partial r},\varepsilon_{\varphi\varphi}=\frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}+u_r\right),\varepsilon_{zz}=\frac{\partial u_z}{\partial z}\\
&\varepsilon_{\varphi z}=\varepsilon_{z\varphi}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial\varphi}+\frac{\partial u_\varphi}{\partial z}\right)\\
&\varepsilon_{zr}=\varepsilon_{rz}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_r}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial r}\right)\\
&\varepsilon_{r\varphi}=\varepsilon_{\varphi r}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\varphi}+\frac{\partial u_\varphi}{\partial r}-\frac{u_\varphi}{r}\right)
\end{aligned}\right\}\tag{1.49}$$

对于球坐标系（R，θ，φ），有

$$\left.\begin{aligned}
&\varepsilon_{RR}=\frac{\partial u_R}{\partial R},\varepsilon_{\theta\theta}=\frac{1}{R}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+u_R\right)\\
&\varepsilon_{\varphi\varphi}=\frac{1}{R}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}+u_R+(\cot\theta)u_\theta\right)\\
&\varepsilon_{\theta\varphi}=\varepsilon_{\varphi\theta}=\frac{1}{2R}\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial\theta}-(\cot\theta)u_\varphi+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial\varphi}\right)\\
&\varepsilon_{\varphi R}=\varepsilon_{R\varphi}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial u_R}{\partial\varphi}+\frac{\partial u_\varphi}{\partial R}-\frac{u_\varphi}{R}\right)\\
&\varepsilon_{R\theta}=\varepsilon_{\theta R}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial R}-\frac{u_\theta}{R}+\frac{1}{R}\frac{\partial u_R}{\partial\theta}\right)
\end{aligned}\right\}\tag{1.50}$$

§3 动力学方程

弹性动力学方程是由物体内的应力、体积力（外力）及运动加速度构成的约束条件，可以从微分角度考虑，也可用积分方式建立。现从后一种方法给予考虑。

有体积为 V 的物体，它的表面积为 S，运用动量定理，即 V 内所有质点的总动量变化率等于作用在这些质点上的合力，为

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \rho \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} \mathrm{d}V = \iiint_V \boldsymbol{f} \mathrm{d}V + \iint_S \boldsymbol{T}(\boldsymbol{n}) \mathrm{d}S \tag{1.51}$$

式中 ρ 为质点的密度，$\boldsymbol{f}$ 是体积力，$\boldsymbol{T}$ 是作用在表面 S 上的面力。这里不考虑质点的质量 $\rho \mathrm{d}V$ 随时间变化的问题，所以上式左边可写成 $\iiint_V \rho \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2} \mathrm{d}V$。

边界上的面力应与物体内应力保持连续，即在边界上有

$$\sigma_{ij} n_j = T_i \tag{1.52}$$

n_j 是边界表面法线 $\boldsymbol{n}$ 的分量。这样将式（1.51）写成分量形式是

$$\iiint_V \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \mathrm{d}V = \iiint_V f_i \mathrm{d}V + \iint_S \sigma_{ij} n_j \mathrm{d}s \tag{1.53}$$

应用 Gauss 散度定理，则上式变为

$$\iiint_V (\rho \ddot{u}_i - f_i - \sigma_{ij,j}) \mathrm{d}V = 0 \tag{1.54}$$

式中字母上面加点表示时间微商 $\left(\ddot{u}_i = \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \right)$，脚标之间的逗号表示空间微商 $\left(如\ \sigma_{ij,j} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \right)$。这里要求被积函数满足

$$\rho \ddot{u}_i = f_i + \sigma_{ij,j} \tag{1.55}$$

这就是动力学方程。

同样，考虑角动量定理，就可以得到在本章§1中应用微分运算已知的所谓切应力成对性定理，即 $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$。

§4 线性弹性体中的应力应变关系和应变能函数

由于外力作用到物体上使物体发生变形，产生应变 E，相应地在物体内也存在应力 Σ。因而它们之间必然存在一定的关系，这种关系与物体本身的物理构成有关，要通过物理试验来得出。在本书中不考虑温度变化的影响。

对于最一般的情况，即各向异性线性弹性体中，应力与应变的关系有

$$\sigma_{ij} = c_{ijpq}\varepsilon_{pq} \tag{1.56}$$

上式表示应力张量的每个分量是应变张量的所有分量的线性组合。系数 c_{ijpq} 在均匀弹性体中是常数，它有 81 个，构成一个四阶张量，称为弹性系数张量。由于应力与应变均是对称张量，即 $\sigma_{ij}=\sigma_{ji}$ 和 $\varepsilon_{pq}=\varepsilon_{qp}$，所以有

$$c_{ijpq} = c_{jipq} = c_{ijqp} \tag{1.57}$$

按此关系，可简化到只有 36 个独立的系数。如果从热力学角度来考虑，可有

$$c_{ijpq} = c_{pqij} \tag{1.58}$$

这样独立常数可简化到 21 个。

我们将对此作较详细的说明，并同时引进功、能的概念。假定体积为 V 的物体，表面积为 S，按热力学第一定律，物体所具有的热力学能可以由于物体的变形而改变，但要遵守能量守恒原理，即在单位时间内，对物体所作的机械功＋热量＝能量（动能与热力学能的总和）的增加。让我们来逐个介绍上述诸项。

机械功：外力（体积力 $\boldsymbol{f}$ 和表面力 $\boldsymbol{T}$）在弹性体变形过程中，对它所作的功，在单位时间内有

$$\iiint_V \boldsymbol{f}\cdot\dot{\boldsymbol{u}}\,\mathrm{d}V + \iint_S \boldsymbol{T}\cdot\dot{\boldsymbol{u}}\,\mathrm{d}S = \iiint_V [f_i\dot{u}_i + (\sigma_{ij}\dot{u}_i)_{,j}]\mathrm{d}V \tag{1.59}$$

这里已应用了 Gauss 散度定理。将动力学方程式（1.55）代入，再根据σ_{ij}和ε_{ij}的对称性，则式（1.59）可变成：

$$\iiint_V (\rho \dot{u}_i \ddot{u}_i + \sigma_{ij} \dot{u}_{i,j}) \mathrm{d}V = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \frac{1}{2} \rho \dot{u}_i \dot{u}_i \mathrm{d}V + \iiint_V \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} \mathrm{d}V \tag{1.60}$$

热量：若 $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x},t)$为热流，于是$-\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{n}$是单位时间内单位面积流入物体内的热量，其中$\boldsymbol{n}$是物体表面的外法线。如果$Q(\boldsymbol{x},t)$代表输入物体内的热量，则用热流表示为

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V Q \mathrm{d}V = -\iint_S \boldsymbol{h} \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}S \tag{1.61}$$

再应用散度定理，则有

$$Q = -\nabla \cdot \boldsymbol{h} \tag{1.62}$$

动能：动能的变化率是

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \frac{1}{2} \rho \dot{u}_i \dot{u}_i \mathrm{d}V \tag{1.63}$$

热力学能：包括两部分，一部分是弹性变形能，另一部分是热能。若

系．可得

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \tag{1.68}$$

又由式（1.65）知，等熵过程中，应力也可表示为

$$\sigma_{ij} = \left(\frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}} \right)_I \tag{1.69}$$

如果应变能函数中的应力分量用线性的弹性本构关系代人，则有

$$W = \frac{1}{2} c_{ijpq} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{pq} \tag{1.70}$$

这是应变的二次形式，自然就有 $c_{ijpq} = c_{pqij}$的对称性质。

若物体是各向同性的，即在一点上，所有方向的弹性性质相同，这时，c_{ijpq}是四阶各向同性张量（各向同性张量是指在坐标系转动时，它的分量保持不变），它可表示为

$$c_{ijpq} = \lambda \delta_{ij} \delta_{pq} + \mu(\delta_{ip}\delta_{jq} + \delta_{iq}\delta_{jp}) \tag{1.71}$$

这样，最后简化成 2 个独立常数 λ 和 μ，称为 Lame′常数。此时的应力与应变关系有

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij} = \lambda \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \mu \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \tag{1.72}$$

§ 5　互易性定理和动力学方程的 Green 函数

现在考虑在两种状态的外力作用及边界条件情况下，两组不同的位移解之间的关系。利用 Betti 提出的互易性定理，可以把复杂的问题简化。

若第一种状态是，体积力为 $\boldsymbol{f}$，位移解是 $\boldsymbol{u}(x, t)$，相应的边界 S 上的面力为 $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{n})$。而第二种状态是，体积力为 $\boldsymbol{g}$，解为 $\boldsymbol{v}(x, t)$，相应的边界面力为 $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{n})$。$\boldsymbol{n}$ 是边界的外法线。则可得到 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 之间有如下互易关系式：

$$\iiint_V (\boldsymbol{f} - \rho\ddot{\boldsymbol{u}}) \cdot \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}V + \iint_S \boldsymbol{T}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{n}) \cdot \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}S$$

$$= \iiint_V (\boldsymbol{g} - \rho\ddot{\boldsymbol{v}}) \cdot \boldsymbol{u}\,\mathrm{d}V + \iint_S \boldsymbol{T}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{n}) \cdot \boldsymbol{u}\,\mathrm{d}S \qquad (1.73)$$

这个关系式很容易证明。利用动力学方程及散度定理，等式左边可化为 $\iiint_V c_{pqij} v_{i,j} u_{p,q} \mathrm{d}V$，而右边可化为 $\iiint_V c_{ijpq} u_{i,j} v_{p,q} \mathrm{d}V$，可见，只要左边或右边改变哑标，并应用对称性关系 $c_{ijpq} = c_{pqij}$，式（1.73）就得到了证明，式（1.73）也称为互易性定理，它的物理意义是：第一组力（包括外力及惯性力）在第二组位移上所作的功，等于第二组力（包括外力及惯性力）在第一组位移上所作的功。

Betti 互易性定理中的两组力学量，不必取在同一时刻，例如 $\boldsymbol{u}$、$\ddot{\boldsymbol{u}}$、$\boldsymbol{T}$（$\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{n}$）和 $\boldsymbol{f}$ 取在 t_1 时刻，而 $\boldsymbol{v}$、$\ddot{\boldsymbol{v}}$、$\boldsymbol{T}$（$\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{n}$）和 $\boldsymbol{g}$ 取在取在 t_2 时刻，式（1.73）仍成立。进一步，如果取 $t_1=t$，$t_2=\tau-t$，然后对式（1.73）两边在 $0\sim\tau$ 的时间范围内积分，则

$$\int_0^\tau \Big\{ \iiint_V (\boldsymbol{f}(t) - \rho\ddot{\boldsymbol{u}}(t)) \cdot \boldsymbol{v}(\tau - t)\mathrm{d}V +$$

$$\iint_S \boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{n}) \cdot \boldsymbol{v}(\tau - t)\mathrm{d}S \Big\}\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^\tau \Big\{ \iiint_V (\boldsymbol{g}(\tau - t) - \rho\ddot{\boldsymbol{v}}(\tau - t)) \cdot \boldsymbol{u}(t)\mathrm{d}V +$$

$$\iint_S \boldsymbol{T}(\boldsymbol{v}(\tau - t),\boldsymbol{n}) \cdot \boldsymbol{u}(t)\mathrm{d}S \Big\}\mathrm{d}t \qquad (1.74)$$

而

$$\int_0^\tau \rho\{\ddot{\boldsymbol{u}}(t) \cdot \boldsymbol{v}(\tau - t) - \boldsymbol{u}(t) \cdot \ddot{\boldsymbol{v}}(\tau - t)\}\mathrm{d}t$$

$$= \rho\int_0^\tau \frac{\partial}{\partial t}\{\dot{\boldsymbol{u}}(t) \cdot \boldsymbol{v}(\tau - t) + \boldsymbol{u}(t) \cdot \dot{\boldsymbol{v}}(\tau - t)\}\mathrm{d}t$$

$$= \rho\{\dot{\boldsymbol{u}}(\tau) \cdot \boldsymbol{v}(0) - \dot{\boldsymbol{u}}(0) \cdot \boldsymbol{v}(\tau) + \boldsymbol{u}(\tau) \cdot \dot{\boldsymbol{v}}(0) - \boldsymbol{u}(0) \cdot \dot{\boldsymbol{v}}(\tau)\}$$

如果在某时刻 τ_0 之前，$\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 及 $\ddot{\boldsymbol{u}}$ 和 $\ddot{\boldsymbol{v}}$ 在整个 V 内处处为零，那么必定有

$$\int \rho[\ddot{\boldsymbol{u}}(t)\cdot\boldsymbol{v}(\tau-t)-\boldsymbol{u}(t)\cdot\ddot{\boldsymbol{v}}(\tau-t)]\mathrm{d}t=0$$

这样，对于过去是静止的位移场，式（1.74）形式的 Betti 定理有

$$\int \mathrm{d}t\iiint_V\{\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)\cdot\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x},\tau-t)-\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},\tau-t)\cdot\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t)\}\mathrm{d}V$$

$$=\int \mathrm{d}t\iint_S\{\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},\tau-t)\cdot\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t),\boldsymbol{n})-$$

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)\cdot\boldsymbol{T}(\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},\tau-t),\boldsymbol{n})\}\mathrm{d}S \tag{1.75}$$

在地震学问题中，弹性动力学方程中的体积力项代表震源的受力情况，它是较为复杂的，比如震源的断层位错，这些力只在有限时间内作用在有限的断层面上。对于这种复杂的受力情况，可以引用 Green 函数法来解决。即先不顾及震源的复杂性，而只考虑集中在某一点上、某一时刻、某一方向上的单位脉冲所引起的位移，实际震源引起的位移则看作上述简单震源所产生的位移的合成。

简单震源引起的位移场是弹性动力学的 Green 函数。若单位脉冲作用在 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\xi}$ 处、$t=\tau$ 时刻及 x_n 方向上，则在物体的另外任意一点上，在 t 时刻 x_i 方向上的位移为 $G_{in}(\boldsymbol{x},t;\boldsymbol{\xi},\tau)$，因而这 Green 函数是一个张量，它在物体的整个体积 V 内应满足方程

$$\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}G_{in}=\delta_{in}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi})\delta(t-\tau)+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(c_{ijpq}\frac{\partial}{\partial x_q}G_{pn}\right) \tag{1.76}$$

其初始条件为，当 $t\leqslant\tau$ 及 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{\xi}$ 时，有

$$\left.\begin{aligned}&\mathbf{G}(\boldsymbol{x},t;\boldsymbol{\xi},\tau)=0\\&\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{G}(\boldsymbol{x},t;\boldsymbol{\xi},\tau)=0\end{aligned}\right\} \tag{1.77}$$

并在边界面 S 上满足相应的条件。

在实际应用中可以利用各种不同的边界条件。比如 S 是刚性

的、边界条件与时间无关，则 Green 函数中的时间起始点可以任意移动，即

$$G(x,t;\xi,\tau)=G(x,t-\tau;\xi,0)$$
$$=G(x,-\tau;\xi,-t) \qquad (1.78)$$

这是对于源点和接收点的时间对换关系。

弹性动力学 Green 函数的实际计算，可能仍是一个复杂的问题。后面将结合地震问题给予计算。

有了 Green 函数后，将它应用于互易性定理，就可计算出实际的位移场来。例如要计算在 V 体积内、在体积力 $\boldsymbol{f}$ 作用及相应的边界条件下产生的位移场 $\boldsymbol{u}$ 。根据互易性原理，可提出另一组情况：在 ξ 处的 x_i 方向作用着瞬时单位集中力，即 $g_i(\boldsymbol{x},t)=\delta_{in}\delta(\boldsymbol{x}-\xi)\delta(t)$，考虑边界条件后它的解 $v_i(\boldsymbol{x},t)=G_{in}(\boldsymbol{x},t;\xi,0)$，将这些代入式(1.75)中，得

$$u_n(\boldsymbol{x},t)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\tau\iiint_V f_i(\xi,\tau)G_{in}(\xi,t-\tau;\boldsymbol{x},0)\mathrm{d}V(\xi)+$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\tau\iint_S\{G_{in}(\xi,t-\tau;\boldsymbol{x},0)T_i[\boldsymbol{u}(\xi,\tau),\boldsymbol{n}]-$$
$$u_i(\xi,\tau)c_{ijpq}(\xi)n_j\cdot G_{pn,q}(\xi,t-\tau;\boldsymbol{x},0)\}\mathrm{d}S(\xi) \qquad (1.79)$$

此表达式中，如果是均匀介质，则 c_{ijpq} 是常数；对于某些特定边界条件，表达式还可简化。

§6 最小势能定理和 Hamilton 原理

能量法是解地震学问题的一个有力工具，下面介绍一个最普遍的定理——最小势能定理。物体在外力作用下将引起弹性变形，体积内将存在应力。我们要研究这种变形后在平衡时的所谓总势能与应力的关系，其总势能是

总势能＝应变能－已知外力所作的功

对下面两种位移情况的总势能作比较：第一种情况的位移适合平衡方程，同时也满足边界条件；而第二种情况的位移，只适合有关位移的边界条件，但不满足平衡方程及以外力表示的边界条件。我们来证明第一种情况的总势能比第二种情况小。也就是说，在满足已知位移边界条件的一切位移中，以能满足平衡方程的外力边界条件的位移所形成的总势能为最小。证明如下：

设第一种情况的位移为 $\boldsymbol{u}$，相应的应变分量为 ε_{ij}，应力分量为 σ_{ij}，因此应变能函数是

$$W = \frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} \tag{1.80}$$

在体积为 V 的弹性体内总的应变能为

$$U = \iiint_V W\mathrm{d}V = \frac{1}{2}\iiint_V \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}\mathrm{d}V \tag{1.81}$$

其中

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \tag{1.82}$$

位移 $\boldsymbol{u}$ 满足平衡方程，即

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0 \tag{1.83}$$

而且在以外力表示边界条件的那部分表面 S_A 上满足

$$\sigma_{ij}n_j = T_i \tag{1.84}$$

而在以位移给出边界条件的那部分表面 S_B 上有

$$u_i = u_i^* \tag{1.85}$$

u_i^* 是给出的已知条件。

令另外一种情况的位移为

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u} + \delta\boldsymbol{u} \tag{1.86}$$

此位移只能适合 S_B 边界上的条件，但不满足平衡方程(1.83)和在 S_A 上的边界条件，因而在 S_B 上有

$$\delta\boldsymbol{u} = 0 \tag{1.87}$$

引进如下符号

$$
\left.\begin{aligned}
\delta\varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\delta u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial\delta u_j}{\partial x_i}\right)\\
\delta\sigma_{ij} &= \lambda\delta\theta\delta_{ij}+2\mu\delta\varepsilon_{ij}\\
\delta\theta &= \delta\varepsilon_{kk}
\end{aligned}\right\}\tag{1.88}
$$

这样，两组位移情况的应变能分别为 U（对应于 $\boldsymbol{u}$）和 $U+\delta U$（对应于 $\boldsymbol{u}+\delta\boldsymbol{u}$）。而第二种情况的应变能函数 $W+\delta W$ 有

$$
\begin{aligned}
W+\delta W &= \frac{1}{2}(\varepsilon_{ij}+\delta\varepsilon_{ij})(\sigma_{ij}+\delta\sigma_{ij})\\
&= W(\sigma_{ij},\varepsilon_{ij})+W(\sigma_{ij},\delta\varepsilon_{ij})+W(\delta\sigma_{ij},\varepsilon_{ij})+\\
&\quad W(\delta\sigma_{ij},\delta\varepsilon_{ij})
\end{aligned}\tag{1.89}
$$

式中 $W(\sigma_{ij},\varepsilon_{ij})$ 就是第一种情况的应变能函数，而

$$
2W(\sigma_{ij},\delta\varepsilon_{ij}) = \sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}\tag{1.90}
$$

同理

$$
2W(\delta\sigma_{ij},\varepsilon_{ij}) = \delta\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}\tag{1.91}
$$

$$
2W(\delta\sigma_{ij},\delta\varepsilon_{ij}) = \delta\sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}\tag{1.92}
$$

考虑应力应变关系，不难证明有 $W(\sigma_{ij},\delta\varepsilon_{ij})=W(\delta\sigma_{ij},\varepsilon_{ij})$。

并令

$$
\Omega = \iiint_V [W(\sigma_{ij},\delta\varepsilon_{ij})+W(\delta\sigma_{ij},\varepsilon_{ij})]\mathrm{d}V\tag{1.93}
$$

则

$$
\Omega = 2\iiint_V W(\sigma_{ij},\delta\varepsilon_{ij})\mathrm{d}V = \iiint_V \sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}\mathrm{d}V\tag{1.94}
$$

按 Gauss 公式，可写成

$$
\Omega = \iint_S \sigma_{ij}n_j\delta u_i\mathrm{d}S - \iiint_V \sigma_{ij,j}\delta u_i\mathrm{d}V\tag{1.95}
$$

也即

$$
\Omega = \iint_S T_i\delta u_i\mathrm{d}S + \iiint_V f_i\delta u_i\mathrm{d}V\tag{1.96}
$$

注意到物体从平衡点的位移 $\boldsymbol{u}$ 开始，变化到 $\boldsymbol{u}+\delta\boldsymbol{u}$，这段时间内外力不变，所以可将式(1.96)写成

$$\Omega = \delta \left[\iint\limits_S T_i u_i \mathrm{d}S + \iiint\limits_V f_i u_i \mathrm{d}V \right] \tag{1.97}$$

按总势能的定义有

$$E = U - \iint\limits_S T_i u_i \mathrm{d}S - \iiint\limits_V f_i u_i \mathrm{d}V \tag{1.98}$$

因此，对于第二种情况的变化量有

$$\delta E = \delta U - \delta \left[\iint\limits_S T_i u_i \mathrm{d}S + \iiint\limits_V f_i u_i \mathrm{d}V \right] \tag{1.99}$$

而应变能变化是

$$\delta U = \Omega + \iiint\limits_V W(\delta\sigma_{ij}, \delta\varepsilon_{ij}) \mathrm{d}V \tag{1.100}$$

代入式(1.99)得总势能变化是

$$\delta E = \iiint\limits_V W(\delta\sigma_{ij}, \delta\varepsilon_{ij}) \mathrm{d}V \tag{1.101}$$

这是应变的二次形式，一定有

$$\delta E \geqslant 0 \tag{1.102}$$

这就证明了适合已知位移边界条件的位移中，能满足平衡方程的位移所造成的总势能为最小。

上述最小势能定理是在弹性体平衡状态下进行讨论的。我们还应讨论弹性介质的动力学特征，为此引用 Lagrange 密度 L，它可大大简化许多力学公式的表达形式。

定义

$$L = \frac{1}{2}\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} \frac{\partial u_i}{\partial t} - \frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} \tag{1.103}$$

若 ρ 为常量，则有

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \dot{u}_i} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \tag{1.104}$$

以及

$$\frac{\partial L}{\partial \varepsilon_{ij}} = -\sigma_{ij} \tag{1.105}$$

则动力学方程可以用 Lagrange 形式表示为

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}_i}\right)=f_i-\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial L}{\partial \varepsilon_{ij}} \tag{1.106}$$

再定义一个四梯度算子，即

$$\partial_\mu=\frac{\partial}{\partial x_\mu}=\left(\nabla,\frac{\partial}{\partial t}\right),(\mu=1,2,3,4) \tag{1.107}$$

则上述 Lagrange 方程可用更简洁的形式表示为

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{\partial L}{\partial(u_{k,\mu})}=f_k \tag{1.108}$$

在地震学中，更注重讨论动力学过程，因而要介绍动态中的 Hamilton 原理。Hamilton 原理也称为虚功原理，它是最小势能原理的另一种物理解释。

按最小势能原理，弹性力学的正确解必定使 $\delta E=0$，这样式(1.99)变为

$$\delta U=\iint_{S_A}T_i\delta u_i\mathrm{d}S+\iiint_V f_i\delta u_i\mathrm{d}V \tag{1.109}$$

在动态情况下，必须考虑惯性力的影响，这样应该有

$$\begin{aligned}\delta U&=\iiint_V f_i\delta u_i\mathrm{d}V+\iint_{S_A}T_i\delta u_i\mathrm{d}S\\&=\iiint_V\rho\ddot{u}_i\delta u_i\mathrm{d}V+\iiint_V\sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}\mathrm{d}V\end{aligned} \tag{1.110}$$

上式在任何时刻都成立，取任意一段时间间隔(t_1,t_2)，上式中的惯性力项为

$$\begin{aligned}&\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\iiint_V\rho\frac{\partial^2u_i}{\partial t^2}\delta u_i\mathrm{d}V=\iiint_V\rho\mathrm{d}V\left[\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial^2u_i}{\partial t^2}\delta u_i\mathrm{d}t\right]\\&=\iiint_V\rho\mathrm{d}V\left[\frac{\partial u_i}{\partial t}\delta u_i\right]\Bigg|_{t_1}^{t_2}-\iiint_V\rho\mathrm{d}V\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\partial u_i}{\partial t}\delta\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}\right)\right]\mathrm{d}t\\&=-\int_{t_1}^{t_2}\delta\left[\frac{1}{2}\iiint_V\rho\frac{\partial u_i}{\partial t}\frac{\partial u_i}{\partial t}\mathrm{d}V\right]\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{1.111}$$

如果选择 $\delta \boldsymbol{u}$ 在 $t=t_1$ 及 $t=t_2$ 时都为零，则式(1.110)可重新写成

$$\delta \int_{t_1}^{t_2}\left[\iiint_V (L + f_i u_i)\,\mathrm{d}V + \iint_{S_A} T_i u_i \mathrm{d}S\right]\mathrm{d}t = 0 \qquad (1.112)$$

式中假设 $\boldsymbol{f}$ 与 $\boldsymbol{u}$ 无关。它也称为 Hamilton 变分原理的表达式。

习题与思考题

1. 试用微元体的力矩平衡条件及体积 V 内的角动量守恒定律来证明应力张量为对称张量。

2. 试证明对于各向同性介质中传播的平面体波，应变能函数 $\frac{1}{2}\sigma_{ij}\epsilon_{ij}$ 的值为动能密度 $\frac{1}{2}\rho\dot{\boldsymbol{u}}^2$。

3. 如果在固定应变下温度升高，物体中的应力将如何？应力遵守 Hovke 定律式（1.56）吗？还是必须以某种方式修改？

4. 从式（1.52）出发，试求作用于以 $\hat{\boldsymbol{n}}$ 为法线的面元上的位移 $\boldsymbol{u}$ 所引起的面力 $\mathbf{T}$ 为下述形式：$\mathbf{T}(\boldsymbol{u},\hat{\boldsymbol{n}}) = \lambda(\nabla\cdot\boldsymbol{u})\hat{\boldsymbol{n}} + \mu\left(2\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \hat{\boldsymbol{n}}} + \hat{\boldsymbol{n}}\times(\nabla\times\boldsymbol{u})\right)$，这里 $\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \hat{\boldsymbol{n}}} = (\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}$。

5. 面力 $\mathbf{T}[\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}),\hat{\boldsymbol{n}}]$ 是位置 $\boldsymbol{x}$ 的函数，在法线为 $\hat{\boldsymbol{n}}$ 的界面 S 上取微元体，有平衡方程 $\mathbf{T}(\boldsymbol{x}+\delta\boldsymbol{x},\hat{\boldsymbol{n}})\mathrm{d}S - \mathbf{T}(\boldsymbol{x},\hat{\boldsymbol{n}})\mathrm{d}S = (\rho\ddot{\boldsymbol{u}} - \boldsymbol{f})\mathrm{d}S\mathrm{d}\boldsymbol{x}$，当 $\delta\boldsymbol{x}\to 0$ 时，此式的左边为零，即 $\mathbf{T}(\boldsymbol{x}+\delta\boldsymbol{x},\hat{\boldsymbol{n}}) - \mathbf{T}(\boldsymbol{x},\hat{\boldsymbol{n}})\to 0$，当 $\delta\boldsymbol{x}$ 平行于 $\hat{\boldsymbol{n}}$ 时，此表示 $\mathbf{T}(\boldsymbol{u},\hat{\boldsymbol{n}})$ 是 $\boldsymbol{x}$ 的连续函数。

(a) 设想一本书放在一个平桌面上，面力是桌面上位置的连续函数吗？为什么？此与面力是 $\boldsymbol{x}$ 的连续函数的结论是否矛盾？请确切说明。

(b) 试证明 σ_{yz}，σ_{zx}，σ_{zz} 在任何介质中都是 z 的连续函数，但 τ_{zz} 在 x 或 y 方向上不必连续，τ_{xx}，τ_{yy}，τ_{xy} 在 z 方向上不必连续。

6. 对于流体中压力为 p 的某点，应力张量是各向同性的，且

具有分量 $\tau_{ij}=-p\delta_{ij}$。为强调固体中的应力与流体中存在的应力之间的差别，用 $\tau_{ij}=\frac{1}{3}\tau_{kk}\delta_{ij}+\tau'_{ij}$ 定义差应力，用 $\varepsilon_{ij}=\frac{1}{3}\varepsilon_{kk}\delta_{ij}+\varepsilon'_{ij}$ 定义差应变（流体中的 τ'_{ij} 与 ε'_{ij} 为零）。试证明在各向同性弹性介质中的应变能 W 为：

$$W=\frac{1}{2}\left[\left(\lambda+\frac{2}{3}\mu\right)\varepsilon_{ii}\varepsilon_{kk}+2\mu\varepsilon'_{ij}\varepsilon'_{ij}\right]$$

并证明 ε_{ii} 是单位体积的体积应变，且 $k=\lambda+\frac{2}{3}\mu$，并说明为什么 k 和 μ 必为正数。

7. 何谓 Green 函数？按互易原理，具体推导出将位移用 Green 函数表示的式（1.79）。

第二章　无限介质中波的传播

§1　波动方程的基本解

波是在介质中以有限速度传播的扰动，它通常具有周期性，如声波、水波、电磁波等。所有波动有两个重要的共同特征：一是传递能量至远处；二是这种扰动只通过介质，而不给介质留下永久位移。波动传播时，连续介质中每一质点的运动都与前面质点运动相类似，只是时间上有延迟，最后仍回到它原来的位置。根据这两个共同特征，无论对何种介质，所有的波动都有可能归结为要服从如下二阶线性偏微分方程

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \tag{2.1}$$

式中，$\psi(x, t)$ 代表以速度 c 传播的扰动。式(2.1)也称为波动方程。

可以很容易求得式(2.1)的一些基本解。

我们通过如下关系，改变式(2.1)中的独立变量。令

$$\left.\begin{aligned} u &= t - \frac{1}{c}(lx + my + nz) \\ v &= t + \frac{1}{c}(lx + my + nz) \end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

且 $l^2+m^2+n^2=1$。此时，注意到

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v} \\
\frac{\partial}{\partial x} &= \frac{l}{c}\left(\frac{\partial}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial u}\right) \\
\frac{\partial}{\partial y} &= \frac{m}{c}\left(\frac{\partial}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial u}\right) \\
\frac{\partial}{\partial z} &= \frac{n}{c}\left(\frac{\partial}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial u}\right)
\end{aligned}\right\} \tag{2.3}$$

这样，方程(2.1)可写成

$$4\frac{\partial^2\psi}{\partial u\partial v} = 0 \tag{2.4}$$

对上式积分，得

$$\psi = f(u) + g(v) = f\left(t - \frac{lx + my + nz}{c}\right) + g\left(t + \frac{lx + my + nz}{c}\right) \tag{2.5}$$

其中 f,g 是任意的两次可微函数。这是波动方程的 D'Alembert 解。

在某一给定时刻 t，如果要使 ψ 是常量，则要求 x、y、z 满足 $lx+my+nz=$常量。这是一个平面方程，其法线的方向余弦为(l,m,n)，因而称这种波为平面波，称 $lx+my+nz=$常量的平面为波前。用单位矢量 $\hat{\boldsymbol{p}}$ 表示

$$\hat{\boldsymbol{p}} = l\boldsymbol{i} + m\boldsymbol{j} + n\boldsymbol{k} \tag{2.6}$$

那么式(2.5)可写成

$$\psi = f\left(t - \frac{\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{x}}{c}\right) + g\left(t + \frac{\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{x}}{c}\right) \tag{2.7}$$

若考虑的是一维问题，则方程(2.1)可简化为

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \tag{2.8}$$

D'Alembert 解(2.5)变成为

$$\psi = f\left(t - \frac{x}{c}\right) + g\left(t + \frac{x}{c}\right) \tag{2.9}$$

先讨论下面这种情况

$$\psi(x,t)=f\left(t-\frac{x}{c}\right) \tag{2.10}$$

因为有

$$\begin{aligned}\psi(x+c\tau,t+\tau)&=f\left(t+\tau-\frac{x+c\tau}{c}\right)\\&=f\left(t-\frac{x}{c}\right)=\psi(x,t)\end{aligned} \tag{2.11}$$

表示在距离为 x,时刻为 t 的 ψ 值等于在距离为 $x+c\tau$,时刻为 $t+\tau$ 的 ψ 值,因而 $\psi=f\left(t-\frac{x}{c}\right)$ 代表在 x 正方向传播的扰动。它的速度是 c,而且形状保持不变。同样可以讨论 $\psi=g\left(t+\frac{x}{c}\right)$ 的情况,它代表在 x 负方向传播的扰动。这样,也称式(2.5)和(2.9)为波动方程的行波形式的解。

对于具有球对称的球坐标情况,方程(2.1)可简化为

$$\frac{\partial^2\psi_1}{\partial R^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial t^2},\psi_1=R\psi \tag{2.12}$$

利用前面解的结果,可有

$$\psi=\frac{1}{R}f\left(t-\frac{R}{c}\right)+\frac{1}{R}g\left(t+\frac{R}{c}\right),(R\neq 0) \tag{2.13}$$

其波阵面(波前)为同心球面。即给定某一时刻,ψ 为常量的所有点离原点的距离都相同,称这种波为球面波。式(2.13)中右边第一项代表由原点向外传播的波,第二项则代表传向原点的波。

进一步,对方程(2.1)的两边作 Fourier 变换。按 Fourier 变换的定义

$$S(\boldsymbol{x},\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\psi(\boldsymbol{x},t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t \tag{2.14}$$

这样,在变换域上的方程有

$$\nabla^2S+k_c^2S=0,\quad k_c=\frac{\omega}{c} \tag{2.15}$$

它称为 Helmholtz 方程、k_c 称为波数。其解经 Fourier 反变换,可

得原来问题时间域上的解。即

$$\psi(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(x,\omega)e^{i\omega t}d\omega \tag{2.16}$$

由于 $\psi(x, t)$ 是实函数，所以它的变换有

$$S(x, -\omega) = S^*(x,\omega) \tag{2.17}$$

式中“$*$”号表示复共轭值。

因此，式(2.16)也可表示为

$$\psi(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} S(x, -\omega)e^{-i\omega t}d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} S(x,\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

$$= \frac{1}{\pi}\mathrm{Re}\int_0^{\infty} S(x,\omega)e^{i\omega t}d\omega \tag{2.18}$$

定义传播矢量 $\boldsymbol{k}$ 为

$$\boldsymbol{k} = k_c\hat{\boldsymbol{p}} \tag{2.19}$$

只考虑式(2.7)的第一项，它的 Fourier 变换有

$$S(x,\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(t - \frac{\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{x}}{c}\right)e^{-i\omega t}dt$$

$$= \left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt\right\}e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}$$

$$= S(0,\omega)e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \tag{2.20}$$

假定

$$S(0,\omega) = A(\omega)e^{-ix_0(\omega)} \tag{2.21}$$

式中，A，x_0 均为常函数，则由式(2.18)得到波谱表象(表示式)

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\pi}\mathrm{Re}\int_0^{\infty} A(\omega)e^{i[\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} - x_0(\omega)]}d\omega \tag{2.22}$$

这样，将波函数 $\psi(x, t)$ 表示成在整个频率范围上的平面波的积分。这就是 Fourier 的叠加原理。因而波函数 $\psi(x, t)$ 的一个波谱分量有如下形式

$$\psi(x,t,\omega_0) = A(\omega_0)\cos\left[\omega_0\left(t - \frac{\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{x}}{c}\right) - x_0\right] \tag{2.23}$$

式中 ω_0 是 ω 的某一特定值。幅度因子 $A(\omega_0)$ 称波谱幅度，余弦

项内的量称为相位。$T=\frac{2\pi}{\omega_0}$称为周期，式(2.23)中的t用$t+T$替代，其值不变，因而认为ψ对于时间是调谐的。同理，波长$\lambda=\frac{2\pi c}{\omega_0}$，用$\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{x}+\lambda$替代$\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{x}$，$\psi$也不受影响，因而$\psi$对于空间，同样是调谐的。

角频率ω、周期T、波长λ及波数k_c之间有如下的关系

$$k_c=\frac{\omega}{c}=\frac{2\pi}{cT}=\frac{2\pi}{\lambda} \tag{2.24}$$

波动方程解虽对时间和空间都有周期性，但还不能说明满足波动方程的波就是行波。如对于式(2.5)中$f=g$的情况，即将两个相反方向传播的行波叠加，这时有

$$\begin{aligned}\psi(\boldsymbol{x},t,\omega_0)&=A(\omega_0)\left\{\cos\left[\omega_0\left(t-\frac{\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\hat{\boldsymbol{x}}}{c}\right)-x_0\right]\right.\\&\quad\left.+\cos\left[\omega_0\left(t+\frac{\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{x}}{c}\right)-x_0\right]\right\}\\&=2A(\omega_0)\cos\left[\frac{\omega_0}{c}(\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{x})\right]\cos(\omega_0t-x_0)\end{aligned} \tag{2.25}$$

这是驻波，它的形状是不移动的，且在$\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{x}=\pm\frac{\lambda}{4}$，$\pm\frac{3\lambda}{4}$，…的平面上为零。这些平面称为节平面。

§2　标量 Helmholtz 方程的分离变数解

讨论在直角坐标、圆柱坐标及球坐标情况下，通过变量分离法求解。

直角坐标(x,y,z)情况：

设 Helmholtz 方程式(2.15)解的形式为

$$S=X(x)Y(y)Z(z) \tag{2.26}$$

代入方程式(2.15)，则有

$$\frac{X''}{X}+\frac{Y''}{Y}+\frac{Z''}{Z}+k_c^2=0 \tag{2.27}$$

这里符号“″”表示对变量进行二次微商。且

$$k_c^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 \tag{2.28}$$

式中 k_x，k_y，k_z 称为分离常数。若 X，Y，Z 能满足如下方程，则式（2.27）就得以满足，即

$$\left.\begin{aligned} X'' + k_x^2 X = 0 \\ Y'' + k_y^2 Y = 0 \\ Z'' + k_z^2 Z = 0 \end{aligned}\right\} \tag{2.29}$$

这些方程的解分别比例于

$$e^{\pm ik_x x}, \quad e^{\pm ik_y y}, \quad e^{\pm ik_z z}$$

再引用符号 $k_x = lk_c$，$k_y = mk_c$，$k_z = nk_c$，并对上面的解取负号形式，有

$$S = Ae^{-ik_c(lx+my+nz)} = Ae^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \tag{2.30}$$

且有 $l^2+m^2+n^2=1$。可以看出，对于每一个 k_c 值，总可以找到无数多个 Helmholtz 方程的解，使式(2.27)得以满足。从数学角度考虑，只要保证 $l^2+m^2+n^2=1$，也允许它们取复数。因而最一般形式的解为

$$S(\boldsymbol{x},\omega) = \iint A(l,m,\omega)e^{-ik_c[lx+my+z\sqrt{1-l^2-m^2}]}\mathrm{d}l\mathrm{d}m \tag{2.31}$$

式中 A（l，m，ω）是 l，m 的任意函数。

如果将式（2.31）的变量换成 k_x 和 k_y，并且只考虑实值，且为了符号一致性起见，引进因子（2π）^{2}，这样有

$$S(\boldsymbol{x},\omega) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} A(k_x,k_y,\omega)e^{-i[k_x x+k_y y+z\sqrt{k_c^2-k_x^2-k_y^2}]}\mathrm{d}k_x\mathrm{d}k_y \tag{2.32}$$

可以把被积函数中的 A（k_x，k_y，ω）$\exp\left[-iz\sqrt{k_c^2-k_x^2-k_y^2}\right]$ 看作是 $S(\boldsymbol{x},\omega)$的二重 fourier 变换，即

$$A(k_x,k_y,\omega) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} S(\boldsymbol{x},\omega)e^{i[k_x x+k_y y+z\sqrt{k_c^2-k_x^2-k_y^2}]}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{2.33}$$

回到时间域，有

$$A(k_x,k_y,\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x,t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t-k\cdot x)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t \tag{2.34}$$

其反变换是

$$\psi(x,t)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}A(k_x,k_y,\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-k\cdot x)}\mathrm{d}k_x\mathrm{d}k_y\mathrm{d}\omega \tag{2.35}$$

此结果表示了一般的叠加原理。

圆柱坐标 $(r,\ \varphi,\ z)$ 情况：

在圆柱坐标系中，Helmhotz 方程的形式是

$$\frac{\partial^2 S}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial S}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 S}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 S}{\partial z^2}+k_c^2S=0 \tag{2.36}$$

用分离变数法，设式 (2.36) 解的形式是

$$S=H(r)\Phi(\varphi)Z(z) \tag{2.37}$$

要求 H、Φ、Z 满足：

$$\frac{\mathrm{d}^2H}{\mathrm{d}r^2}+\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}r}+\left(k^2-\frac{m^2}{r^2}\right)H=0 \tag{2.38}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\varphi^2}+m^2\Phi=0 \tag{2.39}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2Z}{\mathrm{d}z^2}-(k^2-k_c^2)Z=0 \tag{2.40}$$

式中 k 和 m 为分离常数，即有 $k^2+m^2=k_c^2$。

式 (2.38) 是 m 阶 Bessel 方程，它的解用 $H_m(kr)$ 函数表示。

式 (2.39) 的解是

$$\Phi=\frac{\cos}{\sin}(m\varphi)\ 或\ \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}m\varphi}$$

在大多数应用中，要求 S 是单值函数。由于 $\Phi(2\pi+\varphi)=\Phi(\varphi)$，这就要求 m 必须是整数，而且要求式 (2.39) 中取 m^2 的形式。因为若在式 (2.39) 中取$-m^2$，解的形式为 $\exp(\pm m\varphi)$，将使 S 不为单值。

令 $\nu_c^2=k^2-k_c^2$，则式（2.40）的解为

$$Z = e^{\pm \nu_c z}$$

取 $k>k_c$ 及指数中的下方符号，这能保证当 z 趋于无限时为零。将上面三部分合起来，得到

$$H_m(kr)\begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix}(m\varphi)\,e^{\pm \nu_c z} \tag{2.41}$$

最后，其一般解可取

$$S(\boldsymbol{x},\omega) = \sum_m \begin{bmatrix}\cos\\ \sin\end{bmatrix}(m\varphi) \int A(m,k) H_m(kr) e^{\pm \nu_c z} dk \tag{2.42}$$

其中 $A(m,k)$ 是 m 和 k 的任意函数。如果要求解在 $r=0$ 处为有限值，则 $H_m(kr)=J_m(kr)$。在这种情况下，有

$$S^{\pm} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} A(m,k) \Phi_m^{\pm}(k,r) dk \tag{2.43}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} \Phi_m^{\pm}(k,r) &= e^{\pm \nu_c z} Y_m(kr,\varphi) \\ Y_m(kr,\varphi) &= J_m(kr) e^{im\varphi} \end{aligned}\right\} \tag{2.44}$$

球坐标（R，θ，φ）情况：

在球坐标系中，Helmholtz 方程的形式是

$$\frac{\partial^2 S}{\partial R^2} + \frac{2}{R}\frac{\partial S}{\partial R} + \frac{1}{R^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial S}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{R^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 S}{\partial\varphi^2} + k_c^2 S = 0 \tag{2.45}$$

设其解为

$$S = \mathscr{R}(R)\Theta(\theta)\Phi(\varphi) \tag{2.46}$$

代入方程(2.45)，则要求 $\mathscr{R}$，Θ，Φ 满足：

$$\frac{d^2\mathscr{R}}{dR^2} + \frac{2}{R}\frac{d\mathscr{R}}{dR} + \left[k_c^2 - \frac{l(l+1)}{R^2}\right]\mathscr{R} = 0 \tag{2.47}$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right) + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]\Theta = 0 \tag{2.48}$$

$$\frac{d\Phi}{d\varphi^2} + m^2\Phi = 0 \tag{2.49}$$

这里 l 和 m 为分离系数。像在柱坐标系情况一样，如果要求 $S(2\pi+\varphi)=S(\varphi)$，则 m 必须是整数。

式(2.48)的解是缔合 Legendre 函数。在大多数的实际应用中，只需要 $P_l^m(\cos\theta)$，对于整数 l，在 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$ 的范围中，它是有限的。方程(2.47)可用球 Bessel 函数 $Z_l(k_cR)$ 求解。这三部分合起来，式(2.45)的解为

$$Z_l(k_cR)P_l^m(\cos\theta)\begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix}(m\varphi) \tag{2.50}$$

这里 l、m 都是整数。可写成更一般的形式

$$S^{\pm}=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}A(l,m)\Phi_{ml}^{\pm}(k_cR) \tag{2.51}$$

其中

$$\Phi_{ml}^{\pm}(k_cR)=\begin{Bmatrix}j_l(k_cR)\\ h_l^{(2)}(k_cR)\end{Bmatrix}Y_{ml}(\theta,\varphi) \tag{2.52}$$

$$Y_{ml}(\theta,\varphi)=P_l^m(\cos\theta)e^{im\varphi} \tag{2.53}$$

§3　矢量 Helmholtz 方程的分离变数解

上一节讨论了标量 Helmholtz 方程的解的形式，现在来讨论矢量 Helmholtz 方程

$$\nabla^2\boldsymbol{u}+k_c^2\boldsymbol{u}=0 \tag{2.54}$$

这种方程的分离变数问题更为复杂。首先考虑直角坐标，其三个独立变量即坐标分量 x_1,x_2,x_3。方程中的三个未知函数是 u_1，u_2，u_3，即是矢量的三个分量。因为 $\nabla^2\boldsymbol{i}=\nabla^2\boldsymbol{j}=\nabla^2\boldsymbol{k}=0$，故式(2.54)可分离成三个标量方程，即

$$\left.\begin{aligned}\nabla^2u_1+k_c^2u_1=0\\ \nabla^2u_2+k_c^2u_2=0\\ \nabla^2u_3+k_c^2u_3=0\end{aligned}\right\} \tag{2.55}$$

每个方程中只包含一个单独的未知函数。但在球坐标系中却不能分离成三个独立的标量方程，即三个未知函数 u_R、u_θ，u_φ 的方程有一定的关联，它们是

$$\nabla^2 u_R + \left(k_c^2 - \frac{2}{R^2}\right)u_R - \frac{2}{R^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(u_\theta\sin\theta) - \frac{2}{R^2\sin\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi} = 0 \tag{2.56}$$

$$\nabla^2 u_\theta + \left(k_c^2 - \frac{1}{R^2\sin^2\theta}\right)u_\theta + \frac{2}{R^2}\frac{\partial u_R}{\partial\theta} - \frac{2}{R^2}\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi} = 0 \tag{2.57}$$

$$\nabla^2 u_\varphi + \left(k_c^2 - \frac{1}{R^2\sin^2\theta}\right)u_\varphi + \frac{2}{R^2\sin\theta}\frac{\partial u_R}{\partial\varphi} + \frac{2}{R^2}\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial\varphi} = 0 \tag{2.58}$$

这是由三个两阶齐次微分方程构成的联立方程组，经常地，u_R、u_θ、u_φ 对每一个变量会导致一个六阶微分方程。对于其他正交曲线坐标系也会出现类似的问题，为简化矢量方程的解，回避这种问题。我们设法寻找一些方法，将 $\boldsymbol{u}$ 分解成三个独立的矢量，每一个矢量只产生用一个单独的标量势函数表示的二阶偏微分方程，而每一个标量方程必须可用它的独立变量进行分离。最后，每个环节的结果构成了矢量方程的一般解。这种方法就称为矢量 Helmholtz 方程的矢量分离变数法。

总结一下，为得到矢量 Helmholtz 方程的上述解，应具备如下三个条件：

(1) 矢量解从某一意义上说必须是正交的。

(2) 三个标量方程必须可用它的独立变量进行分离。

(3) 矢量解中总有一个切于坐标曲面，另有一个垂直于坐标曲面。

可以说，如果一个矢量场能满足这些要求，则认为矢量是可分离的。

现在留下来的问题是如何选择三个标量，使它们能表示矢量

场。可以采用 Helmholtz 分解定理，即

$$\boldsymbol{u} = \mathrm{grad}\varphi + \mathrm{curl}\,\boldsymbol{A} \qquad \mathrm{div}\boldsymbol{A} = 0 \tag{2.59}$$

式中，梯度项称为纵向分量，因它指向标量势的最大变化率方向。旋度项称为横向分量。矢量场的这种分法使我们有可能根据前面所讲的第三个要求，在应用边界条件时进行化简。

按矢量解的正交性要求，可选择横向解中的两个矢量，它们垂直、或者切于坐标曲面中的一个。当然也应注意使独立的标量势简化到三个。

我们寻求的横向解中，第一个横向解是 $\boldsymbol{M}=\mathrm{curl}(\boldsymbol{a}\psi)$，$\psi$ 称为标量势，它满足 $\nabla^2\psi+k_c^2\psi=0$。并引入一个垂直坐标面的矢量 $\boldsymbol{a}$，在直角坐标系和圆柱坐标系中，使 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{k}$，在球坐标系中，取 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{R}$，因而 $\boldsymbol{M}$ 是垂直于 $\boldsymbol{a}$ 的。对 $\boldsymbol{M}$ 作用算子 $(\nabla^2+k_c^2)$，则有

$$\nabla^2\boldsymbol{M} + k_c^2\boldsymbol{M} = \mathrm{curl}[\psi\nabla^2\boldsymbol{a} + 2(\mathrm{grad}\psi \cdot \mathrm{grad}\boldsymbol{a})] \tag{2.60}$$

由于 $\boldsymbol{a}$ 是常矢量，故此式右边为零。即 $\boldsymbol{M}$ 满足矢量 Helmholtz 方程且在坐标面内。

第二个横向解可考虑是垂直于上述坐标面的。引入另一标量势 χ，它满足 $\nabla^2\chi-k_c^2\chi=0$，构成的解是

$$\boldsymbol{N} = \frac{1}{k_c}\mathrm{curl}\,\mathrm{curl}(\boldsymbol{a}\chi) \tag{2.61}$$

显然，$\nabla^2\boldsymbol{N}+k_c^2\boldsymbol{N}=0$。其中的因子 $\frac{1}{k_c}$ 是为了使两个横向解有相同的量纲。

同理，对于纵向解也引入一个标量势 φ，即

$$\boldsymbol{L} = \frac{1}{k_c}\mathrm{grad}\varphi \tag{2.62}$$

于是，矢量 Helmholtz 方程的一般解可通过三个标量势 φ、ψ、χ 的线性组合，并考虑相应的物理边界条件来得到。

三个标量势 φ、ψ、χ 满足标量 Helmholtz 方程，构成三个独立的矢量场，它们是

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{M} &= \operatorname{curl}(\boldsymbol{a}\psi) = \operatorname{grad}\psi \times \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{N} &= \frac{1}{k_c}\operatorname{curl}\operatorname{curl}(\boldsymbol{a}\chi) \\ \boldsymbol{L} &= \frac{1}{k_c}\operatorname{grad}\varphi \end{aligned}\right\} \tag{2.63}$$

$\boldsymbol{L}$、$\boldsymbol{M}$、$\boldsymbol{N}$ 也称为 Hansen 矢量。很容易证明，这些矢量有如下关系

$$\operatorname{div}\boldsymbol{M} = 0,\ \operatorname{div}\boldsymbol{N} = 0,\ \operatorname{div}\boldsymbol{L} = -k_c\varphi,\ \operatorname{curl}\boldsymbol{L} = 0 \tag{2.64}$$

进一步，如果标量势 φ、ψ、χ 之间没有差异，则有

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{M} &= k_c\boldsymbol{L} \times \boldsymbol{a} = \frac{1}{k_c}\operatorname{curl}\boldsymbol{N} \\ \boldsymbol{N} &= \frac{1}{k_c}\operatorname{curl}\boldsymbol{M} \end{aligned}\right\} \tag{2.65}$$

现在利用求解标量 Helmholtz 方程的方法来得到 Hansen 矢量的分离变数解。以球坐标为例给予推导。

若标量本征函数是 $S=f(R)Y(\theta,\varphi)$，将它代入 Hansen 矢量中，并注意 $\boldsymbol{a}=R\hat{\boldsymbol{e}}_R$（$\hat{\boldsymbol{e}}_R$ 为径向单位矢量），则得

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{M} &= f(R)\boldsymbol{C}(\theta,\varphi) \\ k_c\boldsymbol{N} &= \left[k_c^2 Rf(R) + \frac{\partial^2}{\partial R^2}(Rf(R)\right]\boldsymbol{P}(\theta,\varphi) \\ &\quad + \frac{1}{R}\ \frac{\partial}{\partial R}(Rf(R))\boldsymbol{B}(\theta,\varphi) \\ k_c\boldsymbol{L} &= \frac{\partial f(R)}{\partial R}\boldsymbol{P}(\theta,\varphi) + \frac{1}{R}f(R)\boldsymbol{B}(\theta,\varphi) \end{aligned}\right\} \tag{2.66}$$

式中矢量 $\boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{B}$ 只与 θ、φ 有关，称为矢量球调和函数。具体表示为

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{P}(\theta,\varphi) &= Y(\theta,\varphi)\hat{\boldsymbol{e}}_R \\ \boldsymbol{B}(\theta,\varphi) &= R\operatorname{grad}Y(\theta,\varphi) = \hat{\boldsymbol{e}}_R \times \boldsymbol{C}(\theta,\varphi) \\ \boldsymbol{C}(\theta,\varphi) &= \operatorname{curl}(\hat{\boldsymbol{e}}_R RY(\theta,\varphi)) \\ &= \operatorname{grad}Y \times R\hat{\boldsymbol{e}}_R = \boldsymbol{B} \times \hat{\boldsymbol{e}}_R \end{aligned}\right\} \tag{2.67}$$

进一步用本征数 m、l 表示为：

$$
\left.\begin{aligned}
\boldsymbol{P}_{ml}(\theta,\varphi) &= Y_{ml}(\theta,\varphi)\hat{\boldsymbol{e}}_R = \hat{\boldsymbol{e}}_R P_l^m(\cos\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi} \\
\sqrt{l(l+1)}\boldsymbol{B}_{ml}(\theta,\varphi) &= R\,\mathrm{grad}\ Y_{ml}(\theta,\varphi) \\
&= \left(\hat{\boldsymbol{e}}_\theta \frac{\partial}{\partial\theta} + \hat{\boldsymbol{e}}_\varphi \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) Y_{ml}(\theta,\varphi) \\
\sqrt{l(l+1)}\boldsymbol{C}_{ml}(\theta,\varphi) &= \mathrm{curl}[R\hat{\boldsymbol{e}}_R Y_{ml}(\theta,\varphi)] \\
&= \left(\hat{\boldsymbol{e}}_\theta \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi} - \hat{\boldsymbol{e}}_\varphi \frac{\partial}{\partial\theta}\right) Y_{ml}(\theta,\varphi)
\end{aligned}\right\} \tag{2.68}
$$

它们满足如下正交关系：

$$
\boldsymbol{P}_{ml}\cdot\boldsymbol{B}_{m'l'} = \boldsymbol{P}_{ml}\cdot\boldsymbol{C}_{m'l'} = \boldsymbol{B}_{ml}\cdot\boldsymbol{C}_{m'l'} = 0 \tag{2.69}
$$

$$
\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\boldsymbol{B}_{ml}\cdot\boldsymbol{C}_{m'l'}^*\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi = 0 \tag{2.70}
$$

$$
\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\boldsymbol{P}_{ml}\cdot\boldsymbol{P}_{m'l'}^*\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\boldsymbol{B}_{ml}\cdot\boldsymbol{B}_{m'l'}^*\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi
$$

$$
= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\boldsymbol{C}_{ml}\cdot\boldsymbol{C}_{m'l'}^*\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi = \delta_{mm'}\delta_{ll'}\boldsymbol{\Omega}_{ml} \tag{2.71}
$$

式中

$$
\Omega_{ml} = \frac{4\pi}{2l+1}\cdot\frac{(l+m)!}{(l-m)!} \tag{2.72}
$$

这里“ * ”号表示其复共轭值。

下面给出这些正交关系的证明。

式(2.69)可直接从矢量定义中给予证明。对于式(2.70)，由于有

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sqrt{l(l+1)}\boldsymbol{B}_{ml}\cdot\sqrt{l'(l'+1)}\boldsymbol{C}_{m'l'}^*\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi \\
&= -2\pi\mathrm{i}m\delta_{mm'}\int_0^{\pi}\left[\frac{\mathrm{d}P_l^m}{\mathrm{d}\theta}P_{l'}^m + P_l^m\frac{\mathrm{d}P_{l'}^m}{\mathrm{d}\theta}\right]\mathrm{d}\theta \\
&= -2\pi\mathrm{i}m\delta_{mm'}\left[P_l^m(\cos\theta)P_{l'}^m(\cos\theta)\right]_0^{\pi} = 0
\end{aligned} \tag{2.73}
$$

而被证明。对于第三个关系式(2.71)，其第一项有

$$
\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\boldsymbol{P}_{ml}\boldsymbol{P}_{m'l'}^*\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}Y_{ml}Y_{m'l'}^*\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi
$$

$$
= 2\pi\delta_{mm'}\int_0^\pi P_l^m(\cos\theta)P_{l'}^m(\cos\theta)\sin\theta d\theta
$$

$$
= \delta_{mm'}\delta_{ll'}\Omega_{ml} \tag{2.74}
$$

式中已利用了 Legendre 函数的正交关系。同理，其第二项有

$$
\int_0^{2\pi}\int_0^\pi \sqrt{l(l+1)}\boldsymbol{B}_{ml}\cdot\sqrt{l'(l'+1)}\boldsymbol{B}_{m'l'}^*\sin\theta d\theta d\varphi
$$

$$
= 2\pi\delta_{mm'}\int_0^\pi\left(\frac{dP_l^m}{d\theta}\frac{dP_{l'}^m}{d\theta}+\frac{m^2}{\sin^2\theta}P_l^mP_{l'}^m\right)\sin\theta d\theta \tag{2.75}
$$

由于

$$
\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP_l^m}{d\theta}\right)+\left[l(l+1)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]P_l^m = 0 \tag{2.76}
$$

将其乘以 $P_{l'}^m$ 后有

$$
\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta P_{l'}^m\frac{dP_l^m}{d\theta}\right)+l(l+1)P_l^mP_{l'}^m
$$

$$
= \frac{dP_l^m}{d\theta}\frac{dP_{l'}^m}{d\theta}+\frac{m^2}{\sin^2\theta}P_l^mP_{l'}^m \tag{2.77}
$$

再将等式两边乘以 $\sin\theta$，然后对 θ 在 $(0,\pi)$ 区间上积分，得到

$$
\int_0^\pi\left(\frac{dP_l^m}{d\theta}\frac{dP_{l'}^m}{d\theta}+\frac{m^2}{\sin^2\theta}P_l^mP_{l'}^m\right)\sin\theta d\theta
$$

$$
= l(l+1)\int_0^\pi P_l^mP_{l'}^m\sin\theta d\theta = \frac{1}{2\pi}l(l+1)\Omega_{ml}\delta_{ll'} \tag{2.78}
$$

将式(2.78)代入式(2.75)，式(2.71)第二项即得到了证明。对于式(2.71)第三项，可用同样的方法给予证明。

§4 Navier 方程及其本征矢量解

对于各向同性介质，应力与应变的关系或应力与位移的关系有简单的形式，将它代入动力学方程式(1.55)，则可得到以位移表示的动力学方程，称为 Navier 方程，它的矢量形式是

$$\alpha^2 \text{grad div} \boldsymbol{u} - \beta^2 \text{curl curl} \boldsymbol{u} + \boldsymbol{F} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2} \tag{2.79}$$

其中

$$\alpha = \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \right)^{1/2}, \quad \beta = \left(\frac{\mu}{\rho} \right)^{1/2} \tag{2.80}$$

分别为纵波速度和横波速度。

引进 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)$和 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},t)$的 Fourier 变换

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) e^{-i\omega t} dt \tag{2.81}$$

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},t) e^{-i\omega t} dt \tag{2.82}$$

则在变换域上的 Navier 方程有

$$\alpha^2 \text{grad div } \boldsymbol{u} - \beta^2 \text{curl curl} \boldsymbol{u} + \boldsymbol{F} + \omega^2 \boldsymbol{u} = 0 \tag{2.83}$$

假定

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_\alpha + \boldsymbol{u}_\beta, \text{curl } \boldsymbol{u}_\alpha = 0, \text{div } \boldsymbol{u}_\beta = 0 \tag{2.84}$$

即 $\boldsymbol{u}_\alpha$ 是位移矢量的无旋部分，而 $\boldsymbol{u}_\beta$ 是无散部分。当 $\boldsymbol{F}=0$ 时，式(2.83)可写成

$$\alpha^2 \text{grad div } \boldsymbol{u}_\alpha - \beta^2 \text{curl curl} \boldsymbol{u}_\beta + \omega^2 (\boldsymbol{u}_\alpha + \boldsymbol{u}_\beta) = 0$$

或者写成

$$\alpha^2 (\nabla^2 + k_\alpha^2) \boldsymbol{u}_\alpha + \beta^2 (\nabla^2 + k_\beta^2) \boldsymbol{u}_\beta = 0 \tag{2.85}$$

其中 $k_\alpha = \dfrac{\omega}{\alpha}, k_\beta = \dfrac{\omega}{\beta}$。式(2.85)也可用下面两个方程来满足

$$(\nabla^2 + k_\alpha^2) \boldsymbol{u}_\alpha = 0, \quad (\nabla^2 + k_\beta^2) \boldsymbol{u}_\beta = 0 \tag{2.86}$$

这些都是矢量 Helmholtz 方程。

按本章 § 3 的讨论，用标量势函数求解。对式(2.86)的第一个方程引进标量势 φ_α，第二个方程引进标量势 φ_β。这样，总位移的 Hansen 本征矢量解是

$$
\left.\begin{aligned}
\boldsymbol{L} &= \frac{1}{k_\alpha}\operatorname{grad}\varphi_\alpha \\
\boldsymbol{M} &= \operatorname{curl}(\boldsymbol{a}\varphi_\beta) = (\operatorname{grad}\varphi_\beta)\times\boldsymbol{a} = \frac{1}{k_\beta}\operatorname{curl}\boldsymbol{N} \\
\boldsymbol{N} &= \frac{1}{k_\beta}\operatorname{curl}\operatorname{curl}(\boldsymbol{a}\varphi_\beta) = \frac{1}{k_\beta}\operatorname{curl}\boldsymbol{M}
\end{aligned}\right\} \tag{2.87}
$$

式中的 $\boldsymbol{a}$ 可以这样取定：在直角坐标系的情况下，取 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{k}$，对于圆柱坐标系，取 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_z$，对于球坐标系，取 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_R$。

对上述本征矢量解，下面举例说明。

例 1：二维场。

若运动与 y 坐标无关，则位移矢量 $\boldsymbol{u}(u,v,w)$ 用 Hansen 本征矢量表示为

$$
\boldsymbol{u} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{M} + \boldsymbol{N} \tag{2.88}
$$

其中

$$
\left.\begin{aligned}
\boldsymbol{L} &= \operatorname{grad}\varphi \\
\boldsymbol{M} &= \operatorname{curl}(\boldsymbol{k}\psi_1) \\
\boldsymbol{N} &= \operatorname{curl}\operatorname{curl}(\boldsymbol{k}\psi_2)
\end{aligned}\right\} \tag{2.89}
$$

这里势函数满足方程

$$
\left.\begin{aligned}
\nabla^2\varphi &= \frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} \\
\nabla^2\psi_{1,2} &= \frac{1}{\beta^2}\frac{\partial^2\psi_{1,2}}{\partial t^2}
\end{aligned}\right\} \tag{2.90}
$$

由于 $\frac{\partial}{\partial y}\equiv 0$，所以，式(2.89)为：

$$
\left.\begin{aligned}
\boldsymbol{L} &= \boldsymbol{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \boldsymbol{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z} \\
\boldsymbol{M} &= -\boldsymbol{j}\frac{\partial\psi_1}{\partial x} \\
\boldsymbol{N} &= \boldsymbol{i}\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x\partial z} - \boldsymbol{k}\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x^2}
\end{aligned}\right\} \tag{2.91}
$$

如果令 $\psi=\frac{\partial\psi_2}{\partial x}$，则得到位移分量为

$$u=\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial z},\quad v=-\frac{\partial\psi_1}{\partial x},\quad w=\frac{\partial\varphi}{\partial z}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\tag{2.92}$$

而应力为

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{zx}&=\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)=\mu\left(2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial z}-\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right)\\\sigma_{zy}&=\mu\frac{\partial v}{\partial z}\\\sigma_{zz}&=\lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)+2\mu\frac{\partial w}{\partial z}=\lambda\nabla^2\varphi+2\mu\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}-\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial z}\right)\end{aligned}\right\}\tag{2.93}$$

由上面的结果可以看到，位移与应力可用标量函数 φ、ψ、v 表示，只有 φ 和 ψ 有耦合关系，而 v 与 φ、ψ 无耦合关系。因而存在两个独立问题：一个是 $\varphi=\psi=0$，这样得到 $u=w=\sigma_{zx}=\sigma_{zz}=0$；另一个是 $v=0$，则有 $\sigma_{zy}=0$。即将原来的问题分解成为两个很有实用价值的独立问题。

例 2：轴对称场。

若运动相对于 z 轴是对称的，则采用圆柱坐标系，位移矢量是 $\boldsymbol{u}(u_r,u_\varphi,u_z)$。由于轴对称，$\frac{\partial}{\partial\varphi}\equiv0$，则

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{L}&=\hat{\boldsymbol{e}}_r\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\hat{\boldsymbol{e}}_z\frac{\partial\varphi}{\partial z}\\\boldsymbol{M}&=-\hat{\boldsymbol{e}}_\varphi\frac{\partial\psi_1}{\partial r}\\\boldsymbol{N}&=\hat{\boldsymbol{e}}_r\frac{\partial\psi}{\partial z}-\hat{\boldsymbol{e}}_z\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{\psi}{r}\right)\end{aligned}\right\}\tag{2.94}$$

式中，$\psi=\frac{\partial\psi_2}{\partial r}$。因 ψ_2 满足方程

$$\nabla^2\psi_2=\frac{1}{\beta^2}\frac{\partial^2\psi_2}{\partial t^2}\tag{2.95}$$

所以 ψ 应该满足

$$\nabla^2\psi-\frac{1}{r^2}\psi=\frac{1}{\beta^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\tag{2.96}$$

现在可以将位移和应力用势函数表示，有

$$
\left.\begin{aligned}
u_r &= \frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{\partial\psi}{\partial z} \\
u_\varphi &= \frac{\partial\psi_1}{\partial r} = v \\
u_z &= \frac{\partial\varphi}{\partial z} - \frac{\partial\psi}{\partial r} - \frac{\psi}{r} \\
\sigma_{zr} &= \mu\left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}\right) \\
&= \mu\left(2\frac{\partial^2\varphi}{\partial r\partial z} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{\psi}{r^2}\right) \\
\sigma_{z\varphi} &= \mu\frac{\partial u_\varphi}{\partial z} = \mu\frac{\partial v}{\partial z} \\
\sigma_{zz} &= \lambda\left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r}\right) + (\lambda + 2\mu)\frac{\partial u_z}{\partial z} \\
&= \lambda\nabla^2\varphi + 2\mu\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial z\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)
\end{aligned}\right\} \tag{2.97}
$$

我们再一次把原来的问题分成了两个独立的问题，第一个问题是 $u_r = u_z = \sigma_{zr} = \sigma_{zz} = 0$，则可用 v 来求解；第二个问题是 $u_\varphi = \sigma_{z\varphi} = 0$，则可用 φ 与 ψ 进行求解。但应注意，φ 是满足波动方程的，但 ψ 并不满足波动方程，而是式(2.96)。

§5 平面波

我们已经知道，三维标量波动方程(2.1)的解的形式可以是

$$
\psi_c(\boldsymbol{x}, t) = f\left(t - \frac{\hat{\boldsymbol{p}} \cdot \boldsymbol{x}}{c}\right) \tag{2.98}
$$

式中 f 是任意两次可微函数，$\hat{\boldsymbol{p}}$ 是单位矢量，$\boldsymbol{x}$ 是位置矢量，c 为传播速度。在任意给定时刻 t，$\hat{\boldsymbol{p}} \cdot \boldsymbol{x} =$ 常量的方程代表一个垂直于单位矢量 $\hat{\boldsymbol{p}}$ 的平面。这样，解 ψ_c 就代表一个行进中的平面波，它的等相平面垂直于 $\hat{\boldsymbol{p}}$，而传播速度是 c。相应地，这种情况下的无源

Navier 方程的本征矢量解为

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{L} &= \frac{1}{k_\alpha}\mathrm{grad}\psi_\alpha = -\frac{1}{\alpha k_\alpha}\psi_\alpha{}'\hat{\boldsymbol{p}} \\ \boldsymbol{M} &= \mathrm{curl}(\boldsymbol{k}\psi_\beta) = -\frac{1}{\beta}\psi_\beta{}'(\hat{\boldsymbol{p}}\times\boldsymbol{k}) \\ \boldsymbol{N} &= \frac{1}{k_\beta}\mathrm{curl}\boldsymbol{M} = -\frac{1}{\beta^2 k_\beta}\psi''_\beta[(\hat{\boldsymbol{p}}\times\boldsymbol{k})\times\hat{\boldsymbol{p}}] \end{aligned}\right\} \quad (2.99)$$

这里“′”代表对函数中变量微商。

若将式(2.98)的任意函数取为谐平面波形式 $f(t)=\mathrm{e}^{i\omega t}$，则

$$\begin{aligned} \psi_c(\boldsymbol{x},t) &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-\boldsymbol{k}_c\cdot\boldsymbol{x})} \\ &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}[\omega t-k_c(lx_1+mx_2+nx_3)]} \end{aligned} \quad (2.100)$$

这里

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{k}_c = k_c\hat{\boldsymbol{p}}, \quad k_c = \frac{\omega}{c}, \quad c = \alpha \text{ 或 } \beta \\ &\hat{\boldsymbol{p}} = l\boldsymbol{i} + m\boldsymbol{j} + n\boldsymbol{k}, \quad l^2 + m^2 + n^2 = 1 \end{aligned}\right\} \quad (2.101)$$

$\boldsymbol{k}_c$ 称为传播矢量，它的模 k_c 称为波数。在此特定的谐波情况下，式(2.99)可简化为

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{L} &= -\mathrm{i}\psi_\alpha\hat{\boldsymbol{p}} = -\mathrm{i}(l\boldsymbol{i}+m\boldsymbol{j}+n\boldsymbol{k})\psi_\alpha \\ \boldsymbol{M} &= -\mathrm{i}k_\beta\psi_\beta(\hat{\boldsymbol{p}}\times\boldsymbol{k}) = -\mathrm{i}(m\boldsymbol{i}-l\boldsymbol{j})k_\beta\psi_\beta \\ \boldsymbol{N} &= k_\beta\psi_\beta[(\hat{\boldsymbol{p}}\times\boldsymbol{k})\times\hat{\boldsymbol{p}}] \\ &= [-ln\boldsymbol{i} - mn\boldsymbol{j} + (l^2+m^2)\boldsymbol{k}]k_\beta\psi_\beta \end{aligned}\right\} \quad (2.102)$$

这三个本征矢量是相互垂直的。矢量 $\boldsymbol{L}$ 的位移方向与传播方向一致，以速度 α 传播，这种波称为纵波（P 波）。而矢量 $\boldsymbol{M}$ 和 $\boldsymbol{N}$ 的位移都是垂直传播方向的，它们都以速度 β 传播，这种波为横波（S 波）。

为更好地理解由这些波构成的总的运动，考虑在直角坐标系(x_1,x_2,x_3)中，平面波由原点出发，沿矢量 $\hat{\boldsymbol{p}}$ 方向传播。图 2.1 表示了构成平面波的一些几何参数。观测点 $Q(\boldsymbol{x})$是波阵面上的一点，在给定频率及时刻的情况下，在整个 π 平面上 $\psi_{\alpha,\beta}$＝常量，因而 $\boldsymbol{L}$、$\boldsymbol{M}$、$\boldsymbol{N}$ 在 π 平面上的各点都是相同的。这些矢量分别表示 P、

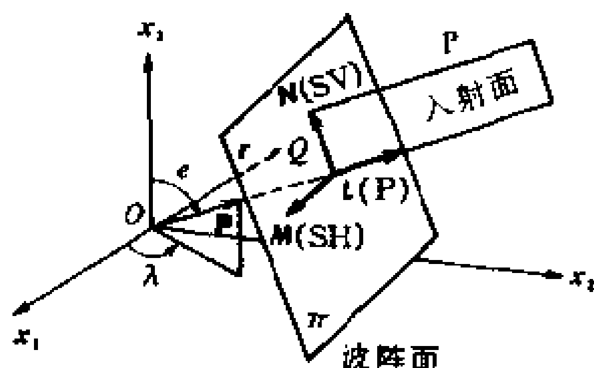


图 2.1 平面波前和 **L**、**M**、**N** 矢量，**L** 垂直于波阵面 π，**N**、**M** 在波阵面上，它们形成右旋系统

SH、和 SV 波运动。绕 x_3 轴转动 λ 角度，使 $\hat{p}$ 落在 x_1-x_3 坐标面内(图 2.2)，则式(2.102)联合式(2.100)变为($m=0$)

$$\left.\begin{aligned}
L &= (l\boldsymbol{i} + n\boldsymbol{k})\exp\left[\mathrm{i}\omega\left(t - \frac{lx_1 + nx_3}{\alpha}\right) - \frac{\mathrm{i}\pi}{2}\right] \\
N &= lk_\beta(n\boldsymbol{i} - l\boldsymbol{k})\exp\left[\mathrm{i}\omega\left(t - \frac{lx_1 + nx_3}{\beta}\right) + \mathrm{i}\pi\right] \\
M &= lk_\beta\boldsymbol{j}\exp\left[\mathrm{i}\omega\left(t - \frac{lx_1 + nx_3}{\beta}\right) + \frac{\mathrm{i}\pi}{2}\right]
\end{aligned}\right\} \quad (2.103)$$

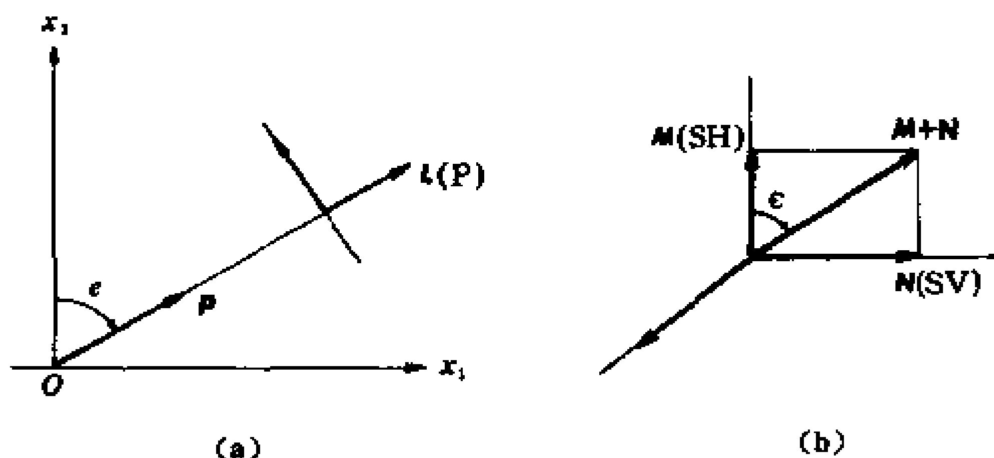


图 2.2 入射平面 x_1-x_3 和偏振角

(a) 与平面纵波有关的矢量；(b) 与平面横波有关的矢量

这里有 $l^2+n^2=1$。可看出，$\boldsymbol{L}$ 和 $\boldsymbol{N}$ 在垂直平面 x_1-x_3 上，而 $\boldsymbol{M}$ 在垂直于平面 x_1-x_3 的水平面上。矢量 $\boldsymbol{L}$ 和 $\boldsymbol{N}$ 构成入射平面。矢量 $\boldsymbol{N}$ 表示一种线性偏振的剪切波在垂直平面上的运动，称为 SV 运动。$\boldsymbol{M}$ 是线性偏振的剪切波在水平面上的运动，称为 SH 运动。矢量 $\boldsymbol{M}$ 与合成矢量 $\boldsymbol{M}+\boldsymbol{N}$ 之间的夹角 ϵ 称为偏振角。而 $\boldsymbol{L}$ 和($\boldsymbol{M}+\boldsymbol{N}$)构成的平面为剪切波的偏振平面。这样，$\boldsymbol{M}$ 没有垂直分量，而 $\boldsymbol{L}$ 和 $\boldsymbol{N}$ 则既有垂直分量也有水平分量。

用式(2.103)及 $\hat{p}=l\boldsymbol{i}+n\boldsymbol{k}$，可将位移场写成 P、SV 和 SH 形式，有

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{u}_{\mathrm{P}}&=A\hat{\boldsymbol{p}}\exp\left[\mathrm{i}\omega\left(t-\frac{\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{x}}{\alpha}\right)\right]\\\boldsymbol{u}_{\mathrm{SV}}&=B(\boldsymbol{j}\times\hat{\boldsymbol{p}})\exp\left[\mathrm{i}\omega\left(t-\frac{\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{x}}{\beta}\right)\right]\\\boldsymbol{u}_{\mathrm{SH}}&=C\boldsymbol{j}\exp\left[\mathrm{i}\omega\left(t-\frac{\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{x}}{\beta}\right)\right]\end{aligned}\right\}\tag{2.104}$$

若 A、B、C 是实数，则只需考虑上面结果的实部，有

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{u}_{\mathrm{P}}&=A\hat{\boldsymbol{p}}\cos\omega\left(t-\frac{\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{x}}{\alpha}\right)\\\boldsymbol{u}_{\mathrm{SV}}&=B(\boldsymbol{j}\times\hat{\boldsymbol{p}})\cos\omega\left(t-\frac{\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{x}}{\beta}\right)\\\boldsymbol{u}_{\mathrm{SH}}&=C\boldsymbol{j}\cos\omega\left(t-\frac{\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{x}}{\beta}\right)\end{aligned}\right\}\tag{2.105}$$

相应的应力分量可表示为

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{ij}(\boldsymbol{u}_{\mathrm{P}})&=\frac{A}{\alpha}\omega(\lambda\delta_{ij}+2\mu l_il_j)\sin\omega\left(t-\frac{l_kx_k}{\alpha}\right)\\\sigma_{ij}(\boldsymbol{u}_{\mathrm{SV}})&=\mu\frac{B}{\beta}\omega[l_i(\boldsymbol{j}\times\hat{\boldsymbol{p}})_j+(\boldsymbol{j}\times\hat{\boldsymbol{p}})_il_j]\sin\omega\left(t-\frac{l_kx_k}{\beta}\right)\\\sigma_{ij}(\boldsymbol{u}_{\mathrm{SH}})&=\mu\frac{C}{\beta}\omega[l_i\delta_{2j}+\delta_{2i}l_j]\sin\omega\left(t-\frac{l_kx_k}{\beta}\right)\end{aligned}\right\}\tag{2.106}$$

§6 平面波、柱面波和球面波之间的关系

我们讨论的地震学问题限于线性弹性力学范围内，因而可利用叠加原理，即将基本解求和或积分可得到一些新的解。例如，若 $\psi=\psi_3(x_1,x_2,x_3;t)$ 满足三维波动方程

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)\psi=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \tag{2.107}$$

则 $\psi=\psi_3(x_1+\xi_1,x_2,x_3;t)$ 也是此方程的解。

如果有

$$\begin{aligned}\psi_2&=\int_{\xi_1=-\infty}^{\xi_1=+\infty}\psi_3(x_1+\xi_1,x_2,x_3;t)\mathrm{d}\xi_1\\&=\int_{\xi=-\infty}^{\xi=+\infty}\psi_3(\xi,x_2,x_3;t)\mathrm{d}\xi\end{aligned} \tag{2.108}$$

则它满足二维波动方程。按此方法，也可得到一维波动方程的解。这些方法基本上用于某些轴对称的波动解的叠加，条件是只要上述积分收敛即可。

反过来，若将不同角度的解叠加得到一个新的解，则它也会满足高一维的波动方程。因而可以借此方法来获得三维柱坐标或三维球坐标情况下的波动方程解。例如，有二维解 $\psi_2=\psi_2(z,x)$，或写成 $\psi_2=\psi_2(z,r\cos\varphi)$，则三维解是

$$\psi_3(z,r,\varphi)=\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\psi_2[z,r\cos(\varphi-\lambda)]g(\lambda)\mathrm{d}\lambda \tag{2.109}$$

式中 $g(\lambda)$是任意权函数。

对 Helmholtz 方程

$$\nabla^2S+k_c^2S=0 \tag{2.110}$$

一维解有 $S_1=\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_c x}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_c r\cos\varphi}$。注意有关系式：$r\cos(\varphi-\lambda)=x\cos\lambda+y\sin\lambda$，则其二维解为

$$S_2=\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_c(x\cos\lambda+y\sin\lambda)}g(\lambda)\mathrm{d}\lambda \tag{2.111}$$

在柱坐标中，我们已得出基本波函数式(2.44)，再加上时间因子，有

$$e^{i\omega t}\Phi_m^{\pm}(k_c r) = e^{im\varphi}J_m(kr)e^{i\omega t \pm \nu_c z} \tag{2.112}$$

式中 $\nu_c = \sqrt{k^2 - k_c^2}$，这是柱面驻波形式，它也代表在 z 轴方向传播的等相面中的平面波，传播速度是 $\omega/\mathrm{Re}\sqrt{k_c^2 - k^2}$，在等相面上波的幅度与 r 和 φ 有关。式(2.112)也可分解为平面波表达。为了说

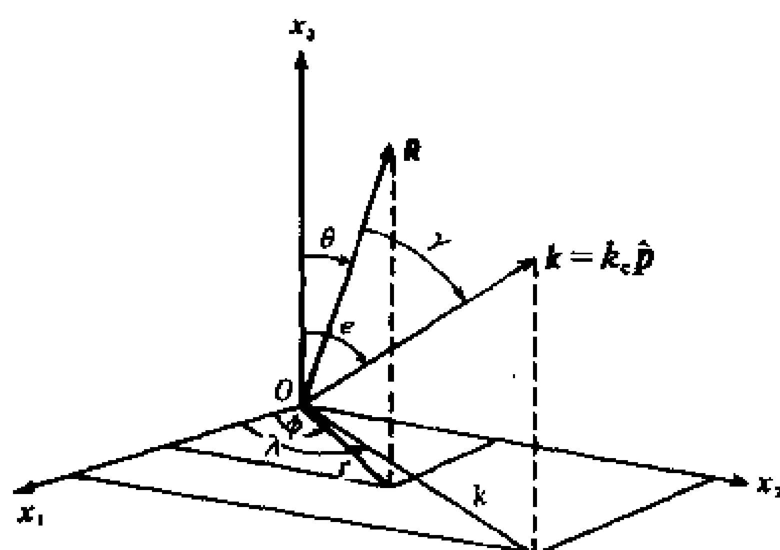


图 2.3 球坐标系及波数空间中的对应坐标

(k_c, e, λ) $(R = r\sin\theta, \quad k = k_c \sin e)$

明这点，参看图 2.3，且首先注意到

$$e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} = e^{-i[k_c r\sin e\cos(\varphi-\lambda) + k_c z\cos e]}$$

$$= e^{-ikr\cos(\varphi-\lambda) \pm \nu_c z} \tag{2.113}$$

其中

$$\boldsymbol{k} = k_c\hat{\boldsymbol{p}} = k_c(\sin e\cos\lambda\boldsymbol{i} + \sin e\sin\lambda\boldsymbol{j} + \cos e\boldsymbol{k}) \tag{2.114}$$

$$\sin e = \frac{k}{k_c}, \cos e = \frac{1}{k_c}\sqrt{k_c^2 - k^2} = \pm\frac{i\nu_c}{k_c}, \nu_c = \sqrt{k^2 - k_c^2}。$$

用 $\exp(i\zeta\sin\alpha)$ 的 Fourier 级数展开式，即

$$e^{i\zeta\sin\alpha} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(\zeta)e^{im\alpha} \tag{2.115}$$

$$J(\zeta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(\zeta\sin\alpha - m\alpha)}d\alpha \tag{2.116}$$

因而可推得

$$e^{ikr\sin(\varphi-\lambda-\frac{\pi}{2})} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(kr)e^{im(\varphi-\lambda-\frac{\pi}{2})} \tag{2.117}$$

$$J_m(kr) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i[kr\sin(\varphi-\lambda-\frac{\pi}{2})-m(\varphi-\lambda-\frac{\pi}{2})]}d\lambda \tag{2.118}$$

将它们代入式(2.113)中，有

$$e^{-ik\cdot x} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(kr)e^{im(\varphi-\lambda-\frac{\pi}{2})\pm\nu_c z} \tag{2.119}$$

$$J_m(kr)e^{im\varphi\pm\nu_c z} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(-k\cdot x+m\frac{\pi}{2}+m\lambda)}d\lambda \tag{2.120}$$

将式(2.112)代入式(2.119)，最后有

$$e^{-ik\cdot x} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{g_m(\lambda)})\Phi_m^{\pm}(k_c r) \tag{2.121}$$

$$\Phi_m^{\pm}(k_c r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g_m(\lambda)e^{-ik\cdot x}d\lambda \tag{2.122}$$

其中
$$g_m(\lambda) = \exp\left[im\left(\lambda+\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

式(2.121)表示平面波可以看成由无数多个柱面驻波叠加而成，而式(2.112)表示柱面驻波可由平面波叠加而成，这些平面波在原点的传播方向形成一个圆锥，x_3 轴是圆锥轴，圆锥角为 $2e$。

上述推导的是平面波与柱面波之间的关系；下面推导平面波与球面波之间的关系。

已知
$$e^{-ik\cdot x} = e^{-ik_c R\cos\gamma} \tag{2.123}$$

这里 γ 是传播矢量与半径矢量之间的夹角(图 2.3)，它为

$$\cos\gamma = \cos\theta\cos e + \sin\theta\sin e\cos(\varphi-\lambda) \tag{2.124}$$

当 k_c 和 x 给定后，$\exp(-ik\cdot x)$只是两个角度 e 和 λ 的函数，因而可将它展成一个收敛的球面调和级数，即有

$$e^{-ik_c R\cos\gamma} = \sum_{l=0}^{\infty}(-i)^l(2l+1)j_l(k_c R)P_l(\cos\gamma) \quad (2.125)$$

式中 $j_l(k_c R)$ 是第一类球 Bessel 函数。Legendre 函数可表示为

$$P_l(\cos\gamma) = \sum_{m=-l}^{l}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}Y_{ml}(\theta,\varphi)Y_{ml}^{*}(e,\lambda) \quad (2.126)$$

将它代入式(2.125)，有

$$e^{-ik_c R\cos\gamma} = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}(-i)^l(2l+1)\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\Phi_{ml}^{+}(k_c R)Y_{ml}^{*}(e,\lambda)$$

$$(2.127)$$

其中 $\Phi_{ml}^{+}(k_c R)$ 是球状波函数，为

$$\Phi_{ml}^{+}(k_c R) = j_l(k_c R)P_l^m(\cos\theta)e^{im\varphi} \quad (2.128)$$

对式(2.127)两边乘以 $\sin e\, Y_{m'l'}(e,\lambda)$，再对 e 在 $0\leqslant e\leqslant\pi$ 的范围内积分，对 λ 在 $0\leqslant\lambda\leqslant 2\pi$ 内积分，并考虑如下正交关系：

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}Y_{m'l'}(e,\lambda)Y_{ml}^{*}(e,\lambda)\sin e\, de\, d\lambda = \delta_{mm'}\delta_{ll'}\Omega_{ml} \quad (2.129)$$

则可得到

$$4\pi(-i)^l\Phi_{ml}^{+}(k_c R) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}e^{-ik_c R\cos\gamma}Y_{ml}(e,\lambda)\sin e\, de\, d\lambda \quad (2.130)$$

总结上述推导步骤，式(2.123)的最后形式为

$$e^{-ik\cdot x} = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\left[(-i)^l(2l+1)\frac{(l-m)!}{(l+m)!}Y_{ml}^{*}(e,\lambda)\right]\Phi_{ml}^{+}(k_c R)$$

$$(2.131)$$

$$\Phi_{ml}^{+}(k_c R) = \frac{i^l}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}Y_{ml}(e,\lambda)e^{-ik\cdot x}\sin e\, de\, d\lambda \quad (2.132)$$

这一对公式中，式(2.131)表示平面波可以认为是由球面驻波叠加而成；而式(2.132)则表示球面驻波是空间中由向所有方向传播的平面波叠加而成。

习题与思考题

1. 试述矢量 Helmholtz 方程的分离变量的条件。

2. 试求一维、二维场的 Hansen 本征矢量值。

3. 用三维场中的矢量调和函数 $\boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{B}$ 表征 P、SV、SH 波位移。

第三章　震源的表象

一般认为，构造地震，特别是浅源地震的震源形成机理表明了地球内部的断裂过程。对于均匀的弹性介质，本章描述集中力、偶极力点源与位错源的等效原理，具体给出地震波位移的Green函数解。这是地震学的正演问题。

§1　集中力点源及理论地震图

对于均匀各向同性的弹性介质，在体力 $\boldsymbol{X}$ 作用下，地震波位移 $\boldsymbol{u}$ 所符合的动力学方程为Navier方程（2.79），重写如下：

$$\alpha^2 \nabla \nabla \cdot \boldsymbol{u} - \beta^2 \nabla \times \nabla \times \boldsymbol{u} + \boldsymbol{X} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2} \tag{3.1}$$

式中 α 和 β 分别为P、S波的传播速度。

若力 $\boldsymbol{X}$ 的大小为 $X_0(t)$，作用在点 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\xi}$ 上，则可定义集中力为

$$\rho \boldsymbol{X} = \hat{\boldsymbol{x}} X_0 g(t) \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}) \tag{3.2}$$

式中 ρ 为密度，$X_0 g(t) = X(t)$，$g(t)$ 为无量纲的时间函数，$\hat{\boldsymbol{x}}$ 为单位矢量。这样的震源称为集中点源。

对方程(3.1)作Fourier变换，得到频率域的运动方程为

$$\begin{aligned} &\alpha^2 \nabla \nabla \cdot \boldsymbol{u} - \beta^2 \nabla \times \nabla \times \boldsymbol{u} + \omega^2 \boldsymbol{u} \\ &= - \hat{\boldsymbol{x}} \frac{X_0 g(\omega)}{\rho} \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}) \end{aligned} \tag{3.3}$$

式中 $X_0 g(\omega) = X(\omega)$，它是 $X(t)$ 的Fourier谱函数。注意到

$$\hat{\boldsymbol{x}} \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}) = - \frac{\hat{\boldsymbol{x}}}{4\pi} \nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right)$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\left[\nabla\nabla\cdot\left(\frac{\hat{\boldsymbol{x}}}{r}\right) - \nabla\times\nabla\times\left(\frac{\hat{\boldsymbol{x}}}{r}\right)\right]$$

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi},\quad r = |\boldsymbol{r}| = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}|,$$

可设方程(3.3)的解为

$$\boldsymbol{u} = X(\omega)[\nabla\nabla\cdot(\hat{\boldsymbol{x}}s_\alpha) - \nabla\times\nabla\times(\hat{\boldsymbol{x}}s_\beta)] \tag{3.4}$$

式中 s_α 和 s_β 分别满足方程

$$\nabla^2 s_\alpha + k_\alpha^2 s_\alpha = \frac{1}{4\pi\alpha^2\rho r},\quad \nabla^2 s_\beta + k_\beta^2 s_\beta = \frac{1}{4\pi\beta^2\rho r} \tag{3.5}$$

这里 $k_\alpha = \frac{\omega}{\alpha}, k_\beta = \frac{\omega}{\beta}$；且 $s_\alpha(0,\omega) = 0, s_\beta(0,\omega) = 0$。那么，式(3.5)的特解为

$$s_\alpha(r,\omega) = \frac{1}{4\pi\omega^2\rho}\left(\frac{1 - e^{-ik_\alpha r}}{r}\right),\ s_\beta(r,\omega) = \frac{1}{4\pi\omega^2\rho}\left(\frac{1 - e^{-ik_\beta r}}{r}\right)$$

并注意到

$$(\nabla^2 + k_c^2)\left(\frac{e^{-ik_c r}}{r}\right) = -4\pi\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi})$$

于是，得到运动方程(3.3)的解为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u} &= \frac{X_0 g(\omega)}{4\pi\rho\omega^2}\left[\nabla\times\nabla\times\left(\mathbf{I}\frac{e^{-ik_\beta r}}{r}\right) - \nabla\nabla\cdot\left(\mathbf{I}\frac{e^{-ik_\alpha r}}{r}\right)\right]\hat{\boldsymbol{x}} \\ &= X_0 g(\omega)\mathbf{G}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\xi},\omega)\hat{\boldsymbol{x}}\end{aligned} \tag{3.6}$$

式中格林谱函数二阶张量为

$$\mathbf{G}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\xi},\omega) = \frac{1}{4\pi\rho\omega^2}\left[\nabla\times\nabla\times\left(\mathbf{I}\frac{e^{-ik_\beta r}}{r}\right) - \nabla\nabla\cdot\left(\mathbf{I}\frac{e^{-ik_\alpha r}}{r}\right)\right] \tag{3.7}$$

式中 $\mathbf{I}$ 为二阶单位张量。格林谱函数张量满足方程

$$\rho\alpha^2\nabla\nabla\cdot\mathbf{G} - \rho\beta^2\nabla\times\nabla\times\mathbf{G} + \rho\omega^2\mathbf{G} = -\mathbf{I}\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}) \tag{3.8}$$

注意到 $\nabla\cdot(\mathbf{I}\varphi) = \nabla\varphi, \nabla\times(\mathbf{I}\varphi) = (\nabla\varphi)\times\mathbf{I}$，则从式(3.7)直接得出

$$\nabla\cdot\mathbf{G} = \frac{1}{4\pi(\lambda + 2\mu)}\nabla\left(\frac{e^{-ik_\alpha r}}{r}\right) \tag{3.9}$$

$$\nabla \times \mathbf{G} = \frac{1}{4\pi\mu}\left[\nabla\left(\frac{e^{ik_\beta r}}{r}\right) \times \mathbf{I}\right] \tag{3.10}$$

给出

$$f(t) = g(t) * tH(t) = \int_{-\infty}^{t} g(\tau)(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$ （$H(t)$ 为阶跃函数）

并利用 Fourier 变换式

$$g(t) * tH(t) \Longleftrightarrow \omega^{-2} f(\omega)$$

$$g(t - \frac{r}{\alpha}) \Longleftrightarrow g(\omega)e^{-ik_\alpha r}$$

作式(3.6)的 Fourier 反变换，可求得时间域的位移解为

$$\begin{aligned} u(x,t) = & \frac{X_0}{4\pi\rho}\left\{\nabla\nabla \cdot \left[\frac{\hat{x}}{r}f\left(t-\frac{r}{\alpha}\right)\right] - \right. \\ & \left. \nabla \times \nabla \times \left[\frac{\hat{x}}{r}f\left(t-\frac{r}{\beta}\right)\right]\right\} \\ = & \frac{X_0}{4\pi\rho}\left\{\nabla\nabla \cdot \left[\frac{\hat{x}}{r}f\left(t-\frac{r}{\alpha}\right) - \frac{\hat{x}}{r}f\left(t-\frac{r}{\beta}\right)\right] + \right. \\ & \left. \nabla^2\left[\frac{\hat{x}}{r}f\left(t-\frac{r}{\beta}\right)\right]\right\} \end{aligned} \tag{3.11}$$

利用关系式

$$\begin{cases} \nabla\nabla \cdot \left[\frac{\hat{x}}{r}g\left(t-\frac{r}{\alpha}\right)\right] = \frac{r \cdot (r \cdot \hat{x})}{\alpha^2 r^3}g\left(t-\frac{r}{\alpha}\right) + \\ \qquad \left[3\frac{r(r \cdot \hat{x})}{r^5} - \frac{\hat{x}}{r^3}\right]\left[f\left(t-\frac{r}{\alpha}\right) + \frac{r}{\alpha}f'\left(t-\frac{r}{\alpha}\right)\right] \\ \nabla^2\left[\frac{\hat{x}}{r}f\left(t-\frac{r}{\beta}\right)\right] = \frac{\hat{x}}{\beta^2 r}\frac{\partial^2}{\partial t^2}f\left(t-\frac{r}{\beta}\right) = \frac{\hat{x}}{\beta^2 r}g\left(t-\frac{r}{\beta}\right) \end{cases}$$

式(3.11)又可写成

$$\begin{aligned} u = & \frac{X_0}{4\pi\rho}\left\{\frac{r(r \cdot \hat{x})}{r^3}\left[\frac{1}{\alpha^2}g\left(t-\frac{r}{\alpha}\right) - \frac{1}{\beta^2}g\left(t-\frac{r}{\beta}\right)\right] + \right. \\ & \frac{\hat{x}}{\beta^2 r}g\left(t-\frac{r}{\beta}\right) + \left[3\frac{r(r \cdot \hat{x})}{r^5} - \frac{\hat{x}}{r^3}\right] \cdot \end{aligned}$$

$$\left[f\left(t-\frac{r}{\alpha}\right)+\frac{r}{\alpha}f'\left(t-\frac{r}{\alpha}\right)-\right.$$

$$\left.f\left(t-\frac{r}{\beta}\right)-\frac{r}{\beta}f'\left(t-\frac{r}{\beta}\right)\right]\Bigg\} \tag{3.12}$$

再利用关系式

$$f\left(t-\frac{r}{\alpha}\right)+\frac{r}{\alpha}f'\left(t-\frac{r}{\alpha}\right)=\int_{r/\alpha}^{\infty}g(t-\tau)\tau\mathrm{d}\tau \tag{3.13}$$

那么，式(3.12)变成

$$\boldsymbol{u}=\frac{X_0}{4\pi\rho r}\left\{\frac{\boldsymbol{r}(\boldsymbol{r}\cdot\hat{\boldsymbol{x}})}{r^2}\left[\frac{1}{\alpha^2}g\left(t-\frac{r}{\alpha}\right)-\frac{1}{\beta^2}g\left(t-\frac{r}{\beta}\right)\right]+\right.$$

$$\left.\frac{\hat{\boldsymbol{x}}}{\beta^2}g\left(t-\frac{r}{\beta}\right)+\left[3\frac{\boldsymbol{r}(\boldsymbol{r}\cdot\hat{\boldsymbol{x}})}{r^4}-\frac{\hat{\boldsymbol{x}}}{r^2}\right]\int_{r/\alpha}^{r/\beta}g(t-\tau)\tau\mathrm{d}\tau\right\}$$

$$=X_0*\mathbf{G}(\boldsymbol{x}|\xi,t)\hat{x} \tag{3.14}$$

式中

$$\mathbf{G}(x|\xi,t)=\frac{1}{4\pi\rho r}\left\{\frac{\boldsymbol{r}\,\boldsymbol{r}}{r^2}\left[\frac{1}{\alpha^2}g\left(t-\frac{r}{\alpha}\right)-\frac{1}{\beta^2}g\left(t-\frac{r}{\beta}\right)\right]+\right.$$

$$\left.\frac{\mathbf{I}}{\beta^2}g\left(t-\frac{r}{\beta}\right)+\left[3\frac{\boldsymbol{r}\,\boldsymbol{r}}{r^4}-\frac{\mathbf{I}}{r^2}\right]\int_{r/\alpha}^{r/\beta}g(t-\tau)\tau\mathrm{d}\tau\right\} \tag{3.15}$$

式(3.14)为在无限介质中的集中力 $X(t)$产生的地震图，为纵波与横波位移的叠加。显然，$\mathbf{G}$ 为二阶张量，其分量形式为 G_{ij}，表示在 Q 处作用在 x_j 方向的单位集中力在观测点 P 处产生的 x_i 方向的位移，它满足互易关系 $G_{ij}(P,Q)=G_{ji}(P,Q)=G_{ij}(Q,P)$，那么，集中力 $X_0(t)=X_0g(t)$产生的位移分量为

$$u_i^j(P,Q;t)=\frac{X_0}{4\pi\rho}\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial x_i}\frac{\partial r}{\partial x_j}\left[\frac{1}{\alpha^2}g\left(t-\frac{r}{\alpha}\right)-\frac{1}{\beta^2}g\left(t-\frac{r}{\beta}\right)\right]\right.$$

$$\left.+\delta_{ij}\frac{1}{\beta^2 r}g\left(t-\frac{r}{\beta}\right)+\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\left(\frac{1}{r}\right)\int_{r/\alpha}^{r/\beta}g(t-\tau)\tau\mathrm{d}\tau\right\} \tag{3.16}$$

式中 $\boldsymbol{r}$ 的方向余弦$\frac{\partial r}{\partial x_i}=\frac{x_i}{r}$，且$\nabla\nabla\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{3\boldsymbol{rr}}{r^5}-\frac{\mathbf{I}}{r^3}$。

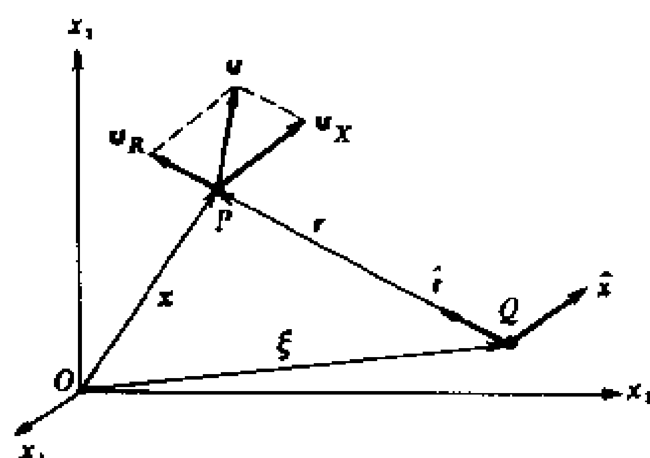


图 3.1 震源—观测点坐标系

将式(3.14)表示的位移分成沿集中力 $\hat{x}$ 方向的位移 u_X 及沿 $\hat{r}$ 方向的位移 u_R(图 3.1),即

$$u = \hat{x}u_X + \hat{r}u_R \tag{3.17}$$

这里

$$\left.\begin{aligned} u_X &= \frac{X_0}{4\pi\mu r}\left[g\left(t-\frac{r}{\beta}\right)-\frac{\beta^2}{r^2}\int_{r/\alpha}^{r/\beta}g(t-\tau)\tau\mathrm{d}\tau\right] \\ u_R &= \frac{X_0(\hat{r}\cdot\hat{x})}{4\pi\mu r}\left[\frac{\beta^2}{\alpha^2}g\left(t-\frac{r}{\alpha}\right)-g\left(t-\frac{r}{\beta}\right)+\right. \\ &\left.\frac{3\beta^2}{r^2}\int_{r/\alpha}^{r/\beta}g(t-\tau)\tau\mathrm{d}\tau\right] \end{aligned}\right\} \tag{3.18}$$

当 $t\to\infty$ 时,$g(t)\to\bar{g}$(定值),则

$$\left.\begin{aligned} u_X &= \frac{X_0\bar{g}}{8\pi\mu r}\left(1+\frac{\beta^2}{\alpha^2}\right) \\ u_R &= \frac{X_0\bar{g}(\hat{r}\cdot\hat{x})}{8\pi\mu r}\left(1-\frac{\beta^2}{\alpha^2}\right) \end{aligned}\right\} \tag{3.19}$$

可看出，对于给定的介质，位移状况取决于时间函数 $g(t)$。

若 $g(t)=H(t)$，则有

$$u_X=\begin{cases}0 & \left(t<\dfrac{r}{\alpha}\right)\\ -\dfrac{X_0}{8\pi\rho r^3}\left(t^2-\dfrac{r^2}{\alpha^2}\right) & \left(\dfrac{r}{\alpha}<t<\dfrac{r}{\beta}\right)\\ \dfrac{X_0}{8\pi\mu r}\left(1+\dfrac{\beta^2}{\alpha^2}\right) & \left(t>\dfrac{r}{\beta}\right)\end{cases} \tag{3.20}$$

$$u_R=\begin{cases}0 & \left(t<\dfrac{r}{\alpha}\right)\\ \dfrac{X_0(\hat{r}\cdot\hat{x})}{4\pi\rho r}\left[\dfrac{1}{\alpha^2}+\dfrac{3}{2r^2}\left(t^2-\dfrac{r^2}{\alpha^2}\right)\right] & \left(\dfrac{r}{\alpha}<t<\dfrac{r}{\beta}\right)\\ \dfrac{X_0(\hat{r}\cdot\hat{x})}{8\pi\mu r}\left(1-\dfrac{\beta^2}{\alpha^2}\right) & \left(t>\dfrac{r}{\beta}\right)\end{cases} \tag{3.21}$$

对于给定的源—观测点的距离 r，位移 $\left(\dfrac{4\pi\mu r}{X_0}\right)u_X$ 及 $\left(\dfrac{4\pi\mu r}{X_0(\hat{r}\cdot\hat{x})}\right)u_R$ 随无量纲时间 $(\beta/r)t$ 的变化状况如图 3.2 及图 3.3 所示。从图中可看出位移起始脉冲 ABC 随时间变化的图象。

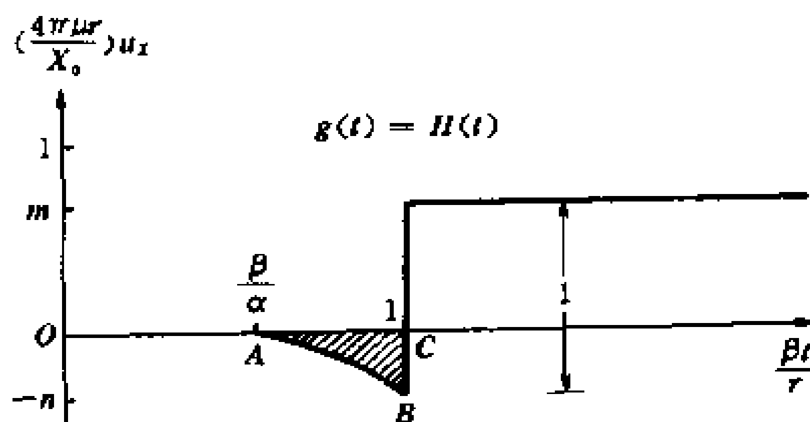


图 3.2　u_X-t 变化图

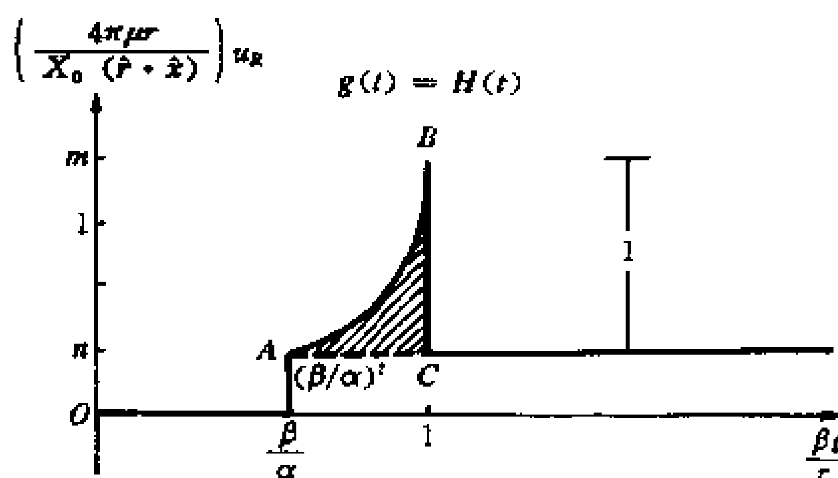


图 3.3　u_R-t 变化图

当只有水平作用力时，如 X_0 作用在原点 x 方向，$r=\Delta$（震中距），则有（图 3.4 及图 3.5）。

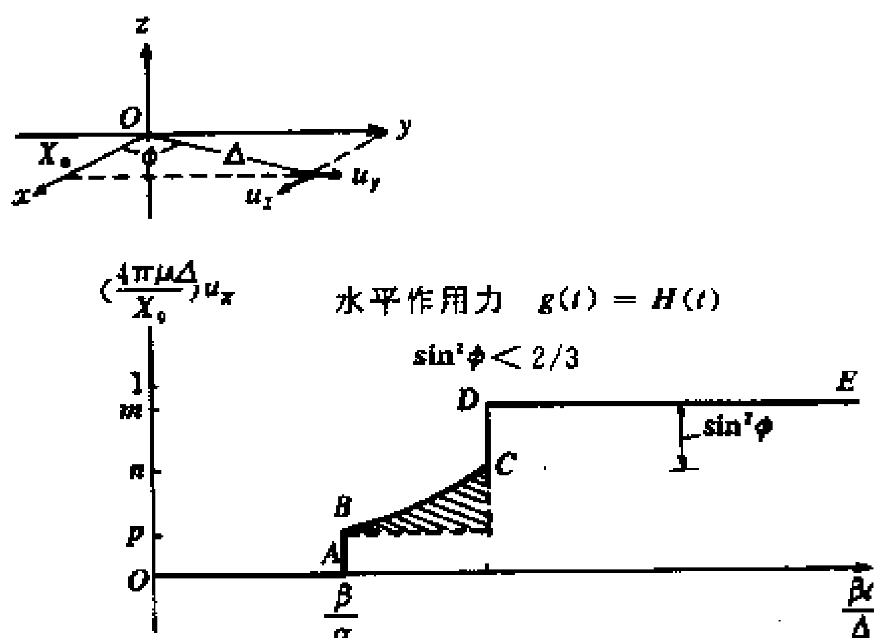


图 3.4　水平作用时 u_x-t 变化图 $(\sin^2\varphi < \frac{2}{3})$

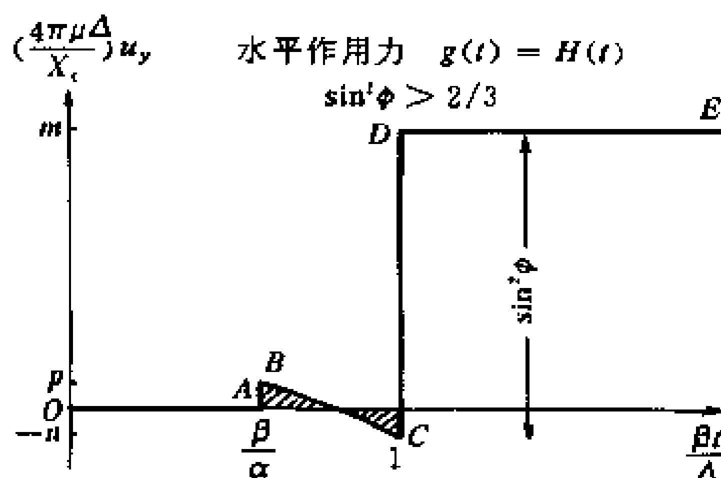


图 3.5 水平作用时 u_y-t 变化图 $(\sin^2\varphi > \frac{2}{3})$

$$
\left.
\begin{aligned}
&u_x = \begin{cases}
0 & \left(t < \dfrac{\Delta}{\alpha}\right) \\[2mm]
\dfrac{X_0}{4\pi\rho\Delta}\left[\dfrac{2 - 3\sin^2\varphi}{2\Delta^2}\left(t^2 - \dfrac{\Delta^2}{\alpha^2}\right) + \dfrac{\cos^2\varphi}{\alpha^2}\right] & \left(\dfrac{\Delta}{\alpha} < t < \dfrac{\Delta}{\beta}\right) \\[2mm]
\dfrac{X_0}{4\pi\mu\Delta}\left[1 - \left(\dfrac{1}{2}\sin^2\varphi\right)\left(1 - \dfrac{\beta^2}{\alpha^2}\right)\right] & \left(t > \dfrac{\Delta}{\beta}\right)
\end{cases} \\
&u_y = \begin{cases}
0 & \left(t > \dfrac{\Delta}{\alpha}\right) \\[2mm]
\dfrac{X_0}{8\pi\rho\Delta}\sin 2\varphi\left[\dfrac{1}{\alpha^2} + \dfrac{3}{2\Delta^2}\left(t^2 - \dfrac{\Delta^2}{\alpha^2}\right)\right] & \left(\dfrac{\Delta}{\alpha} < t < \dfrac{\Delta}{\beta}\right) \\[2mm]
-\dfrac{X_0}{16\pi\mu\Delta}\sin 2\varphi\left(1 - \dfrac{\beta^2}{\alpha^2}\right) & \left(t > \dfrac{\Delta}{\beta}\right)
\end{cases} \\
&u_z = 0
\end{aligned}
\right\}
\tag{3.22}
$$

在地震学中，这类地震波位移随时间变化的图示，称为理论地震图。利用矢量 $\boldsymbol{r}$ 的方向余弦 $\nu_i = \frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r}$，式(3.16)又可写成集中力在 x_j 方向作用：

$$
u_i(\boldsymbol{x}, t) = X_0(t) * G_{ij} = \frac{X_0}{4\pi\rho}(3\nu_i\nu_j - \delta_{ij})\frac{1}{r^3}\int_{r/\alpha}^{r/\beta}\tau g(t - \tau)\mathrm{d}\tau + \frac{X_0}{4\pi\rho\alpha^2}\nu_i\nu_j\frac{1}{r}g\left(t - \frac{r}{\alpha}\right)
$$

$$-\frac{X_0}{4\pi\rho\beta^2}(\nu_i\nu_j-\delta_{ij})\frac{1}{r}g\left(t-\frac{r}{\beta}\right) \tag{3.23}$$

按接收点离点源距离 r 的远近，可将位移分为两部分，即近场部分和远场部分。从公式(3.23)可看出，远场部分明显地分为 P、S 场，因此，观测点 P 的位移一般可表示为：

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)=\boldsymbol{u}^{N}+\boldsymbol{u}^{FP}+\boldsymbol{u}^{FS}$$

下面分别分析它们的特征：

(1) 远场 P 波位移 $\boldsymbol{u}^{FP}$ 的特征：

因
$$u_i^{FP}(\boldsymbol{x},t)=\frac{X_0}{4\pi\rho\alpha^2}\nu_i\nu_j\frac{1}{r}g\left(t-\frac{r}{\alpha}\right) \tag{3.24}$$

P 波沿着从点源算起的 $\boldsymbol{\nu}$ 方向传播，有如下性质：

① 以 r^{-1} 方式作几何扩散。

② 波的传播速度为 α，波形依赖于时间函数的延迟值 $g(t-\frac{r}{\alpha})$。

③ 在延迟时间内，波形幅度比例于作用力 X_0。

④ 位移 $\boldsymbol{u}^{FP}$ 的方向平行于 $\boldsymbol{\nu}$(因 $\boldsymbol{u}^{FP}\times\boldsymbol{\nu}=0$)，表示远场 P 波位移是纵向的，其质点运动方向与传播方向一致。

(2) 远场 S 波位移 $\boldsymbol{u}^{FS}$ 的特征：

因
$$u_i^{FS}(\boldsymbol{x},t)=\frac{X_0}{4\pi\rho\beta^2}(\delta_{ij}-\nu_i\nu_j)\frac{1}{r}g\left(t-\frac{r}{\beta}\right) \tag{3.25}$$

S 波亦沿 $\boldsymbol{\nu}$ 方向传播，有如下性质：

① 以 r^{-1} 方式作几何扩散。

② 波的传播速度为 β，波形依赖于时间函数的延迟值 $g(t-\frac{r}{\beta})$。

③ 在延迟时间内，波形幅度比例于作用力 X_0。

④ 位移 $\boldsymbol{u}^{FS}$ 的方向垂直于 $\boldsymbol{\nu}$(因 $\boldsymbol{u}^{FS}\cdot\boldsymbol{\nu}=0$)，表示远场 S 波位移引起的质点运动方向与传播方向相垂直。

下面讨论 $\boldsymbol{u}^{FP}$ 和 $\boldsymbol{u}^{FS}$ 随方位的变化。

当作用力沿 x_3 方向时，位移的球坐标分量为：

$$\left.\begin{aligned} u_r &= \frac{X_0\cos\theta}{4\pi\rho r}\left[\frac{2}{r^2}\int_{r/\alpha}^{r/\beta}\tau g(t-\tau)\mathrm{d}\tau + \frac{1}{\alpha^2}g\left(t-\frac{r}{\alpha}\right)\right] \\ u_\theta &= \frac{X_0\sin\theta}{4\pi\rho r}\left[\frac{1}{r^2}\int_{r/\alpha}^{r/\beta}\tau g(t-\tau)\mathrm{d}\tau - \frac{1}{\beta^2}g\left(t-\frac{r}{\beta}\right)\right] \\ u_\varphi &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{3.26}$$

此时，$\boldsymbol{u}^{\mathrm{P}}=(u_r,0,0)$，$\boldsymbol{u}^{\mathrm{S}}=(0,u_\theta,0)$。其远场位移分量为：

$$\left.\begin{aligned} u_r &= \frac{X_0\cos\theta}{4\pi(\lambda+2\mu)r}g\left(t-\frac{r}{\alpha}\right) \\ u_\theta &= -\frac{X_0\sin\theta}{4\pi\mu r}g\left(t-\frac{r}{\beta}\right) \\ u_\varphi &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{3.27}$$

$\boldsymbol{u}^{\mathrm{FP}}$和$\boldsymbol{u}^{\mathrm{FS}}$随$(r,\theta)$变化的辐射图案见图 3.6，图中$\nu'\perp\nu$。从图中可看出，$\boldsymbol{u}^{\mathrm{FS}}$有轴对称特征。

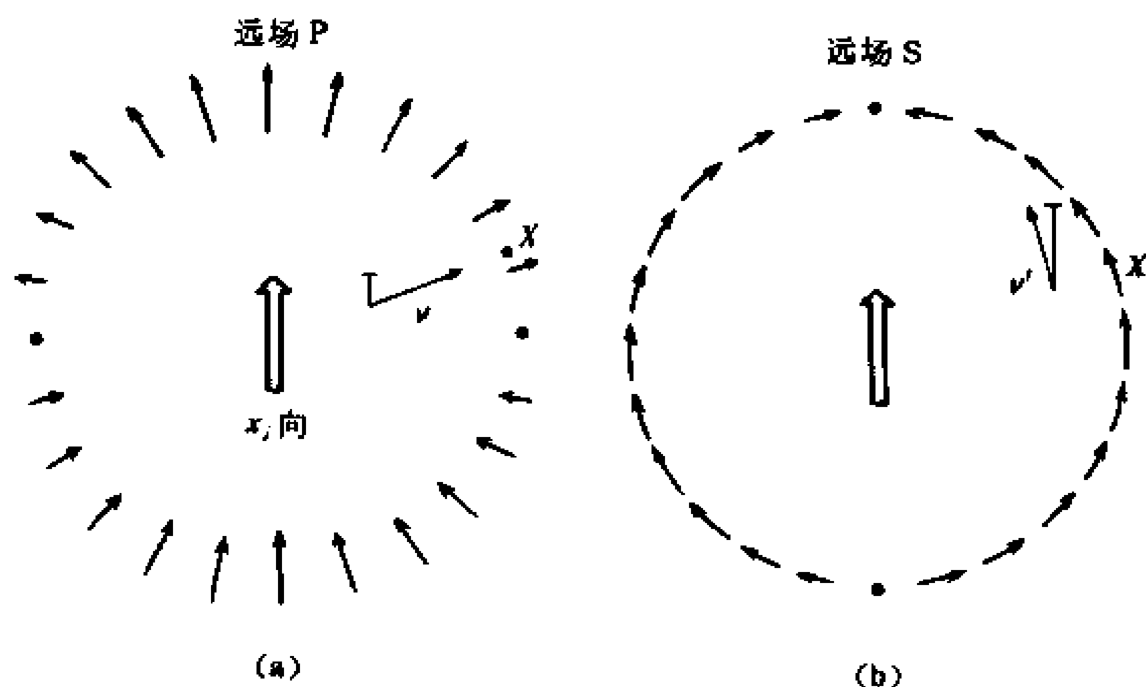


图 3.6　$\boldsymbol{u}^{\mathrm{FP}}$(a)和 $\boldsymbol{u}^{\mathrm{FS}}$(b)辐射图案

(3) 近场位移项 $\boldsymbol{u}^{\mathrm{N}}$ 的特征：

因 $$u_i^N(\boldsymbol{x},t)=\frac{X_0}{4\pi\rho}(3\nu_i\nu_j-\delta_{ij})\frac{1}{r^3}\int_{r/\alpha}^{r/\beta}\tau g(t-\tau)\mathrm{d}\tau \quad (3.28)$$

它由P、S波共同组合而成，有如下性质：

① 在震源时间函数给定的情况下，以 r^{-2}方式作几何扩散。

② 波形依赖于延迟时间 $t-\tau$。

③ 波形幅度依赖于 X_0，只要 X_0 不为零，近场项就一直存在。

④ 近场位移不显含P、S波成分，但也可分出纵、横两分量。如下表示：

$$\boldsymbol{u}^N\cdot\boldsymbol{\nu}=\nu_j\frac{X_0}{2\pi\rho r^3}\int_{r/\alpha}^{r/\beta}\tau g(t-\tau)\mathrm{d}\tau \quad (3.29)$$

此为 $\boldsymbol{u}^N$ 的纵向分量 $\boldsymbol{u}^{NP}$。

$$\boldsymbol{u}^N\cdot\boldsymbol{\nu}'=-\nu'_j\frac{X_0}{4\pi\rho r^3}\int_{r/\alpha}^{r/\beta}\tau g(t-\tau)\mathrm{d}\tau \quad (3.30)$$

此为 $\boldsymbol{u}^N$ 的横向分量 $\boldsymbol{u}^{NS}$。

§2 力偶点源

现在考虑作用在点 $Q_1\left(\xi+\frac{\epsilon}{2}\hat{\nu}\right)$ 和点 $Q_2\left(\xi-\frac{\epsilon}{2}\hat{\nu}\right)$ 上强度相同，但方向相反的一对力，见图 3.7。其中，ϵ 为线段 Q_1Q_2 的长度，$\nu(\xi)$为 Q_2Q_1方向的单位矢量，两个力的大小都为 X_0，方向分别为 $\hat{x}$ 和 $-\hat{x}$。按式(3.6)的原理，可知它们在 P 点产生的合位移为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})&=X_0\left[\mathbf{G}\left(\boldsymbol{x}|\xi+\frac{\epsilon}{2}\hat{\nu}\right)-\mathbf{G}\left(\boldsymbol{x}|\xi-\frac{\epsilon}{2}\hat{\nu}\right)\right]\cdot\hat{\boldsymbol{x}}\\&=X_0\epsilon[(\hat{\nu}\cdot\nabla)\mathbf{G}(\boldsymbol{x}|\xi)\cdot\hat{\boldsymbol{x}}+O(\epsilon^2)]\end{aligned} \quad (3.31)$$

在 $X_0\to\infty,\epsilon\to 0$ 的极限情况下，$X_0\epsilon\to M$，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})&=M\hat{\nu}\cdot\nabla\mathbf{G}(\boldsymbol{x}|\xi)\cdot\hat{\boldsymbol{x}}\\&=M(\hat{x}\hat{\nu})\cdot\nabla\mathbf{G}(\boldsymbol{x}|\xi)\end{aligned} \quad (3.32)$$

式中量 M 称为力偶点源的矩。式(3.32)为力偶点源 Q 在观测

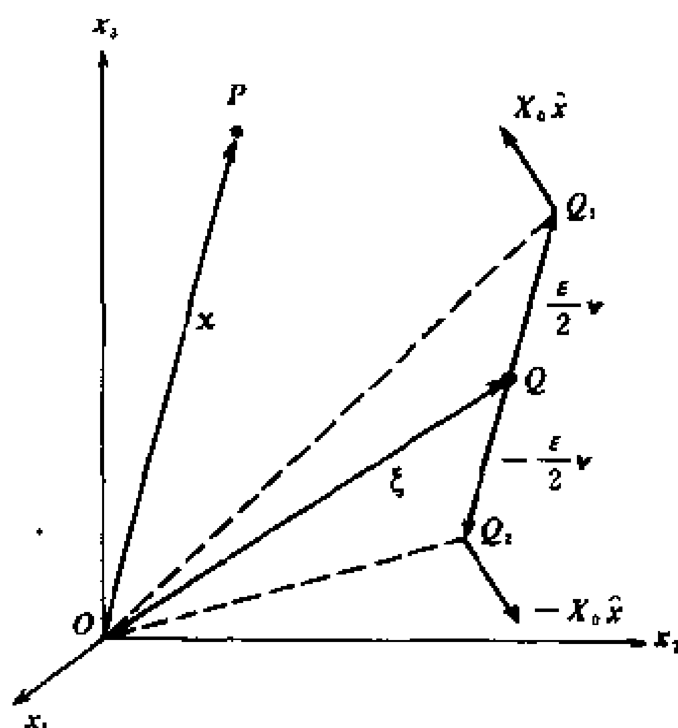


图 3.7　力偶点源几何图形

点 P 产生的位移公式。将 $\nabla\mathbf{G}(\boldsymbol{x}\mid\xi)$ 写成分量形式为 $G_{ij,k}=\frac{\partial}{\partial x_k}G_{ij}(P,Q)$，则位移表示为

$$u_i(\boldsymbol{x}) = M_{jk}G_{ij,k} \tag{3.33}$$

基本的力偶点源有两种形式：当 $\hat{\nu}/\!/\hat{x}$ 时，称为单无矩力偶点源(图 3.8)；当 $\hat{\nu}\perp\hat{x}$ 时，称为单有矩力偶点源(图 3.9)。若有三个相互垂直的相同强度的单无矩力偶点源，则其联合效应为压力中心(爆炸)(图 3.10)。其产生的位移为

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = M\mathbf{I}\cdot\nabla\mathbf{G} = M\nabla\cdot\mathbf{G}\hat{x} \tag{3.34}$$

两对产生相对方向力矩的单有矩力偶组成双有矩力偶点源(图 3.11)，其合力矩及合力为零，产生的位移为

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = M(\hat{x}\hat{\nu}-\hat{\nu}\hat{x})\cdot\nabla\mathbf{G}$$

即
$$u_i(x) = M_{jk}(G_{ij,k}+G_{ik,j}) \tag{3.35}$$

当两对单有矩力偶点源产生的力矩相同而其合力为零时，产生的

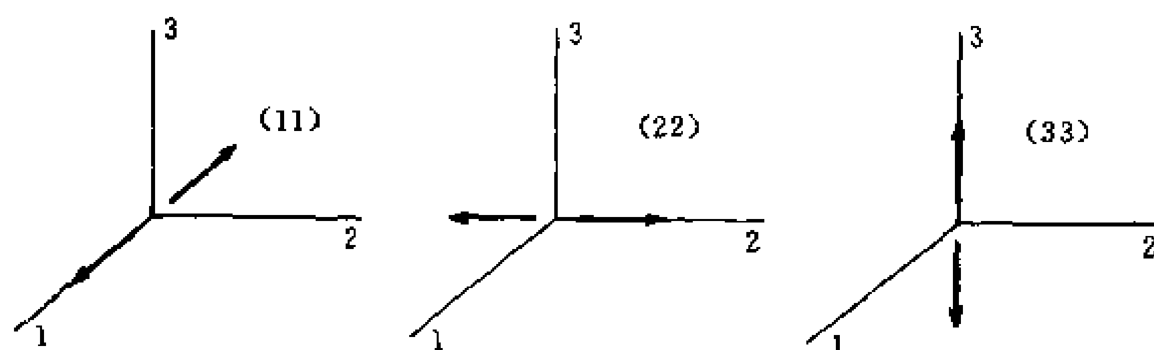


图 3.8　3 个基本的单无矩力偶点源

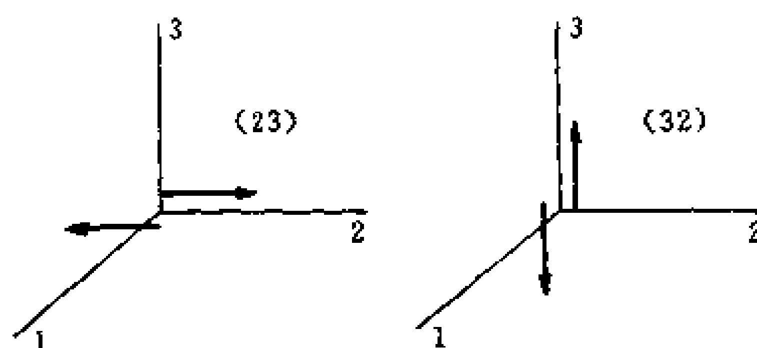


图 3.9　单有矩力偶点源

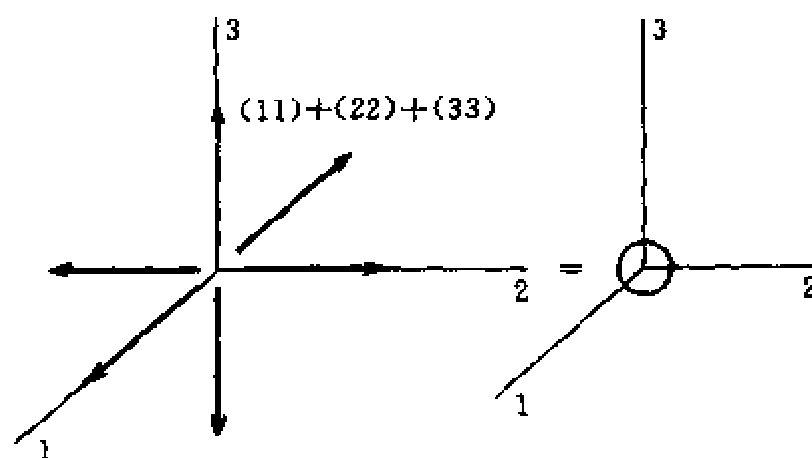


图 3.10　压力中心点源(爆炸)

位移为

$$u(x) = M(\hat{x}\hat{\nu} - \hat{\nu}\hat{x}) \cdot \nabla G$$

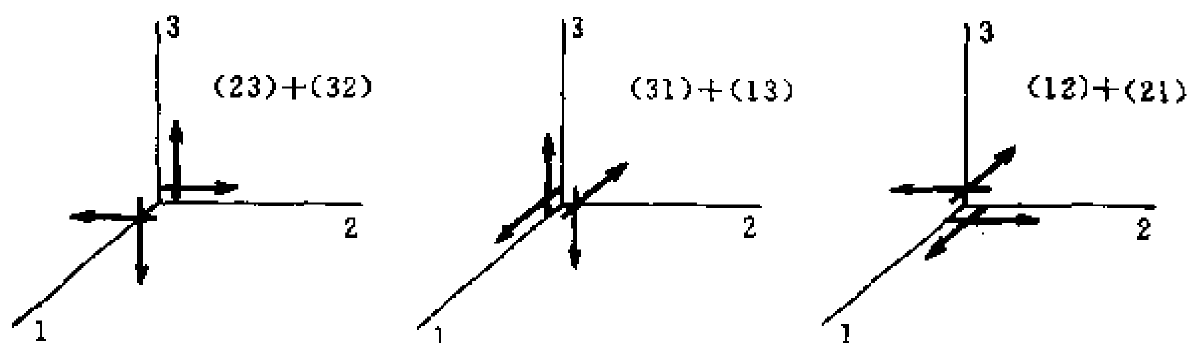


图 3.11　3 个基本的双力偶点源

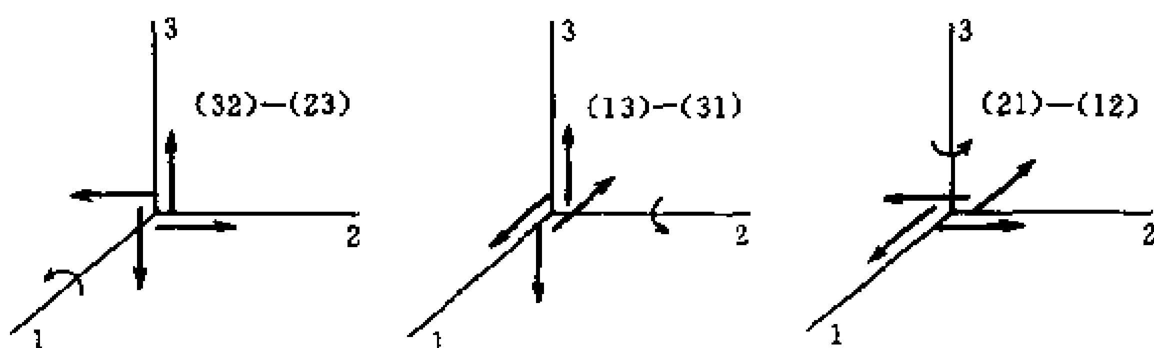


图 3.12　3 个基本的旋转中心点源

此称为旋转中心点源(图 3.12)。

总结起来,符合上述各类力偶点源的动力学方程(频率域)为

$$\rho\omega^2 \boldsymbol{u} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = -g(\omega)\dot{\boldsymbol{Q}}$$

式中 $\boldsymbol{Q}$ 称为震源矢量(The source vector)。

$$\left.\begin{aligned}&\text{对于单无矩力偶点源:}\boldsymbol{Q} = -M(\hat{x}\hat{\nu})\cdot\nabla\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi})\\&\text{压力中心点源:}\boldsymbol{Q} = -M\nabla\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi})\\&\text{双有矩力偶点源:}\boldsymbol{Q} = -M(\hat{x}\hat{\nu}+\hat{\nu}\hat{x})\cdot\nabla\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi})\\&\text{旋转中心点源:}\boldsymbol{Q} = -M(\hat{x}\hat{\nu}-\hat{\nu}\hat{x})\cdot\nabla\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi})\end{aligned}\right\}\quad(3.36)$$

上述所有运算都是相对于震源坐标来做的。

一般情况下,可将位移写成

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},\omega) = \mathbf{M}\cdot\nabla\mathbf{G}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\xi};\omega) \quad (3.37)$$

M 称为源矩张量。或写成分量形式

$$u_i(x,\omega) = M_{jk}(Q)G_{ij,k} \tag{3.38}$$

且矩张量

$$\mathbf{M} = M_{jk}\hat{e}_j\hat{e}_k \tag{3.39}$$

而在时间域，位移表示为

$$u(x,t) = \mathbf{M} * \nabla \mathbf{G}(x|\xi;t) \tag{3.40}$$

这样的广义力偶源可表示为 9 个可能的力偶点源组合的贡献（图 3.13）。

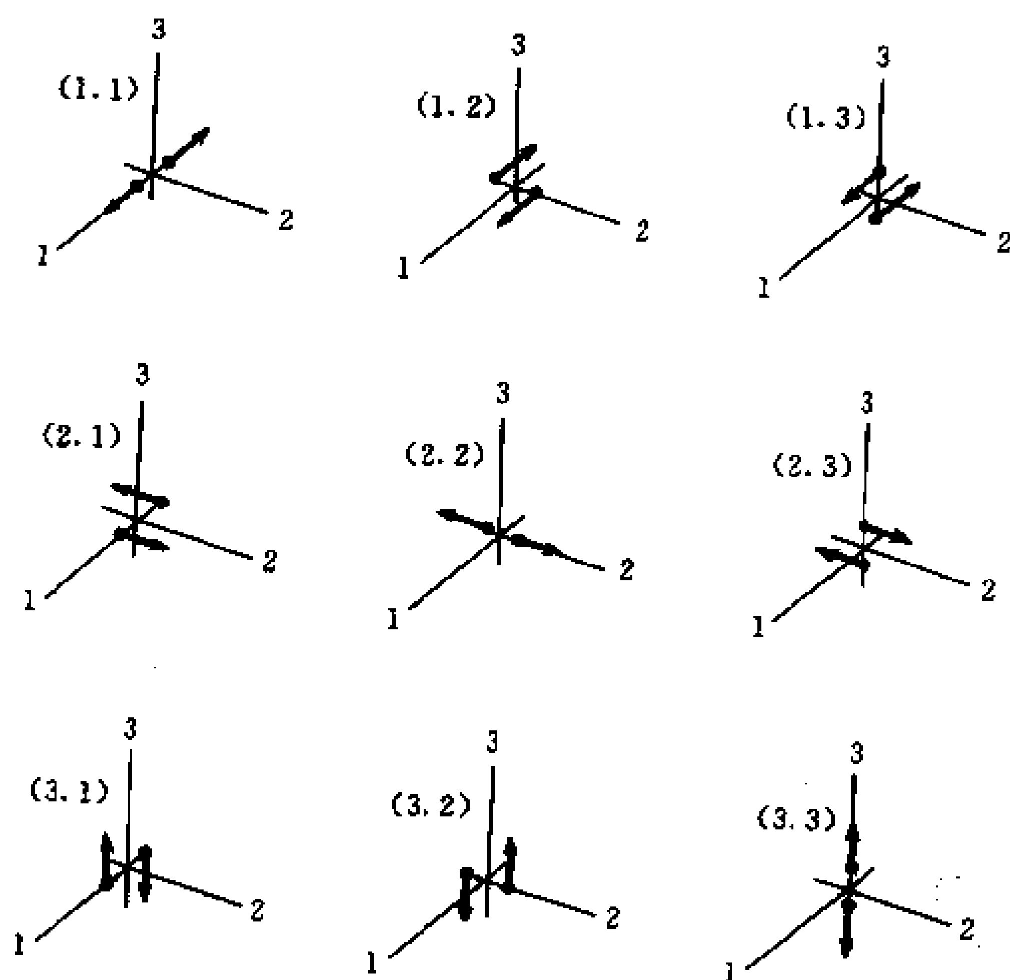


图 3.13　9 个可能的力偶点源

§3　位错与力的等效性原理

如图 3.14，设震源区为一断裂面 S，则体积 V 的表面由内表面 S 和外表面 S' 组成，面 S 的两边分别为 S^+ 和 S^-。位移矢量 $\boldsymbol{u}(\xi)$ 和应力矢量（面力）$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}(\xi))$ 通过 S 面不连续，令

$$\left.\begin{aligned}\Delta\boldsymbol{u}(\xi) &= [\boldsymbol{u}(\xi)] = \boldsymbol{u}^+(\xi) - \boldsymbol{u}^-(\xi)\\ -\Delta\boldsymbol{T}(\xi) &= -[\boldsymbol{T}(\xi)]\\ &= -\boldsymbol{n}^+(\xi)\sigma(\boldsymbol{u}(\xi))^+ + \boldsymbol{n}\ \ \boldsymbol{u}(\xi)\sigma(\boldsymbol{u}(\xi))^-\end{aligned}\right\}\quad(3.41)$$

式中 $\boldsymbol{n}$ 为面 S 的外法线，$\boldsymbol{n}^+$ 表示法线由"+"至"−"；$\boldsymbol{n}$ 表示法线由"−"至"+"。将 S 面切开，有 $\boldsymbol{n}=-\boldsymbol{n}^+=\boldsymbol{n}^-$。

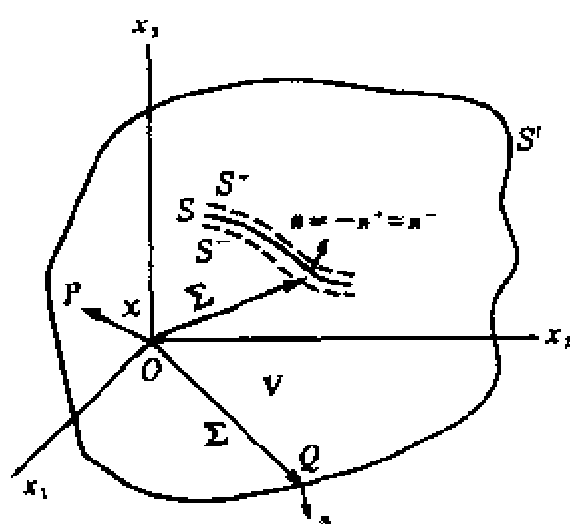


图 3.14　位错源模型

用频率域的位移表示公式（式（1.79）的 Fourier 变换式的矢量形式），有

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \int_V \rho\,\mathbf{G}\cdot\boldsymbol{f}\mathrm{d}V + \int_{S'}\mathbf{G}(\boldsymbol{n}\cdot\sigma(\boldsymbol{u}))\mathrm{d}S' -$$

$$\int_{S'}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{n}\cdot\sigma(\mathbf{G}))\mathrm{d}S' - \int_{S^+}\mathbf{G}\Delta\sigma\mathrm{d}S^+ -$$

$$\int_{S^+} \Delta u (n^+ \cdot \sigma(\mathbf{G})) \mathrm{d}S^+ \tag{3.42}$$

设在 S' 面上有齐次边条件，即 $n \cdot \sigma(u)|_{S'}=0$，$n \cdot \sigma(G)|_{S'}=0$，并令 $S^+=S$，则

$$u(x) = \int_V \rho \mathbf{G}(x|\xi) f(\xi) \mathrm{d}V(\xi) - \int_S \mathbf{G}(x|\xi) \Delta\sigma(\xi) \mathrm{d}S(\xi) + \int_S \Delta u(\xi) \{n(\xi) \cdot \sigma(\mathbf{G}(x|\xi))\} \mathrm{d}S(\xi) \tag{3.43}$$

因为

$$\mathbf{G}(x|\xi) = \int_V \delta(\xi' - \xi) \mathbf{G}(x|\xi) \mathrm{d}V(\xi')$$

$$n \cdot \sigma(\mathbf{G}(x|\xi)) = \int_V n(\xi) \sigma(\mathbf{I}\delta(\xi' - \xi)) \mathbf{G}(x\ \xi) \mathrm{d}V(\xi')$$

式(3.43)可写成

$$u(x) = \int_V \mathbf{G}(x|\xi) \Big\{ \rho f(x) - \int_S [\delta(\xi' - \xi) \Delta\sigma(\xi) - \Delta u(\xi) \cdot n(\xi) \sigma(\mathbf{I}\delta(\xi' - \xi))] \mathrm{d}S(\xi') \Big\} \mathrm{d}V(\xi') \tag{3.44}$$

与 $\rho f(x)$ 相比，式中关于 $\Delta\sigma$ 和 Δu 的面积分相当于外体力的效应，这就是力的等效性原理。这里震源矢量为

$$Q(x) = \int_S \Delta u(\xi) \cdot n(\xi) \cdot \sigma(\mathbf{I}\delta(x - \xi) \mathrm{d}S(\xi) - \int_S \delta(x - \xi) \Delta\sigma(\xi) \mathrm{d}S(\xi) \tag{3.45}$$

式中 $\Delta\sigma$ 称为应力错(Stress dislocation)，Δu 称为位移错(displacement dislocation)，因而 $Q(x)$ 表示应力错和位移错引起的外体力。

对于应力错，有

$$Q(x) = -\int_S \delta(x - \xi) \Delta\sigma(\xi) \mathrm{d}S(\xi) \tag{3.46}$$

在 $x=\xi$ 点，$Q(\xi) = -\mathrm{d}S \Delta\sigma \delta(x-\xi)$，表示应力错相当于作用在 ξ 点上的强度为 $\mathrm{d}S|\Delta\sigma|$ 的集中力，其方向沿应力错的反方向。按作用与反作用定律，对于地震断层，我们假设 $\Delta\sigma=0$。

在地震断层带，当应力积累到超过局部地区的岩石强度时，岩

石破裂，发生地震，所形成的断层是一个位移矢量的间断面，这就是位错面。对于这个位移错震源，有

$$Q(x) = \int_S \Delta \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} \cdot \sigma(\mathbf{I}\delta(x - \xi))\mathrm{d}S(\xi) \qquad (3.47)$$

由于发生在体积 V 内的断裂是个内部过程，所以总的动量和总的角动量必然守恒。于是，相对于任一固定点的合力和合力矩必然为零。由于 δ 函数的体积分为 1，且 σ 有对称性，使得 $\sigma(\mathbf{I})=0$。因此，在体积 V 上作用的合等效力为

$$\int_V \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}V(\boldsymbol{x}) = \int_S \Delta \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}\left[\mathbf{I}\int_V \delta(x - \xi)\mathrm{d}V(\boldsymbol{x})\right]\mathrm{d}S(\xi) = 0 \qquad (3.48)$$

又由于 $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}\times\mathbf{I})=0$，则合等效力矩为

$$\int_V \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}V(\boldsymbol{x}) = \int_S \Delta \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}\left(\int_V \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi})(\boldsymbol{x} \times \mathbf{I})\mathrm{d}V(\boldsymbol{x})\right)\mathrm{d}S(\boldsymbol{\xi}) = 0 \qquad (3.49)$$

可见，在非均匀各向异性介质中，位错震源等效于合力为零及合力矩为零的力偶点源系。在这种意义上说，位错源也称为位错点源。

在 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\xi}$ 的点上，位错点源的震源矢量

$$\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{\xi}) = U_0\mathrm{d}S\hat{\boldsymbol{e}} \cdot \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{I}\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi})) \qquad (3.50)$$

这里令 $\Delta\boldsymbol{u}=U_0\hat{\boldsymbol{e}}$，$\hat{\boldsymbol{e}}$ 是单位矢量，或称为单位滑动矢量(Unit-slip vector)。$\Delta\boldsymbol{u}=U_0\hat{\boldsymbol{e}}$ 表示在 $\Delta\boldsymbol{u}$ 中，其滑动方向为 $\hat{\boldsymbol{e}}$，其滑动大小为 U_0，因此，$\Delta\boldsymbol{u}$ 为位错源的强度。

对于各向同性介质，运用本构关系，可得

$$\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{\xi}) = -U_0\mathrm{d}S(\lambda\hat{\boldsymbol{e}} \cdot \boldsymbol{n}\nabla\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}) + \mu(\hat{\boldsymbol{e}}\boldsymbol{n} + \boldsymbol{n}\hat{\boldsymbol{e}}) \cdot \nabla\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi})) \qquad (3.51)$$

需要引起重视的是两种位错源，即 $\hat{\boldsymbol{e}}/\!/\boldsymbol{n}$ 的剪切位错源和 $\hat{\boldsymbol{e}}\perp\boldsymbol{n}$ 的张裂位错源。

对于剪切位错源，由于 $\hat{\boldsymbol{e}}\cdot\boldsymbol{n}=0$，故

$$Q(\xi) = -\mu U_0 \mathrm{d}S(\hat{e}\boldsymbol{n} + \boldsymbol{n}\hat{e}) \cdot \nabla \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}) \tag{3.52}$$

它等效于双有矩力偶点源，其中单力偶矩 $M = \mu U_0 \mathrm{d}S$。但单力偶的分布不是唯一的，如图 3.15 所示，图 3.15a 为两个单力偶分布，3.15b为一个单力偶加一个单力。

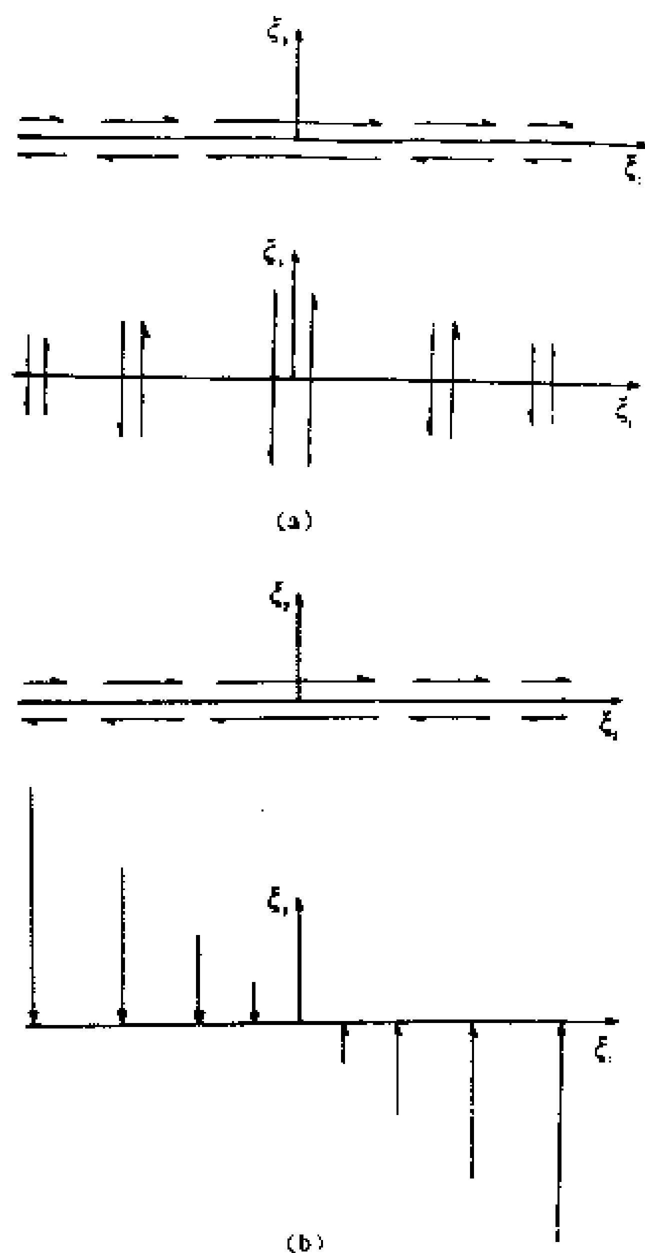


图 3.15 等效于剪切位错源的力系

对于张裂位错源，有

$$Q(\xi)=-U_0\mathrm{d}S(\lambda\nabla\delta(\boldsymbol{x}-\xi)+2\mu\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}\cdot\nabla\delta(\boldsymbol{x}-\xi))\quad(3.53)$$

可知这是一个无矩力偶(强度为 $M=2\mu U_0\mathrm{d}S$)与一个压力中心(强度为 $M=\lambda U_0\mathrm{d}S$)之和。

在外力为零的情况下，位移用位错与应力错表示为

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})=\int_S U_0\hat{e}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}(\mathrm{G})\mathrm{d}S-\int_S \mathrm{G}\Delta\boldsymbol{\sigma}\mathrm{d}S\qquad(3.54)$$

称它为 Valterra 公式，它是式(3.44)的简明形式。

§4 剪切位错源及其矩张量

由于震源的断层成因说，有必要进一步阐述与双力偶点源等效的剪切位错源。

在震源 Q 处，通过 Q 点的法线为 $\boldsymbol{n}$ 的平面称为断层面(位错面)，断层面与地球表面的交线为断层面的走向。取观测点面向断层面下盘的右边为走向的正方向，方位用走向方位角 φ_s 来表示。在断层面上垂直于走向方向的是倾向，断层面的倾斜程度用倾角 δ 来测定。这样，走向、倾向和断层面垂直轴可形成震源走向坐标系$(\boldsymbol{e}_1^0,\boldsymbol{e}_2^0,\boldsymbol{e}_3^0)$。如图 3.16 所示。

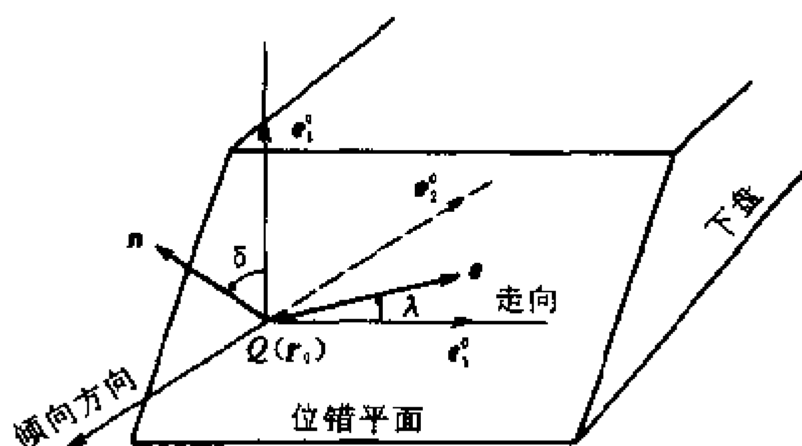


图 3.16 位错面和震源走向坐标系

在断层面上，上盘 S^+ 相对于下盘 S^- 产生位错 $\Delta u=U_0\hat{e}$，位错方向 $\hat{e}$ 与走向方向的夹角为 λ，称为滑动角（图 3.16）。若位错沿走向方向，则称为走向-滑动断层。若位错垂直于走向方向，则称为倾向-滑动断层。而一般情况则称为倾斜-滑动断层，它是滑动强度为 $U_0\cos\lambda$ 的走向-滑动及滑动强度为 $U_0\sin\lambda$ 的倾向-滑动的叠加。

地质学中，在第一象限根据 λ、δ 来定义两类走滑断层（右旋断层与左旋断层）及两类倾滑断层（正断层与逆断层），如图 3.17 及图 3.18 所示。

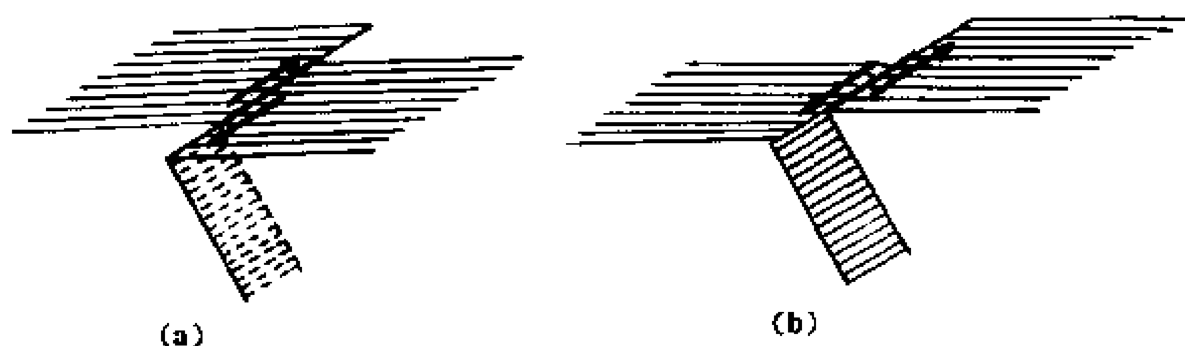


图 3.17 两种走滑断层模型

(a) 右旋；(b) 左旋

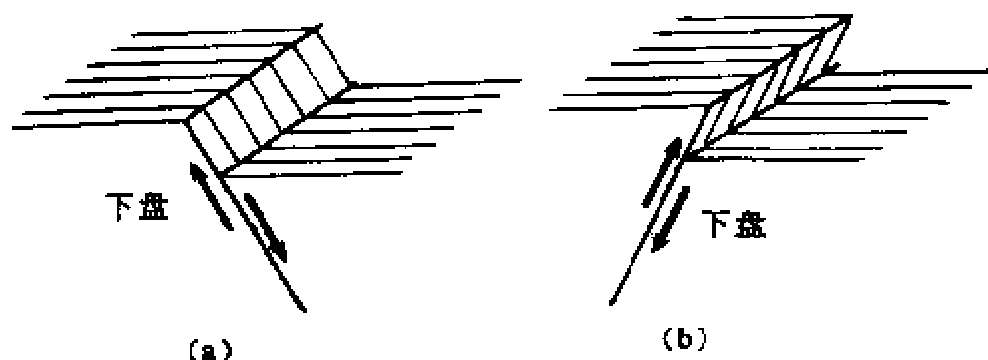


图 3.18 两种倾滑断层模型

(a) 正断层；(b) 逆断层

为方便，位错 $U_0\hat{e}$ 又可分为水平运动分量和垂直运动分量，可用水平角 t 及俯角 p 来测量（图 3.19）。

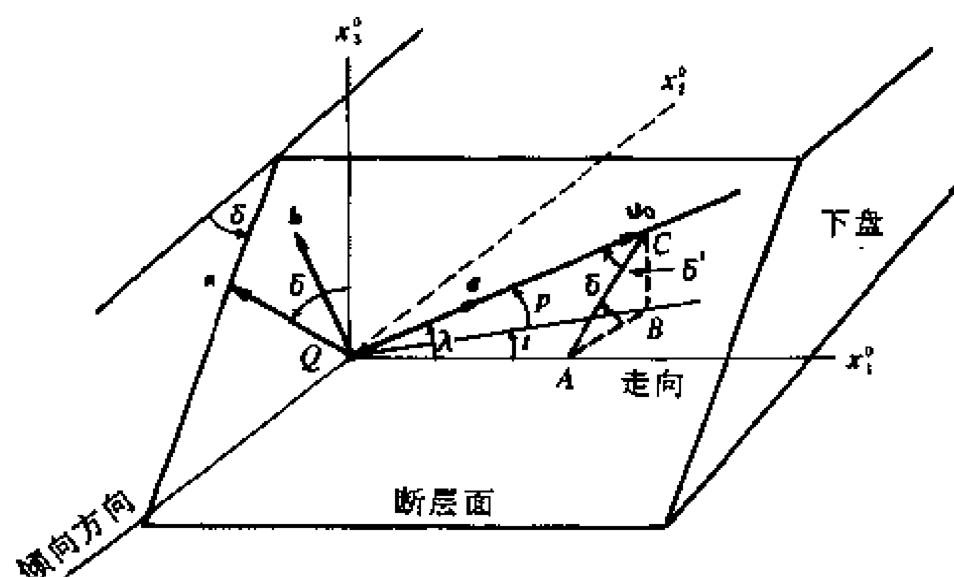


图 3.19　Δu 与水平角 t，俯角 p

从图上可看出，

$$
\left.\begin{aligned}
&\overline{QA} = U_0\cos\lambda,\quad \overline{AC} = U_0\sin\lambda \\
&\overline{BC} = U_0\sin\lambda\sin\delta,\quad \overline{AB} = U_0\sin\lambda\cos\delta \\
&\overline{QB} = U_0(1-\sin^2\lambda\sin^2\delta)^{1/2}
\end{aligned}\right\} \tag{3.55}
$$

于是，可得

$$
\left.\begin{aligned}
&\sin t = \frac{\sin\lambda\cos\delta}{\sqrt{1-\sin^2\lambda\sin^2\delta}} \\
&\sin p = \sin\lambda\sin\delta
\end{aligned}\right\} \tag{3.56}
$$

由位错面上的位错方向 $\boldsymbol{e}(\boldsymbol{e}=\hat{\boldsymbol{e}})$ 及其垂直方向 $\boldsymbol{b}$，与位错面的法线方向 $\boldsymbol{n}$，又可形成震源位错坐标系（$\boldsymbol{e}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{n}$），见图 3.19。它与走向坐标系（e_1^0，e_2^0，e_3^0）的关系通过倾角 δ 及滑动角 λ 由表 3.1 表示。

为确定位错面的走向，还必须引入震中地理坐标系（$\hat{\theta}_0$，$\hat{\varphi}_0$，$\hat{r}_0$），如图 3.20 所示。坐标轴以向南、向东和向上为正方向，或以

震源位错坐标系与走向坐标系的关系

位错坐标系 \ 走向坐标系	e_1^0	e_2^0	e_3^0
e	$\cos\lambda$	$\sin\lambda\cos\delta$	$\sin\lambda\sin\delta$
b	$\sin\lambda$	$\cos\lambda\cos\delta$	$\cos\lambda\sin\delta$
n	0	$-\sin\delta$	$\cos\delta$

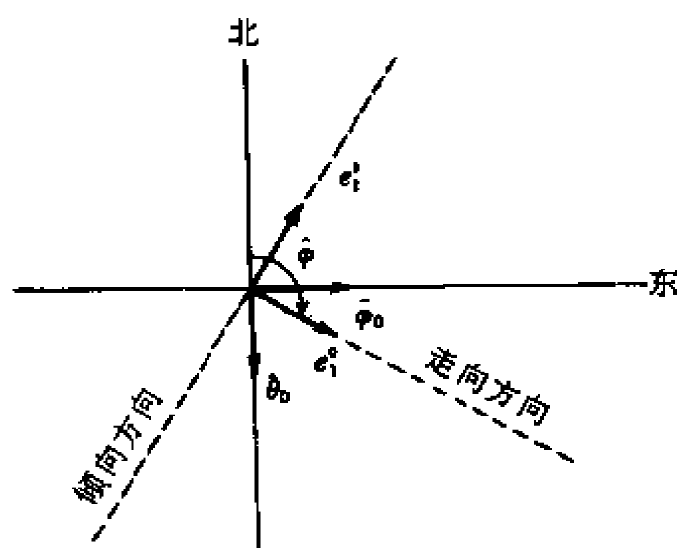


图 3.20 震中地理坐标系

向北、向东和向下为正方向。它与走向坐标系的关系通过走向方位角 φ_s（图 3.21）由表 3.2 表示。

表 3.2 震中地理坐标系与走向坐标系的关系

走向坐标系 \ 地理坐标系	$\hat{\theta}_0$	$\hat{\varphi}_0$	$\hat{r}_0$
e_1^0	$-\cos\varphi_s$	$\sin\varphi_s$	0
e_2^0	$-\sin\varphi_s$	$-\cos\varphi_s$	0
e_3^0	0	0	1

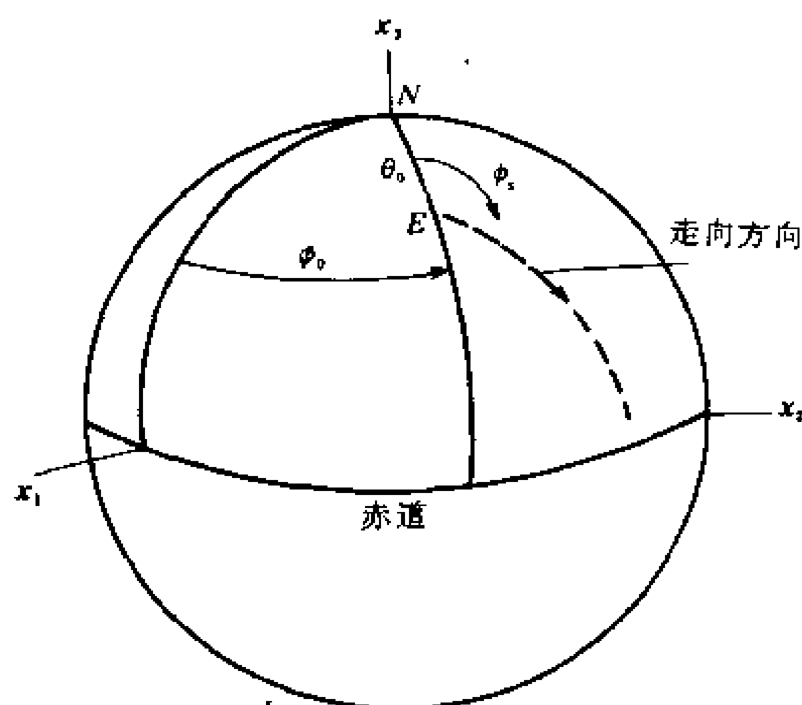


图 3.21 走向方位角 φ_s

对于点位错源，由式（3.54）知

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = U_0 \mathrm{d}S \cdot \boldsymbol{en} \cdot \sigma(\mathrm{G}) \tag{3.57}$$

对于剪切位错源，因 $\boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{n}=0$，上式可写成

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \mu U_0 \mathrm{d}S(\boldsymbol{en} + \boldsymbol{ne}) \cdot \nabla \mathbf{G} = \mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{G} \tag{3.58}$$

式中 $\mathbf{M}=M_0(\boldsymbol{en}+\boldsymbol{ne})$ 为矩张量，而 $M_0=\mu U_0\mathrm{d}S$ 称为平均地震矩。

按震中坐标系，令 x 轴指北，y 轴指东，z 轴垂直向下，则矩张量 $\mathbf{M}$ 的直角坐标分量为

$$M_{xx}=-M_0(\sin\delta\cos\lambda\sin 2\varphi_s+\sin 2\delta\sin\lambda\sin^2\varphi_s)$$

$$M_{xy}=M_{yx}=M_0\left(\sin\delta\cos\lambda\cos 2\varphi_s+\frac{1}{2}\sin 2\delta\sin\lambda\sin^2\varphi_s\right)$$

$$M_{xz}=M_{zx}=-M_0(\cos\delta\cos\lambda\cos\varphi_s+\cos 2\delta\sin\lambda\sin\varphi_s)$$

$$M_{yy}=M_0(\sin\delta\cos\lambda\sin 2\varphi_s-\sin 2\delta\sin\lambda\cos^2\varphi_s)$$

$$M_{yz}=M_{zy}=-M_0(\cos\delta\cos\lambda\sin\varphi_s-\cos2\delta\sin\lambda\cos\varphi_s)$$

$$M_{zz}=M_0\sin2\delta\sin\lambda$$

组成

$$\mathbf{M}=\begin{pmatrix} M_{xx} & M_{xy} & M_{xz} \\ M_{yx} & M_{yy} & M_{yz} \\ M_{zx} & M_{zy} & M_{zz} \end{pmatrix} \tag{3.59}$$

也可将 M 写成

$$\mathbf{M}=\cos\delta\cos\lambda\mathbf{M}^{(1)}+\sin\delta\cos\lambda\mathbf{M}^{(2)}-\cos2\delta\sin\lambda\mathbf{M}^{(3)}+\sin2\delta\sin\lambda\mathbf{M}^{(4)} \tag{3.60}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}
\mathbf{M}^{(1)}&=M_0\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\cos\varphi_s \\ 0 & 0 & -\sin\varphi_s \\ -\cos\varphi_s & -\sin\varphi_s & 0 \end{pmatrix}\\
\mathbf{M}^{(2)}&=M_0\begin{pmatrix} -\sin2\varphi_s & \cos2\varphi_s & 0 \\ \cos2\varphi_s & \sin2\varphi_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\\
\mathbf{M}^{(3)}&=M_0\begin{pmatrix} 0 & 0 & \sin\varphi_s \\ 0 & 0 & -\cos\varphi_s \\ \sin\varphi_s & -\cos\varphi_s & 0 \end{pmatrix}\\
\mathbf{M}^{(4)}&=M_0\begin{pmatrix} -\sin^2\varphi_s & \frac{1}{2}\sin^2\varphi_s & 0 \\ \frac{1}{2}\sin2\varphi_s & -\cos^2\varphi_s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}\right\} \tag{3.61}$$

每一个 $\mathbf{M}^{(i)}(i=1,2,3,4)$表示一个特殊的剪切位错的矩张量。若

用 $\mathbf{M}^{(i)}(\lambda,\delta,\varphi_s)$表示，则有

$\mathbf{M}^{(1)}=\mathbf{M}(0,0,\varphi_s)$为沿走向的水平断层；

$\mathbf{M}^{(2)}=\mathbf{M}(0,\frac{\pi}{2},\varphi_s)$为垂直走滑断层；

$\mathbf{M}^{(3)}=\mathbf{M}(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2},\varphi_s)$为垂直倾滑断层；

$\mathbf{M}^{(4)}=\mathbf{M}(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4},\varphi_s)$为上倾断层。 (3.62)

$\mathbf{M}^{(1)}=\mathbf{M}(0,0,\varphi_s)=\mathbf{M}(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2},\varphi_s-\frac{\pi}{2})$，与 $\mathbf{M}^{(3)}=\mathbf{M}(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2},\varphi_s)$ 相比，可以看出，若不计它们有共同的走向这一点，$\mathbf{M}^{(1)}$与$\mathbf{M}^{(3)}$是同一基本剪切位错张量。也就是说，只有$\mathbf{M}^{(2)}$、$\mathbf{M}^{(3)}$、$\mathbf{M}^{(4)}$三个基本的剪切位错矩张量。那么，公式（3.60）表示：任意剪切位错点源的矩张量为三个基本剪切位错矩张量之和。推广之可以说，任意剪切位错源产生的位移场可由三个基本的剪切位错点源Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ产生的位移场来描述。这三个基本的剪切位错点源如图3.22及表3.3所示。

为明确，引入

$$\left.\begin{aligned}
p_1 &= (\sin\lambda\sin\delta\cos\delta)\sin2\varphi_s + (\cos\lambda\sin\delta)\cos2\varphi_s \\
p_2 &= (\cos\lambda\sin\delta)\sin2\varphi_s - (\sin\lambda\sin\delta\cos\delta)\cos2\varphi_s \\
p_3 &= -(\cos\lambda\cos\delta)\sin\varphi_s + (\sin\lambda\cos2\delta)\cos\varphi_s \\
p_4 &= (\sin\lambda\cos2\delta)\sin\varphi_s + (\cos\lambda\cos\delta)\cos\varphi_s \\
p_5 &= \sin\lambda\sin\delta\cos\delta
\end{aligned}\right\} \tag{3.63}$$

那么，任意剪切位错点源产生的位移场可表示为三个基本剪切位错产生的位移的线性叠加：

$$\boldsymbol{u}(\lambda,\delta,\varphi_s)=(p_1+p_2+p_5)\boldsymbol{u}_{\mathrm{I}}-(p_3+p_4)\boldsymbol{u}_{\mathrm{II}}+2p_5\boldsymbol{u}_{\mathrm{III}} \tag{3.64}$$

式中$\boldsymbol{u}_{\mathrm{I}}$、$\boldsymbol{u}_{\mathrm{II}}$、$\boldsymbol{u}_{\mathrm{III}}$分别为基本剪切位错点源Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ产生的位移。

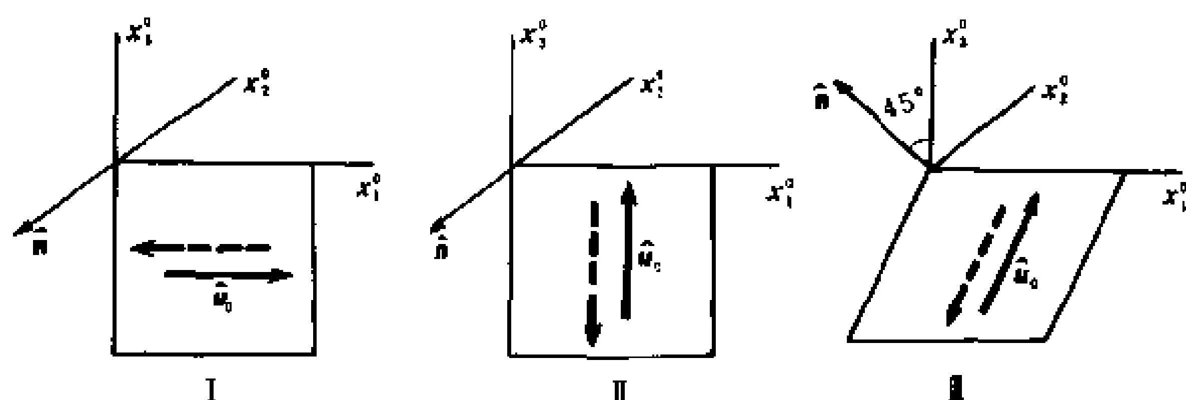


图 3.22　三个基本剪切位错点源模型

表 3.3　三个基本的剪切位错点源

位错源类型	λ	δ	φ_s	e	n	地质名称
I	0	$\pi/2$	0	e_1^0	e_2^0	垂直走向滑动
II	$\pi/2$	$\pi/2$	0	e_3^0	$-e_2^0$	垂直倾向滑动
III	$\pi/2$	$\pi/4$	0	$(e_3^0+e_2^0)/\sqrt{2}$	$(e_3^0-e_2^0)/\sqrt{2}$	45°倾角的上倾滑动

习题与思考题

1. 当 $X_0(t)$ 为脉冲函数时，计算出式（3.23）中三项的值，并画出它们的相对位置与脉冲形状，然后证明三项中每个脉冲下的面积与距离的关系都正比于 $\frac{1}{r}$。

2. 若恒定力 X_0 作用于无限、均匀、各向同性介质内原点的 j 方向，试由式（3.23）证明，x 处位移 i 分量的静态解为

$$\frac{X_0}{8\pi\rho r}\left[\left(\frac{1}{\beta^2}-\frac{1}{\alpha^2}\right)\nu_i\nu_j+\left(\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\alpha^2}\right)\delta_{ij}\right]$$

它被称为 Somigliana 张量。

3. 从位移用 Green 函数表示的式（1.79）出发，导出位错源产生的位移公式。按位错与力的等效性原理，此位移公式应为式

(3.40)。

4. 剪切位错源的震源矢量 $\boldsymbol{Q}(\xi)$ 中，$\mu U_0 S = M_0$ 被称为地震矩。一般情况下，地震距是时间的函数，即 $M_0(t) = \mu U_0(t) S$。试问在这里，$U_0(t)$ 是在时间 t 已破裂开的面积 $S(t)$ 上取平均，还是在所考虑的地震期间最终破裂开的面积 $S(\infty)$ 上取平均？

5. 证明剪切位错源可用三个基本点源来表示，并叙述这三个基本点源的特征。

第四章　位错点源产生的地震波辐射场

本章讲述剪切位错源及移动源产生的位移辐射场，并将其推广到球对称介质中。这里主要是指体波辐射的情况。

§1　均匀介质中剪切位错源的辐射

为描述观测点的位移场，引入以地球中心 O 为原点的直角坐标（x_1^0，x_2^0，x_3^0）及以震源 Q 为原点的球坐标（R，i_h，φ_h）（图4.1）。图4.1中，过观测点 P 的地震射线为 $\overline{QP}$，R 为径向半径，i_h 为射线离源角，φ_h 为水平方位角。另外还有以 O 为原点的球坐标（r，θ_h，φ_h）。令（R，i_h，φ_h）的单位矢量分别为（$\hat{\boldsymbol{R}}$，$\hat{i}_h$，$\hat{\varphi}_h$），

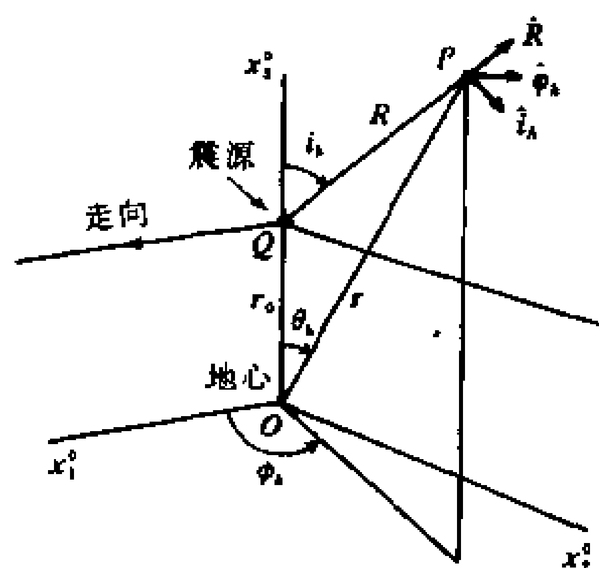


图4.1　在震源 Q 点的球坐标（R，i_h，φ_h）与直角坐标（x_1^0，x_2^0，x_3^0）

		x_2	x_3
	$\sin i_h \cos\varphi_h$	$\sin i_h \sin\varphi_h$	$\cos i_h$
$\hat{i}_h$	$\cos i_h \cos\varphi_h$	$\cos i_h \sin\varphi_h$	$-\sin i_h$
$\hat{\varphi}_h$	$-\sin\varphi_h$	$\cos\varphi_h$	0

将直角坐标的原点移至震源 Q 点，且 x_1^0 方向为走向时，则它就是震源走向坐标系（e_1^0，e_2^0，e_3^0）。联合表 3.1 与表 4.1，可得下述几何关系：

$$\left.\begin{aligned}
&(\boldsymbol{e}\cdot\hat{\boldsymbol{R}})(\boldsymbol{n}\cdot\hat{\boldsymbol{R}})=\frac{1}{6}F\\
&(\boldsymbol{e}\cdot\hat{\boldsymbol{R}})(\boldsymbol{n}\cdot\hat{\boldsymbol{i}}_h)+(\boldsymbol{e}\cdot\hat{\boldsymbol{i}}_h)(\boldsymbol{n}\cdot\hat{\boldsymbol{R}})=\frac{1}{6}\frac{\partial F}{\partial i_h}\\
&(\boldsymbol{e}\cdot\hat{\boldsymbol{R}})(\boldsymbol{n}\cdot\hat{\boldsymbol{\varphi}}_h)+(\boldsymbol{e}\cdot\hat{\boldsymbol{\varphi}}_h)(\boldsymbol{n}\cdot\hat{\boldsymbol{R}})=\frac{1}{6\sin i_h}\frac{\partial F}{\partial\varphi_h}
\end{aligned}\right\}\quad(4.1)$$

式中

$$\begin{aligned}F(\lambda,\delta;i_h,\varphi_h)=&a_0P_2(\cos i_h)+(a_1\cos\varphi_h+b_1\sin\varphi_h)P_2^1(\cos i_h)+\\&(a_2\cos2\varphi_h+b_2\sin2\varphi_h)P_2^2(\cos i_h)\end{aligned}\quad(4.2)$$

$$\left.\begin{aligned}
&a_0=3\sin\lambda\sin2\delta,\quad a_1=2\cos\lambda\cos2\delta,\\
&b_1=2\sin\lambda\cos2\delta,\quad a_2=\frac{1}{2}\sin\lambda\sin2\delta,\\
&b_2=-\cos\lambda\sin\delta
\end{aligned}\right\}\quad(4.3)$$

$P_2^1(\cos i_h)$，$P_2^2(\cos i_h)$为球谐函数。

此时，若用 Hansen 矢量函数 $\boldsymbol{L}_{m,l}$及 $\boldsymbol{N}_{m,l}$来表示，则式(3.58)可表示为：

$$u = -\frac{\mathrm{i}U_0\mathrm{d}Sk_\beta^2}{24\pi}\sum_{m=0}^{2}\left\{2\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^4\left[a_m\boldsymbol{L}_{m,2}^{c}(k_\alpha R)+\right.\right.$$

$$\left.\left.b_m\boldsymbol{L}_{m,2}^{s}(k_\alpha R)\right] + a_m\boldsymbol{N}_{m,2}^{c}(k_\beta R) + b_m\boldsymbol{N}_{m,2}^{s}(k_\beta R)\right\} \quad (4.4)$$

式中,a_m,b_m 含义见式(4.3)。c 表示余弦,s 表示正弦。

可看出,剪切位错点源的位移场只与 Hansen 矢量 $\boldsymbol{L}$ 和 $\boldsymbol{N}$ 有关,而与 $\boldsymbol{M}$ 无关。

在时间域,式(4.4)可写成

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},t) = \frac{U_0\mathrm{d}S}{4\pi}\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{n}\cdot\left\{\frac{1}{R}\boldsymbol{D}_1 + \frac{1}{R^2}\boldsymbol{D}_2\right\} \quad (4.5)$$

式中

$$\boldsymbol{D}_1 = \frac{1}{\beta}\dot{g}\left(t-\frac{R}{\beta}\right)\left[\hat{\boldsymbol{R}}\mathbf{I} + (\hat{\boldsymbol{R}}\mathbf{I})^{213} - 2\hat{\boldsymbol{R}}\hat{\boldsymbol{R}}\hat{\boldsymbol{R}}\right]+$$

$$\frac{2}{\alpha}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2\dot{g}\left(t-\frac{R}{\alpha}\right)\times\left[\frac{\sigma}{1-2\sigma}\mathbf{I}\hat{\boldsymbol{R}} + \hat{\boldsymbol{R}}\hat{\boldsymbol{R}}\hat{\boldsymbol{R}}\right]$$

$$\boldsymbol{D}_2 = -6\boldsymbol{B}\int_{\beta/\alpha}^{1}g\left(t-\frac{s\boldsymbol{R}}{\beta}\right)s\mathrm{d}s -$$

$$2\beta^2\boldsymbol{B}\left[\frac{1}{\alpha^2}g\left(t-\frac{\boldsymbol{R}}{\alpha}\right) - \frac{1}{\beta^2}g\left(t-\frac{\boldsymbol{R}}{\beta}\right)\right]+$$

$$\left[\hat{\boldsymbol{R}}\mathbf{I} + (\hat{\boldsymbol{R}}\mathbf{I})^{213} - 2\hat{\boldsymbol{R}}\hat{\boldsymbol{R}}\hat{\boldsymbol{R}}\right]g\left(t-\frac{\boldsymbol{R}}{\beta}\right)+$$

$$2\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2\left[\frac{\sigma}{1-2\sigma}\mathbf{I}\hat{\boldsymbol{R}} + \hat{\boldsymbol{R}}\hat{\boldsymbol{R}}\hat{\boldsymbol{R}}\right]g\left(t-\frac{\boldsymbol{R}}{\alpha}\right)$$

$$\boldsymbol{B} = \frac{1}{\boldsymbol{R}}\left[-\frac{5}{R^2}\boldsymbol{R}\boldsymbol{R}\boldsymbol{R} + \mathbf{I}\boldsymbol{R} + \boldsymbol{R}\mathbf{I} + (\boldsymbol{R}\mathbf{I})^{213}\right]$$

式中,$(\boldsymbol{R}\mathbf{I})^{213} = \hat{e}_1\boldsymbol{R}\hat{e}_1 + \hat{e}_2\boldsymbol{R}\hat{e}_2 + \hat{e}_3\boldsymbol{R}\hat{e}_3$

很明显,$\boldsymbol{D}_1$ 表示远场,$\boldsymbol{D}_2$ 表示近场。

如图 4.2 的平移位错情况。取位错源的错动方向 $\hat{\boldsymbol{e}}_1$ 为走向方向,则图中直角坐标系为震源走向坐标系。用表 4.1 的关系,可得到位移

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{R},t) = \frac{U_0\mathrm{d}S}{4\pi\rho}\boldsymbol{A}^{\mathrm{N}}\frac{1}{R^4}\int_{\beta/\alpha}^{1}g\left(t-\frac{sR}{\beta}\right)s\mathrm{d}s +$$

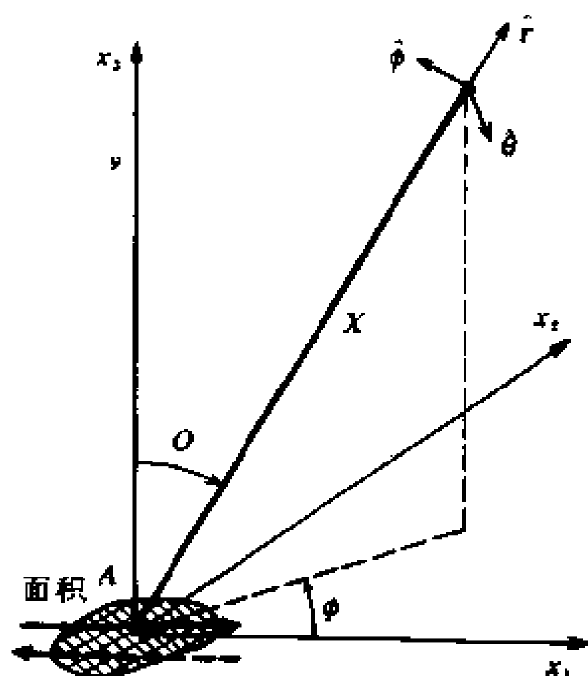


图 4.2 平移位错位移场

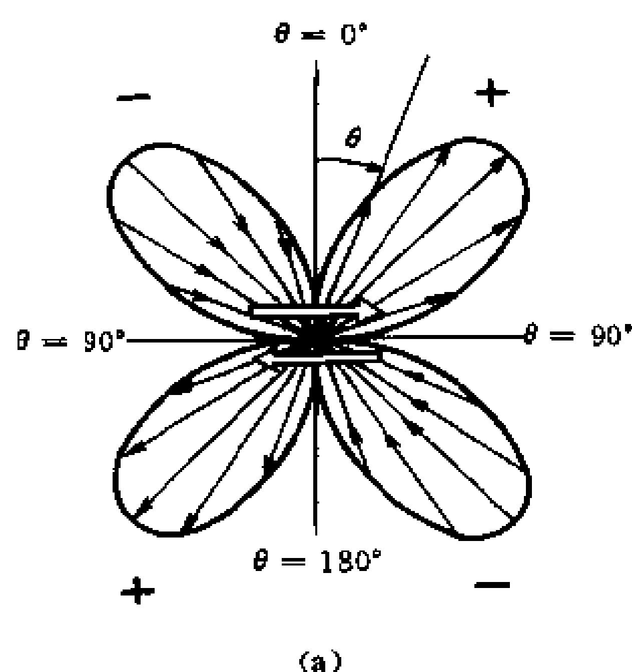
$$\frac{U_0\mathrm{d}S}{4\pi\rho\alpha^2}\boldsymbol{A}^{\mathrm{IP}}\frac{1}{R^2}g\left(t-\frac{R}{\alpha}\right)+\frac{U_0\mathrm{d}S}{4\pi\rho\beta^2}\boldsymbol{A}^{\mathrm{IS}}\frac{1}{R^2}g\left(t-\frac{R}{\beta}\right)+$$
$$\frac{U_0\mathrm{d}S}{4\pi\rho\alpha^3}\boldsymbol{A}^{\mathrm{FP}}\frac{1}{R}\dot{g}\left(t-\frac{R}{\alpha}\right)+\frac{1}{4\pi\rho\beta^3}\boldsymbol{A}^{\mathrm{FS}}\frac{1}{R}\dot{g}\left(t-\frac{R}{\beta}\right) \tag{4.6}$$

式中 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{N}}$、$\boldsymbol{A}^{\mathrm{IP}}$、$\boldsymbol{A}^{\mathrm{IS}}$、$\boldsymbol{A}^{\mathrm{FP}}$、$\boldsymbol{A}^{\mathrm{FS}}$分别为近场、中间场及远场的 P 和 S 辐射函数。

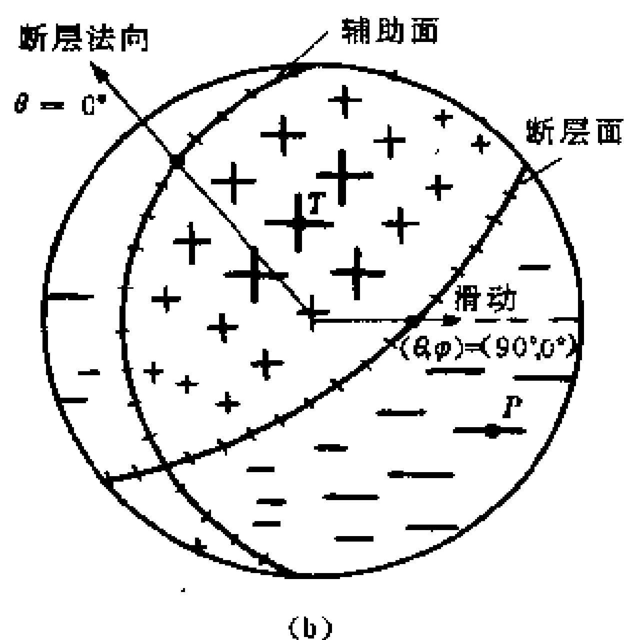
$$\left.\begin{aligned}
\boldsymbol{A}^{\mathrm{N}} &= 9\sin 2i_h\cos\varphi_h\hat{\boldsymbol{R}} - 6(\cos 2i_h\cos\varphi_h\hat{\boldsymbol{i}}_h - \cos i_h\sin\varphi_h\hat{\boldsymbol{\varphi}}_h)\\
\boldsymbol{A}^{\mathrm{IP}} &= 4\sin 2i_h\cos\varphi_h\hat{\boldsymbol{R}} - 2(\cos 2i_h\cos\varphi_h\hat{\boldsymbol{i}}_h - \cos i_h\sin\varphi_h\hat{\boldsymbol{\varphi}}_h)\\
\boldsymbol{A}^{\mathrm{IS}} &= -3\sin 2i_h\cos\varphi_h\hat{\boldsymbol{R}} + 3(\cos 2i_h\cos\varphi_h\hat{\boldsymbol{i}}_h - \cos i_h\sin\varphi_h\hat{\boldsymbol{\varphi}}_h)\\
\boldsymbol{A}^{\mathrm{FP}} &= \sin 2i_h\cos\varphi_h\hat{\boldsymbol{R}}\\
\boldsymbol{A}^{\mathrm{FS}} &= \cos 2i_h\cos\varphi_h\hat{\boldsymbol{i}}_h - \cos 2i_h\sin\varphi_h\hat{\boldsymbol{\varphi}}_h
\end{aligned}\right\} \tag{4.7}$$

可清楚地看出，在径向方向上，辐射图案正比于 $\sin 2i_h\cos\varphi_h\hat{\boldsymbol{R}}$，而在横向方向上，正比于$(\cos 2i_h\cos\varphi_h\hat{\boldsymbol{i}}_h-\cos i_h\sin\varphi_h\hat{\boldsymbol{\varphi}}_h)$。见图 4.3 及图 4.4。在远场 P 波位移中只出现径向分量，而远场 S 波位移中只有

横向分量，近场（包括中间场）则包含了径向与横向两个分量。



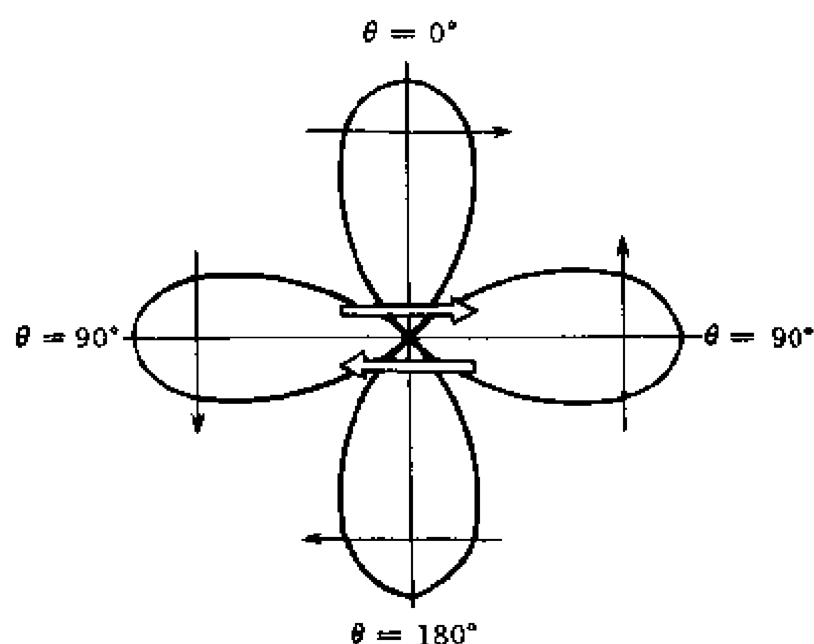
(a)



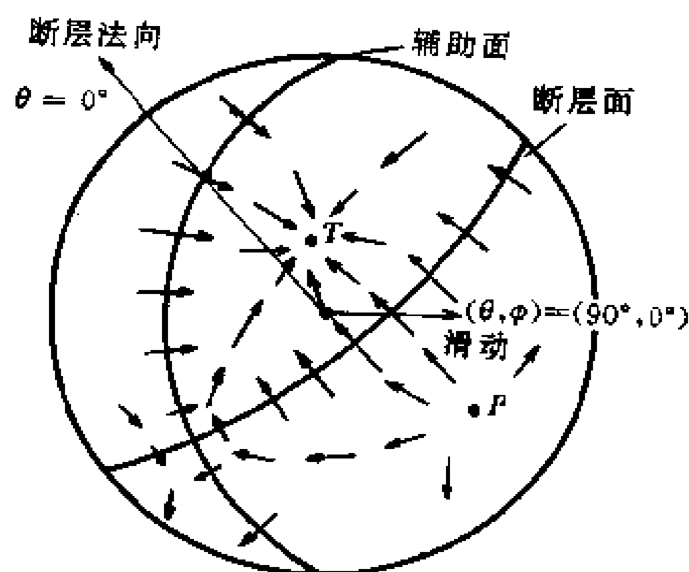
(b)

图 4.3 径向位移辐射图案

至于静态位移场，当 $t\to\infty$ 时，取地震矩 $M_0(\infty)$ 为有限值。在此，也即取 $g(t-s)$，$\dot{g}(t-s)$ 与 $\int_{\beta/\alpha}^{1} g\left(t-\frac{sR}{\beta}\right)s\mathrm{d}s$ 在 $t\to\infty$ 时的极限值，结果是



(a)



(b)

图 4.4　横向位移辐射图案

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},\infty)=\frac{g(\infty)}{4\pi\rho R^2}\left[\boldsymbol{A}^{\mathrm{N}}\left(\frac{1}{2\beta^2}-\frac{1}{2\alpha^2}\right)+\frac{\boldsymbol{A}^{\mathrm{IP}}}{\alpha^2}+\frac{\boldsymbol{A}^{\mathrm{IS}}}{\beta^2}\right]$$

$$=\frac{g(\infty)}{4\pi\rho R^2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{3}{\beta^2}-\frac{1}{\alpha^2}\right)\sin 2i_h\cos\varphi_h\hat{\boldsymbol{R}}+\right.$$

$$\left.\frac{1}{\alpha^2}(\cos 2i_h \cos\varphi_h \hat{\boldsymbol{i}}_h - \cos i_h \sin\varphi_h \hat{\boldsymbol{\varphi}}_h)\right] \tag{4.8}$$

沿任意给定的方向(i_h, φ_h)，它随 R^{-2}衰减。

从式(4.5)中写出远场位移公式，为

$$\left.\begin{aligned}
u^{\mathrm{P}}(\boldsymbol{R},t) &= \boldsymbol{u}\cdot\hat{\boldsymbol{R}} = \frac{U_0 \mathrm{d}S}{2\pi\beta R}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^3 \dot{g}\left(t-\frac{R}{\alpha}\right)\times \\
&\qquad (\boldsymbol{e}\cdot\hat{\boldsymbol{R}})(\boldsymbol{n}\cdot\hat{\boldsymbol{R}}) + O\left(\frac{1}{R^2}\right) \\
u^{\mathrm{SV}}(\boldsymbol{R},t) &= \boldsymbol{u}\cdot\hat{\boldsymbol{i}}_h = \frac{U_0 \mathrm{d}S}{4\pi\beta R}\dot{g}\left(t-\frac{R}{\beta}\right)[(\boldsymbol{e}\cdot\hat{\boldsymbol{i}}_h)(\boldsymbol{n}\cdot\hat{\boldsymbol{R}}) \\
&\qquad + (\boldsymbol{e}\cdot\hat{\boldsymbol{R}})(\boldsymbol{n}\cdot\hat{\boldsymbol{i}}_h)] + O\left(\frac{1}{R^2}\right) \\
u^{\mathrm{SH}}(\boldsymbol{R},t) &= \boldsymbol{u}\cdot\hat{\boldsymbol{\varphi}}_h = \frac{U_0 \mathrm{d}S}{4\pi\beta R}\dot{g}\left(t-\frac{R}{\beta}\right)[(\boldsymbol{e}\cdot\hat{\boldsymbol{\varphi}}_h)(\boldsymbol{n}\cdot\hat{\boldsymbol{R}}) \\
&\qquad + (\boldsymbol{e}\cdot\hat{\boldsymbol{R}})(\boldsymbol{n}\cdot\hat{\boldsymbol{R}})] + O\left(\frac{1}{R^2}\right)
\end{aligned}\right\} \tag{4.9}$$

联系式(4.1)，可得

$$\left.\begin{aligned}
u^{\mathrm{P}}(\boldsymbol{R},t) &= \frac{U_0 \mathrm{d}S}{12\pi\beta}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^3 F\,\frac{\dot{g}\left(t-\frac{R}{\alpha}\right)}{R} + O\left(\frac{1}{R^2}\right) \\
u^{\mathrm{SV}}(\boldsymbol{R},t) &= \frac{U_0 \mathrm{d}S}{24\pi\beta}\,\frac{\partial F}{\partial i_h}\,\frac{\dot{g}\left(t-\frac{R}{\beta}\right)}{R} + O\left(\frac{1}{R^2}\right) \\
u^{\mathrm{SH}}(\boldsymbol{R},t) &= \frac{U_0 \mathrm{d}S}{24\pi\beta}\,\frac{1}{\sin i_h}\,\frac{\partial F}{\partial \varphi_h}\,\frac{\dot{g}\left(t-\frac{R}{\beta}\right)}{R} + O\left(\frac{1}{R^2}\right)
\end{aligned}\right\} \tag{4.10}$$

式中函数 F 由式(4.2)表述。

利用P、S 波位移的振幅比，可对震源的能量辐射情况作些理论上的估计。若认为$\ddot{g}\left(t-\dfrac{R}{\alpha}\right)$及$\ddot{g}\left(t-\dfrac{R}{\beta}\right)$有相同的平均值，在单位球内作积分，则可得 P 波能量 E_α 与 S 波能量 E_β 之比

$$\frac{E_\alpha}{E_\beta}=\frac{\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\dot{u}_R^2\sin i_h \mathrm{d}i_h\mathrm{d}\varphi_h}{\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}(\dot{u}_{i_h}^2+\dot{u}_{\varphi_h}^2)\sin i_h \mathrm{d}i_h\mathrm{d}\varphi_h}$$

$$=\frac{\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}(F)^2\sin i_h \mathrm{d}i_h\mathrm{d}\varphi_h}{\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left[\left(\frac{\partial F}{\partial i_h}\right)^2+\left(\frac{1}{\sin^2 i_h}\right)\left(\frac{\partial F}{\partial \varphi_h}\right)^2\sin i_h \mathrm{d}i_h\mathrm{d}\varphi_h\right]}\left[4\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^6\right] \tag{4.11}$$

式中 $u_R=u^{\mathrm{P}}, u_{i_h}=u^{\mathrm{SV}}, u_{\varphi_h}=u^{\mathrm{SH}}$。

对于垂直走滑点源，可得

$$\frac{E_\alpha}{E_\beta}=\frac{2}{3}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^6 \tag{4.12}$$

当泊松比 $\sigma=\frac{1}{4}$ 时，其值为 $\frac{2}{81}$。

同样可从式(4.5)的 $\boldsymbol{D}_2$ 项中导出近场位移公式

$$\left.\begin{aligned}
u^{\mathrm{P}}(\boldsymbol{R},t) &= \frac{U_0\mathrm{d}S}{2\pi R^2}\Big[3\int_{\beta/\alpha}^{1}g\left(t-\frac{sR}{\beta}\right)s\mathrm{d}s+\\
&\quad \frac{4}{3}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 g\left(t-\frac{R}{\alpha}\right)-g\left(t-\frac{R}{\beta}\right)\Big]\times\\
&\quad 3(\boldsymbol{e}\cdot\hat{\boldsymbol{R}})(\boldsymbol{n}\cdot\hat{\boldsymbol{R}})\\
u^{\mathrm{SV}}(\boldsymbol{R},t) &= \frac{U_0\mathrm{d}S}{4\pi R^2}\Big[-6\int_{\beta/\alpha}^{1}g\left(t-\frac{sR}{\beta}\right)s\mathrm{d}s-\\
&\quad 2\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 g\left(t-\frac{R}{\alpha}\right)+3g\left(t-\frac{R}{\beta}\right)\Big]\times\\
&\quad [(\hat{\boldsymbol{R}}\cdot\hat{\boldsymbol{R}})(\boldsymbol{n}\cdot\hat{\boldsymbol{i}}_h)+(\boldsymbol{e}\cdot\hat{\boldsymbol{i}}_h)(\boldsymbol{n}\cdot\hat{\boldsymbol{R}})]\\
u^{\mathrm{SH}}(\boldsymbol{R},t) &= \frac{U_0\mathrm{d}S}{4\pi R^2}\Big[-6\int_{\beta/\alpha}^{1}g\left(t-\frac{sR}{\beta}\right)s\mathrm{d}s-\\
&\quad 2\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 g\left(t-\frac{R}{\alpha}\right)+3g\left(t-\frac{R}{\beta}\right)\Big]\times\\
&\quad [(\boldsymbol{n}\cdot\hat{\boldsymbol{R}})(\boldsymbol{e}\cdot\hat{\boldsymbol{\varphi}}_h)+(\boldsymbol{n}\cdot\hat{\boldsymbol{i}}_h)(\boldsymbol{e}\cdot\hat{\boldsymbol{R}})]
\end{aligned}\right\} \tag{4.13}$$

或可写成

$$
\left.\begin{aligned}
u^{\mathrm{P}}(\boldsymbol{R},t) = {} & \frac{U_0\mathrm{d}S}{4\pi R^2}F(\lambda,\delta;i_h,\varphi_h)\Big[3\int_{\beta/\alpha}^{1}g\Big(t-\frac{sR}{\beta}\Big)s\mathrm{d}s + \\
& \frac{4}{3}\Big(\frac{\beta}{\alpha}\Big)^2 g\Big(t-\frac{R}{\alpha}\Big) - g\Big(t-\frac{R}{\beta}\Big)\Big] \\
u^{\mathrm{SV}}(\boldsymbol{R},t) = {} & \frac{U_0\mathrm{d}S}{24\pi R^2}\frac{\partial F}{\partial i_h}\Big[-6\int_{\beta/\alpha}^{1}g\Big(t-\frac{sR}{\beta}\Big)s\mathrm{d}s - \\
& 2\Big(\frac{\beta}{\alpha}\Big)^2 g\Big(t-\frac{R}{\alpha}\Big) + 3g\Big(t-\frac{R}{\beta}\Big)\Big] \\
u^{\mathrm{SH}}(\boldsymbol{R},t) = {} & \frac{U_0\mathrm{d}S}{2\pi\pi R^2}\frac{1}{\sin i_h}\frac{\partial F}{\partial\varphi_h}\Big[-6\int_{\beta/\alpha}^{1}g\Big(t-\frac{sR}{\beta}\Big)s\mathrm{d}s - \\
& 2\Big(\frac{\beta}{\alpha}\Big)^2 g\Big(t-\frac{R}{\alpha}\Big) + 3g\Big(t-\frac{R}{\beta}\Big)\Big]
\end{aligned}\right\} \quad (4.14)
$$

§2 有限移动源的远场辐射

近代地震学的研究证实，在许多情况下，地震震源的位置沿断裂带走向延伸，有时可长达近 800km。延伸破裂的移动速度约为 3～3.5km/s。这样的震源称为非零破裂速度的有限源。计算此类震源的辐射位移场最简单的方法是，将点位错源的位移场表达式以适当的时间延迟，作遍及有限源面积的积分。即模拟具有恒定速度的源的运动的叠加，此称为运动源模型。

如图 4.5，设断层面长为 L，宽为 W，法线为 $\boldsymbol{n}$，震源从 Q 点沿 ξ 方向的破裂速度为 v_f，取原点为 Q 的走向坐标系 (x_1^0, x_2^0, x_3^0)，$\boldsymbol{R}$ 为 Q 点至观测点 P 的矢径，Θ 为 $\boldsymbol{R}$ 与断层走向(ξ 方向)的夹角。

$S(\xi,\eta)$ 为断层面任一点，P 点与 Q、S 两点的距离分别为 R 和 D，若 $R \gg \xi, \eta$，则

$$
\begin{aligned}
D = {} & \left[(R\sin i_h\cos\varphi_h - \xi)^2 + (R\sin i_h\sin\varphi_h + \eta\cos\delta)^2 \right. \\
& \left. + (R\cos i_h + \eta\sin\delta)^2\right]^{1/2} \\
\approx {} & R - \xi\sin i_h\cos\varphi_h + \eta(\sin\delta\cos i_h + \cos\delta\sin i_h\sin\varphi_h) \quad (4.15)
\end{aligned}
$$

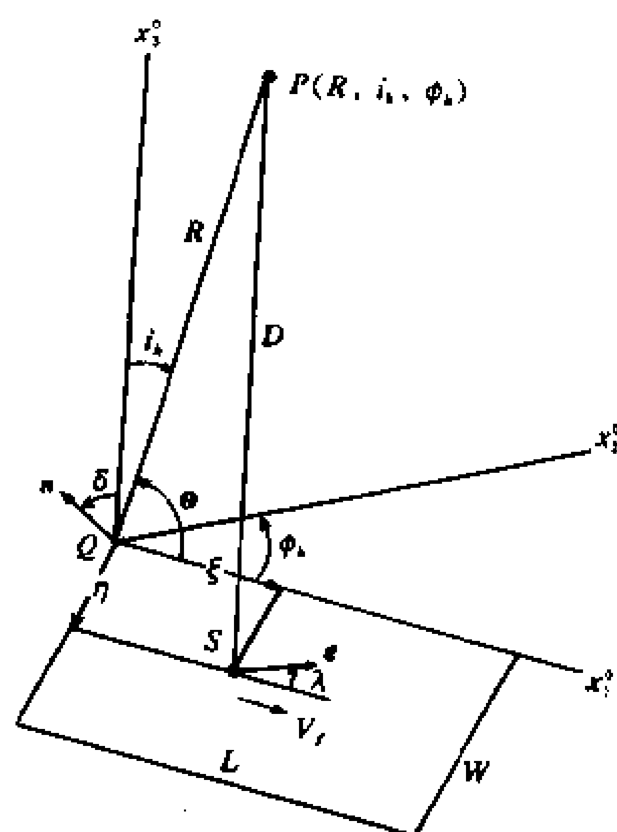


图 4.5 运动源模型

按远场公式(4.10)，用 $D\approx R-\xi\sin i_h\cos\varphi_h$ 替代 R，$t-\dfrac{\xi}{v_f}$ 替代 t，再作 ξ 从 0 至 L 的积分($W<L$)，就可得到运动源产生的远场位移

$$
\left.\begin{aligned}
u^{\mathrm{P}} &= \frac{W}{12\pi\beta}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^3\frac{F}{R}\int_0^L \dot{U}_0\left[\xi;t-\frac{R}{\alpha}-\right.\\
&\qquad \left.\frac{\xi}{v_f}\left(1-\frac{v_f}{\alpha}\cos\Theta\right)\right]\mathrm{d}\xi+O\left(\frac{1}{R^2}\right)\\
u^{\mathrm{SV}} &= \frac{W}{24\pi\beta R}\frac{\partial F}{\partial i_h}\int_0^L \dot{U}_0\left[\xi;t-\frac{R}{\beta}-\right.\\
&\qquad \left.\frac{\xi}{v_f}\left(1-\frac{v_f}{\beta}\cos\Theta\right)\right]\mathrm{d}\xi+O\left(\frac{1}{R^2}\right)\\
u^{\mathrm{SH}} &= \frac{W}{24\pi\beta R\sin i_h}\cdot\frac{\partial F}{\partial\varphi_h}\int_0^L \dot{U}_0\left[\xi;t-\frac{R}{\beta}-\right.\\
&\qquad \left.\frac{\xi}{v_f}\left(1-\frac{v_f}{\beta}\cos\Theta\right)\right]\mathrm{d}\xi+O\left(\frac{1}{R^2}\right)
\end{aligned}\right\}\tag{4.16}
$$

当给定函数 $F(\lambda,\delta;i_h,\varphi_h)$，且 $\cos\Theta=\sin i_h\cos\varphi_h$，那么，已知了位错 $U_0(\xi,t)$，就能计算出远场位移值。

设 $U_0(\xi,t)=g(t)s(\xi)$，且 $s(\xi)=\overline{U}$（常量），v_f 亦为常量，则有

$$
\begin{aligned}
&U_0\left[\xi;t-\frac{R}{\alpha}-\frac{\xi}{v_f}\left(1-\frac{v_f}{\beta}\cos\Theta\right)\right]\\
&=\overline{U}g\left[t-\frac{R}{\alpha}-\frac{\xi}{v_f}\left(1-\frac{v_f}{\alpha}\cos\Theta\right)\right]\\
&=-\frac{v_f\overline{U}}{1-\left(\frac{v_f}{\alpha}\right)\cos\Theta}\ \frac{\partial}{\partial\xi}g\left[t-\frac{R}{\alpha}-\frac{\xi}{v_f}\left(1-\frac{v_f}{\alpha}\cos\Theta\right)\right]
\end{aligned}
\tag{4.17}
$$

因而得到

$$
u^{\mathrm{P}}=\frac{P_0}{12\pi\beta}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^3\frac{F}{R}\left[\frac{g(t_\alpha)-g(t_\alpha-t_{d_\alpha})}{t_{d_\alpha}}\right] \tag{4.18}
$$

式中 $P_0=\overline{U}LW$，$t_\alpha=t-\dfrac{R}{\alpha}$，$t_{d_\alpha}=\dfrac{L}{v_f}\left(1-\dfrac{v_f}{\alpha}\cos\Theta\right)$

$$\tag{4.19}$$

P_0 称为震源强度，t_{d_α}为观测点的 P 波延迟时间。

若破裂速度低于横波速度(Subshear)，即 $v_f<\beta$，则 t_{d_α}一般为正值，这时，$\left(1-\dfrac{v_f}{\alpha}\cos\Theta\right)$称为 P 波的传播因数。

同理可得

$$
\left.
\begin{aligned}
u^{\mathrm{SV}}&=\frac{P_0}{24\pi\beta R}\ \frac{\partial F}{\partial i_h}\left[\frac{g(t_\beta)-g(t_\beta-t_{d_\beta})}{t_{d_\beta}}\right]\\
u^{\mathrm{SH}}&=\frac{P_0}{24\pi\beta R\sin i_h}\ \frac{\partial F}{\partial\varphi_h}\left[\frac{g(t_\beta)-g(t_\beta-t_{d_\beta})}{t_{d_\beta}}\right]
\end{aligned}
\right\}
\tag{4.20}
$$

式中 t_β 及 t_{d_β}与式(4.19)类似。

对于垂直走滑源($\lambda=0,\delta=\dfrac{\pi}{2}$)，令 $g(t)=H(t)$，则对于 $i_h=$

$\frac{\pi}{2}$，有

$$\left.\begin{aligned}
u^{P} &= -\frac{P_0 v_f}{4\pi\beta LR}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^3 \frac{\sin 2\varphi_h}{1-\frac{v_f}{\alpha}\cos\varphi_h}\left[H(t_\alpha)-H(t_\alpha-t_{d_\alpha})\right]\\
u^{SV} &= 0\\
u^{SH} &= -\frac{P_0 v_f}{4\pi\beta LR}\frac{\cos 2\varphi_h}{1-\frac{v_f}{\beta}\cos\varphi_h}\left[H(t_\beta)-H(t_\beta-t_{d_\beta})\right]
\end{aligned}\right\}$$

(4.21)

可看出，P 波的辐射因数为 $\sin 2\varphi_h/[1-(v_f/\alpha)\cos\varphi_h]$，而 S 波的辐射因数为 $\cos 2\varphi_h/[1-(v_f/\beta)\cos\varphi_h]$，它们的图象见图 4.6。

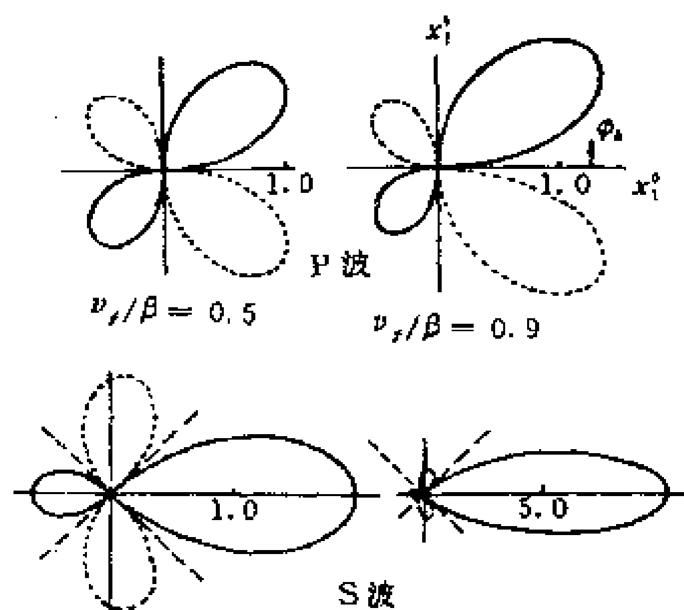


图 4.6 走滑移动源的 P、S 波水平辐射图案

更一般的情况是 v_f 是 ξ 的函数。我们用 $\bar{v}_f(\xi)$ 替代 v_f，而假设破裂到达点 $(\xi,\eta,0)$ 的时间 $\frac{\xi}{\bar{v}_f(\xi)}$ 为恒量，并假设 $s(\xi)=\bar{U}\Lambda(\xi)$，$g(t)=H(t)$，那么，从式(4.16)的第一式可得

$$u^{P} = u_R = \frac{\bar{U}W}{12\pi\beta}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^3 \frac{F}{R}\int_0^L \delta[f_\alpha(\xi)]\Lambda(\xi)\mathrm{d}\xi \quad (4.22)$$

式中 $f_\alpha(\xi)=t-\frac{R}{\alpha}-\frac{\xi}{v_f(\xi)}\left[1-\frac{v_f(\xi)}{\alpha}\cos\Theta\right]$。设在 $0<\xi<L$ 范围内，$v_f(\xi)$ 使得 $\xi=\xi_{\alpha_0}$ 时，$f_\alpha(\xi)=0$。按 δ 函数的移位性质，可有

$$\delta(f_\alpha(\xi))=\frac{\delta(\xi-\xi_{\alpha_0})}{|f'_\alpha(\xi_{\alpha_0})|} \tag{4.23}$$

则式(4.22)变成

$$\begin{aligned}u_R&=\frac{\overline{U}W}{12\pi\beta}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^3\frac{F}{R}\frac{\Lambda(\xi_{\alpha_0})}{f'_\alpha(\xi_{\alpha_0})}[H(\xi_{\alpha_0})-H(\xi_{\alpha_0}-L)]\\&=\frac{P_0}{12\pi\beta}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^3\frac{F}{R}\left[\frac{\Lambda(\xi_{\alpha_0})}{t_{d_\alpha}(\xi_{\alpha_0})}\right][H(\xi_{\alpha_0})-H(\xi_{\alpha_0}-L)]\end{aligned} \tag{4.24}$$

这里

$$P_0=\overline{U}LW,\ t_{d_\alpha}(\xi_{\alpha_0})=\frac{L}{\overline{v}_f(\xi_{\alpha_0})}\left[1-\frac{\overline{v}_f(\xi_{\alpha_0})}{\alpha}\cos\Theta-\frac{\xi_{\alpha_0}\overline{v}'_f(\xi_{\alpha_0})}{\overline{v}_f(\xi_{\alpha_0})}\right] \tag{4.25}$$

同理，对于 S 波，可得

$$\left.\begin{aligned}u^{SV}&=u_{i_h}=\frac{P_0}{24\pi R\beta}\frac{\partial F}{\partial i_h}\left[\frac{\Lambda(\xi_{\beta_0})}{t_{d_\beta}(\xi_{\beta_0})}\right][H(\xi_{\beta_0})-H(\xi_{\beta_0}-L)]\\u^{SH}&=u_{\varphi_h}=\frac{P_0}{24\pi\beta R\sin i_h}\frac{\partial F}{\partial\varphi_h}\left[\frac{\Lambda(\xi_{\beta_0})}{t_{d_\beta}(\xi_{\beta_0})}\right][H(\xi_{\beta_0})-H(\xi_{\beta_0}-L)]\end{aligned}\right\} \tag{4.26}$$

若破裂速度高于横波速度(Supershear)，即 $v_f>\beta$，仍设 $s(\xi)=\overline{U}$(常量)，v_f 为常量，$g(t)=H(t)$，则从式(4.26)知

$$u_{i_h}=\frac{P_0}{24\pi\beta R}\frac{\partial F}{\partial i_h}\frac{1}{t_{d_\beta}}[H(\xi_\beta)-H(\xi_\beta-L)] \tag{4.27}$$

式中

$$\xi_\beta = \frac{Lt_\beta}{t_{d_\beta}} = \frac{v_f\left(t - \frac{R}{\beta}\right)}{1 - \left(\frac{v_f}{\beta}\right)\cos\Theta} \tag{4.28}$$

类似于式(4.19)，当 $t_{d_\beta}\to 0$ 时，$v_f\to\beta$。

按前面的讨论，在 $v_f<\beta$ 时，若取 $i_h=\frac{\pi}{2}$，$\varphi_h=0$，则横向位移

$$\left.\begin{aligned} u_{i_h} &\to -\frac{P_0}{4\pi\beta R}\cos\lambda\cos\delta\dot{g}(t_\beta) \\ u_{\varphi_h} &\to -\frac{P_0}{4\pi\beta R}\cos\lambda\sin\delta\dot{g}(t_\beta) \end{aligned}\right\} \tag{4.29}$$

在破裂方向上，S 波波形幅度与源的时间函数的时间微商成正比，且 S 波辐射图案与 P 波明显不同。而

$$t_{d_\alpha} - t_{d_\beta} = \frac{L}{\beta}\left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right)\cos\Theta = \left(\frac{0.42L}{\beta}\right)\cos\Theta \tag{4.30}$$

对于多数地震，上述差值大致可达 1 分钟。此时，$t<\frac{R}{\beta}$无信号，$t<\frac{R}{\beta}$(即 $\xi_\beta>0$)，到达所有点的信号幅度与$\frac{1}{t_{d_\beta}}$成正比。

现在讨论 $v_f>\beta$ 的情况。让 $\cos\Theta_0=\frac{\beta}{v_f}$，那么 $\Theta<\Theta_0$ 时 $\xi_\beta<0$(即 $t<\frac{R}{\beta}$)，$\Theta>\Theta_0$ 时 $\xi_\beta>0$(即 $t>\frac{R}{\beta}$)。$\Theta=\Theta_0$ 称为马鞍锥(Mach cone)，其信号振幅反比于脉冲宽度。因 $|t_{d_\beta}|=\frac{L}{\beta}|\cos\Theta_0-\cos\Theta|$，当 $\Theta\to\Theta_0$ 时，$|t_{d_\beta}|\to 0$。此时，显然有

$$u_{i_h} \to \frac{P_0}{24\pi LR}\frac{\partial F}{\partial i_h}\delta\left(t - \frac{R}{\beta}\right) \tag{4.31}$$

类似地有

$$u_{\varphi_h} \to \frac{P_0}{24\pi LR\sin i_h}\frac{\partial F}{\partial \varphi_h}\delta\left(t - \frac{R}{\beta}\right) \tag{4.32}$$

对式(4.16)作 Fourier 变换，得到频率域的位移公式(以 P 波

为例)，即

$$u_R(\boldsymbol{R},\omega)=\frac{W}{12\pi\beta}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^3\frac{F}{R}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_\alpha R}[\mathrm{i}\omega g(\omega)]\times$$

$$\int_0^L s(\xi)\exp\left[-\mathrm{i}\omega\frac{\xi}{v_f}\left(1-\frac{v_f}{\alpha}\cos\Theta\right)\right]\mathrm{d}\xi$$

(4.33)

式中 $k_\alpha=\dfrac{\omega}{\alpha}$，$g(\omega)$ 为 $g(t)$ 的谱函数，且 $W<L$。这里仍设 $U_0=s(\xi)g(t)$ 及 $s(\xi)=\bar{U}$(常量)，则有

$$u^{\mathrm{P}}=u_R=\frac{P_0}{12\pi\beta}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^3\frac{F}{R}[\mathrm{i}\omega g(\omega)]\left(\frac{\sin X_\alpha}{X_\alpha}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_\alpha R-\mathrm{i}X_\alpha}$$

(4.34)

式中
$$X_\alpha=\frac{L}{2v_f}\omega_\alpha,\omega_\alpha=\omega\left(1-\frac{v_f}{\alpha}\cos\Theta\right)\tag{4.35}$$

此 u^{P} 称为有限移动源的谱位移。与位错点源相比较，可看出此位移被因子 $(\sin X_\alpha/X_\alpha)\exp(-\mathrm{i}X_\alpha)$ 所调制，或称作一级校正。此为都卜勒频率移位(The doppler freguency shift)，它既影响振幅也影响相位，它是频率 ω、偏振角 Θ、破裂持续时间 L/v_f 及马赫数(The mach numbers)v_f/α，v_f/β 的函数。当 $L[(\alpha/v_f)-\cos\Theta]$ 是波长的整数倍时，观测点处 P 波位移振幅为零，表示 P 波的相消干涉。其他情况将产生相位延迟和振幅叠加。

当断层面的宽度 W 与其长度 L 可比较时，距离 D 必须用式(4.15)，那么，式(4.33)变成

$$u_R(\boldsymbol{R},\omega)=\frac{1}{12\pi\beta}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^3\frac{F}{R}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_\alpha R}[\mathrm{i}\omega g(\omega)]\times$$

$$\int_0^L s(\xi)\exp\left[-\mathrm{i}\omega\frac{\xi}{v_f}\left(1-\frac{v_f}{\alpha}\cos\Theta\right)\right]\mathrm{d}\xi\times$$

$$\int_0^W \exp\left[-\mathrm{i}\omega\frac{\eta}{\alpha}(\sin\delta\cos i_h+\cos\delta\sin i_h\sin\varphi_h)\right]\mathrm{d}\eta$$

设 $s(\xi)=\bar{U}$(常量)，则

$$U_R(\boldsymbol{R},\omega)=\frac{P_0}{12\pi\beta}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^3\frac{F}{R}[\mathrm{i}\omega g(\omega)]\cdot$$

$$\left(\frac{\sin X_\alpha}{X_\alpha}\right)\left(\frac{\sin Y_\alpha}{Y_\alpha}\right)e^{ik_\alpha R-iX_\alpha-iY_\alpha} \tag{4.36}$$

式中

$$Y_\alpha=\frac{\omega W}{2\alpha}(\sin\delta\cos i_h+\cos\delta\sin i_h\sin\varphi_h) \tag{4.37}$$

§3　远场 P、S 波的射线理论

在均匀介质中，从源 ξ 发出的波以半径 αt（对于 P 波）和 βt（对于 S 波）的球波阵面的形式传播。在时间 r/α 和 r/β 到达任一观测点 $\boldsymbol{x}$，其传播距离 $r=|\boldsymbol{x}-\xi|$。推广至非均匀介质，则波阵面从 ξ 到 $\boldsymbol{x}$ 的走时 T 依赖于点的位置，这样，我们引入走时函数 $T(\boldsymbol{x},\xi)$。

对于运动方程 $\rho\ddot{u}_i=\sigma_{ij,j}$（除去在源点 $\boldsymbol{x}=\xi$ 的奇异性）给出一个尝试解

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)=\boldsymbol{U}(t-T)f(\boldsymbol{x}) \tag{4.38}$$

式中 $\boldsymbol{U}(t-T)$ 表示某一时刻的波阵面，它与时间有关，$f(\boldsymbol{x})$ 为波的振幅，与辐射方位及几何扩散因子有关。

对于各向异性的非均匀介质，$\sigma_{ij}=c_{ijkl}(\boldsymbol{x})\cdot u_{k,l}(\boldsymbol{x},t)$，直接代入运动方程可得

$$\rho\ddot{U}_i f=[c_{ijkl}(U_k f)_{,l}]_{,j}=c_{ijkl}fU_{k,l,j}+\{c_{ijkl},f\text{ 的微商项}\} \tag{4.39}$$

注意到 $U_k[t-T(\boldsymbol{x})]$，则 $U_{k,l,j}=\ddot{U}_k\dfrac{\partial T}{\partial x_l}\dfrac{\partial T}{\partial x_j}-\dot{U}_k\dfrac{\partial^2 T}{\partial x_l\partial x_j}$，代入式(4.39)并将 U_k 的二阶导数集中，可得

$$\left(\rho\delta_{ik}-c_{ijkl}\frac{\partial T}{\partial x_j}\frac{\partial T}{\partial x_l}\right)\ddot{U}_k f=E_i(U_k f) \tag{4.40}$$

式中 $\boldsymbol{E}$ 包括 $\boldsymbol{U}$ 本身及其一阶导数，c_{ijkl}，$f(\boldsymbol{x})$ 及它们的导数，对于给定的波阵面，$\boldsymbol{U}$ 的变化比 f 或 c_{ijkl} 快，且 $\dot{\boldsymbol{U}}$，$\ddot{\boldsymbol{U}}$ 更甚，因此，与 $\ddot{\boldsymbol{U}}$ 相比，$\boldsymbol{E}$ 必然很小，可认为

$$\left(\rho\delta_{ik}-c_{ijkl}\frac{\partial T}{\partial x_j}\frac{\partial T}{\partial x_l}\right)\ddot{U}_k f\approx 0 \tag{4.41}$$

它是齐次方程。为使方程成立，必有$\ddot{U}_k f$的系数行列式为零。即

$$\det\left|\rho\delta_{ik} - c_{ijkl}\frac{\partial T}{\partial x_j}\frac{\partial T}{\partial x_l}\right| = 0 \qquad (4.42)$$

它是关于$T(x)$的方程，即给出在弹性介质中，对于高频域可能的波阵面。

对于各向同性的非均匀介质，弹性常数为λ，μ，那么，式(4.42)可写成

$$\det\left|\rho\delta_{ik} - (\lambda+\mu)\frac{\partial T}{\partial x_k}\frac{\partial T}{\partial x_i} - \mu\delta_{ik}\frac{\partial T}{\partial x_k}\frac{\partial T}{\partial x_l}\right| = 0 \qquad (4.43)$$

为简洁，又可写成

$$\left(\nabla T\cdot\nabla T - \frac{\rho}{\lambda+2\mu}\right)\left(\nabla T\cdot\nabla T - \frac{\rho}{\mu}\right)^2 = 0 \qquad (4.44)$$

它是走时函数T所满足的程函方程(eikonal equation)，写成

$$(\nabla T)^2 = \frac{1}{c^2} \qquad (4.45)$$

式中传播速度c为α或β。

由程函方程的特征解可提供给定介质的射线族的状况。用∇T对式(4.43)作叉乘和点乘，得到

$$\left.\begin{array}{l}(\rho-\mu\nabla T\nabla T)f\ddot{U}\times\nabla T\approx 0\\ {[\rho-(\lambda+2\mu)\nabla T\nabla T]}f\ddot{U}\cdot\nabla T\approx 0\end{array}\right\} \qquad (4.46)$$

也就是说

$$\ddot{U}\times\nabla T = 0 \quad \text{和}(\nabla T)^2 = \frac{\rho}{\lambda+2\mu} = \frac{1}{\alpha(x)^2} \qquad (4.47)$$

及

$$\ddot{U}\cdot\nabla T = 0 \quad \text{和}(\nabla T)^2 = \frac{\rho}{\mu} = \frac{1}{\beta(x)^2} \qquad (4.48)$$

一族走时函数T表示一族射线。从式(4.47)及(4.48)知，波的射线方向由∇T决定。两式分别表示由传播速度$\alpha(x)$所确定的P波和由传播速度$\beta(x)$所确定的S波。

具体地说，射线为波阵面的法线方向。设波阵面S在时刻t到

达 $\boldsymbol{x}$ 处，其行为由 $t=T(\boldsymbol{x})$ 决定。过时刻 $\mathrm{d}t$ 后，S 到达 $\boldsymbol{x}+\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 处，且有 $t+\mathrm{d}t=T(\boldsymbol{x}+\mathrm{d}\boldsymbol{x})$，那么，$\mathrm{d}t=\nabla T\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 定义 $\boldsymbol{v}$ 为波阵面的前进速度，则在方向 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}'$ 处 $\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}'}{\mathrm{d}t}$。而波沿法线的传播速度 $\boldsymbol{c}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}$，且 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\mathrm{d}\boldsymbol{x}'\cos\theta$，故 $v=\frac{c}{\cos\theta}$。将它作平方代入程函方程式(4.45)中，得

$$v^2\geqslant\frac{1}{(\nabla T)^2}=c^2 \tag{4.49}$$

仅当 $v=c$ 时代表波阵面的传播。此时，$\boldsymbol{v}$ 与 ∇T 平行，或说 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}\perp S$，表示速度 c 是波阵面 S 的传播速度，且沿 S 的法线方向。也就是说，给出波阵面 S，其法线方向即为波的射线方向，波阵面以速度 c 沿射线方向传播。

设射线方程 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(\xi)$，沿射线单调变化，其微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}\xi}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}T}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}\xi}=g(\boldsymbol{x})\nabla T \tag{4.50}$$

式中 $g(\boldsymbol{x})$ 为射线方向的标量函数，其选取由参数 ξ 决定。若取 $g=c^2$，则

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}\xi}=c^2\nabla T=(c\nabla T)\boldsymbol{c} \tag{4.51}$$

表示参数 $\xi=T$ 为沿射线的走时。

射线是固定的空间曲线，为考查其几何特征，可引入参数 s，s 为沿射线由某参考点所得的距离，即 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(s)$，因有 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{c}\mathrm{d}T$，则

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}s}=\frac{\boldsymbol{c}\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s}=c\nabla T(\text{单位矢量}) \tag{4.52}$$

消去 T，可得到只有空间坐标的射线微分方程。可这样作：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}s}\right)&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\nabla T=\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}s}\cdot\nabla\right)\nabla T\\&=(c\nabla T\cdot\nabla)\nabla T=\frac{1}{2}c\nabla\left[(\nabla T)^2\right]\\&=\frac{1}{2}c\nabla\left(\frac{1}{c^2}\right)=-\frac{1}{c^2}\nabla c=\nabla\left(\frac{1}{c}\right)\end{aligned}$$

即射线微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}s}\right)=\nabla\left(\frac{1}{c}\right) \tag{4.53}$$

它表示空间一条固定的曲线。

对于均匀介质，$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}s^2}=0$，得到 $x=as+b$，它为一条直射线。

对于随深度 z 变化的非均匀介质，速度函数为 $c(z)$，速度的梯度方向 $\nabla(\frac{1}{c})$ 为 z 方向，即 $\hat{z}/\!/\nabla\left(\frac{1}{c}\right)$。假定一矢量

$$\boldsymbol{Q}=\hat{\boldsymbol{z}}\times\frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}s} \tag{4.54}$$

由于 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Q}}{\mathrm{d}s}=\hat{\boldsymbol{z}}\times\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}s}\right)=\hat{\boldsymbol{z}}\times\nabla\left(\frac{1}{c}\right)=0$，那么，$\boldsymbol{Q}$ 沿射线为常量，射线限于平行于 $\hat{z}$ 的平面内。将(4.54)的 Q 代入 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Q}}{\mathrm{d}s}$ 式中，得到

$$\frac{\sin i(z)}{c(z)}=p \tag{4.55}$$

式中参数 p 沿一条射线为常数，i 角是 z 的正方向与射线的夹角，此为 Snell 定律。

对于随地球径向半径 $\boldsymbol{r}$ 变化的球对称介质，速度函数为 $c(\boldsymbol{r})$。假定一矢量

$$\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{r}\times\frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s} \tag{4.56}$$

因 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Q}}{\mathrm{d}s}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}\times\frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}+\boldsymbol{r}\times\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}\right)=\boldsymbol{r}\times\nabla\left(\frac{1}{c}\right)=0$，故 $\boldsymbol{Q}$ 沿射线为常量，射线在垂直的径向平面内。且有

$$\frac{r\sin i(r)}{c(r)}=p(r) \tag{4.57}$$

式中 $p(r)$ 为 r 的参数。要注意它与式(4.55)表达的 p 有不同的量纲。

两种非均匀介质中的射线状况，可参看图 4.7。

按 Fermat 原理，波从射线上的固定点 A 传至固定点 B 的走

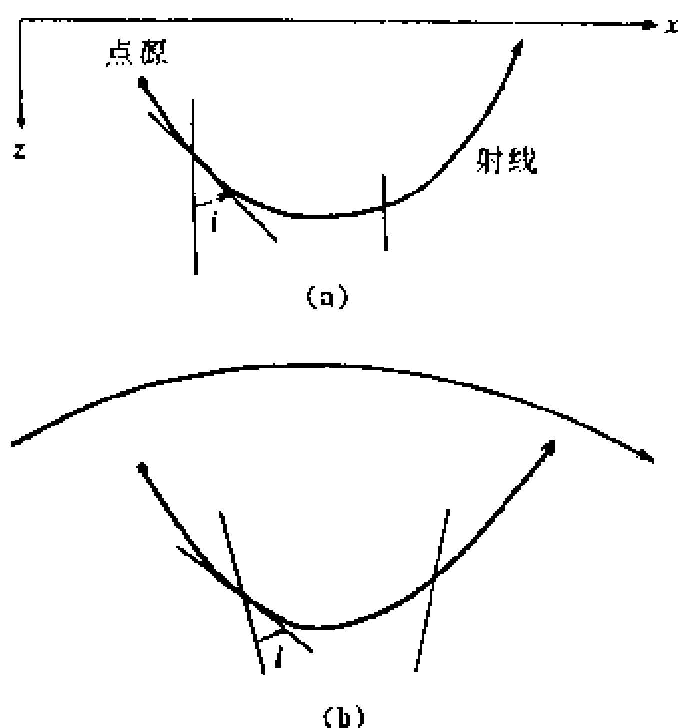


图 4.7　非均匀介质的射线(a) $c(z)$；(b) $c(r)$

时 $T(B,A)$ 取稳定值。即

$$T(B,A)=\int_A^B \frac{|\mathrm{d}\boldsymbol{x}|}{c(\boldsymbol{r})}=\int_A^B \frac{1}{c(\boldsymbol{x})}\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}\xi}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}\xi}\right)^{1/2}\mathrm{d}\xi \quad (4.58)$$

而从射线方程 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(\xi)$ 出发，因为 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}\xi}=g(\boldsymbol{x})\nabla T$，因此 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}\xi}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}\xi}=g^2(x)\nabla T\cdot\nabla T=\left(\frac{g}{c}\right)^2$，即对于给定的 ξ，要求 $g=c\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}\xi}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}\xi}\right)^{1/2}$。而一般情况下，$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}=\left(\frac{c}{g}\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}$，故有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}s}\right)&=\left(\frac{c}{g}\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left[\frac{1}{c}\left(\frac{c}{g}\right)\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}\xi}\right]\\&=\frac{c}{g}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left(\frac{1}{g}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}\xi}\right)=\nabla\left(\frac{1}{c}\right)\end{aligned}$$

得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left(\frac{1}{g}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}\xi}\right)=\frac{g}{c}\nabla\left(\frac{1}{c}\right)$$

又写成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left[\frac{1}{c(\boldsymbol{x})}\frac{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}\xi}}{\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}\xi}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}\xi}\right)^{1/2}}\right]=\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}\xi}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}\xi}\right)^{1/2}\nabla\left(\frac{1}{c}\right)$$

对于给定坐标 $x_i(i=1,2,3)$，此称为 Euler 方程，写成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left\{\frac{\partial}{\partial\left(\frac{\partial x_i}{\partial\xi}\right)}\left[\frac{1}{c(\boldsymbol{x})}\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}\xi}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}\xi}\right)^{1/2}\right]\right\}$$

$$=\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{1}{c(\boldsymbol{x})}\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}\xi}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}\xi}\right)^{1/2}\right] \tag{4.59}$$

引入射线管来描述非均匀介质中波的传播(图 4.8)。在给定波阵面上的点用正交坐标系来确定。对于球对称介质仍选用球坐标(R,i_h,φ_h)，为与射线方程中的参数 p 相联系，可写成(T,p,φ)，径向方向与走时 T 有关，单位矢量用 $\hat{\boldsymbol{t}}$ 表示，横向的两个方向的单位矢量分别为 $\hat{\boldsymbol{p}}$ 和 $\hat{\boldsymbol{\varphi}}$(图 4.9)。

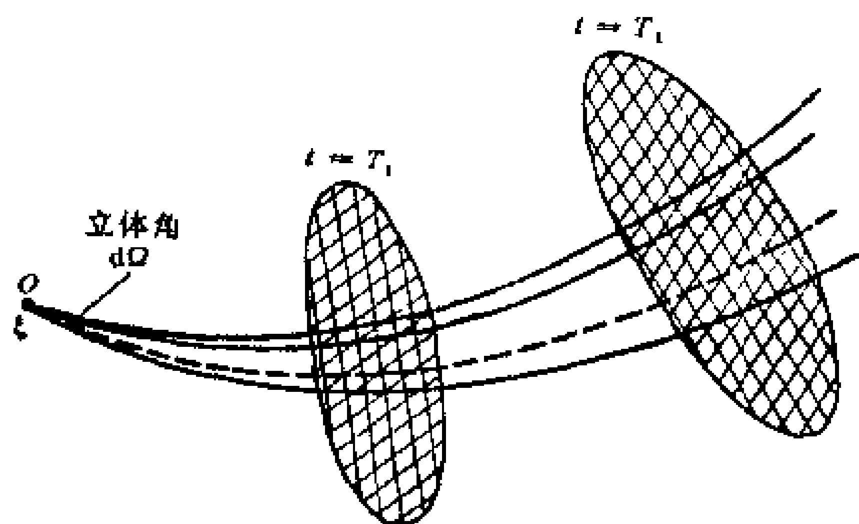


图 4.8　非均匀介质的射线管

对于 P 波位移，按式(4.38)，令

$$\boldsymbol{u}=(u^{(1)},0,0)=f^{(1)}(\boldsymbol{x})(U^{(1)}(t-T(\boldsymbol{x})),0,0) \tag{4.60}$$

对于 S 波位移，可令

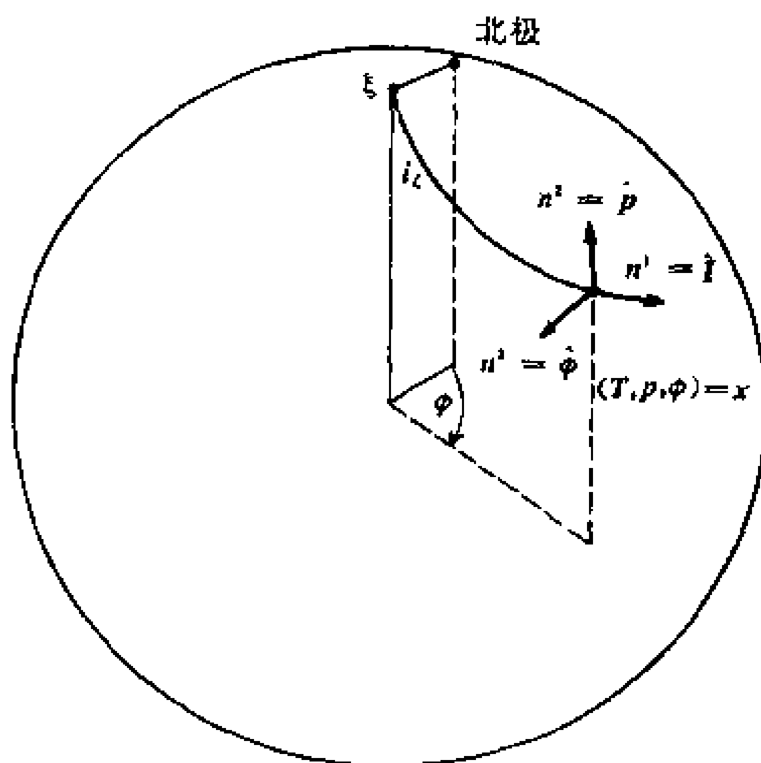


图 4.9 球对称介质的正交坐标系

$$\boldsymbol{u} = (0, u^{(2)}, u^{(3)}) = f^{(2)}(\boldsymbol{x})(0, U^{(2)}(t - T(\boldsymbol{x}), 0) + f^{(3)}(\boldsymbol{x})(0, 0, U^{(3)}(t - T(\boldsymbol{x}))) \tag{4.61}$$

式中 $f^{(1)}, f^{(2)}, f^{(3)}$ 表示波的振幅函数，其中 S 波有两个独立的分量，分别代表 SV 和 SH。

§4 球对称介质中的剪切位错源的远场辐射

在图 4.9 所示的坐标系中，除源点 $x=\xi$ 外，对于 P 波，运动方程可写成

$$\rho \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial t^2} = \frac{1}{\alpha h^{(2)} h^{(3)}} \left[\frac{\partial}{\partial T} (h^{(2)} h^{(3)} \rho \alpha) \frac{\partial u^{(1)}}{\partial T} \right] \tag{4.62}$$

还可化为

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[(\rho \alpha h^{(2)} h^{(3)})^{1/2} u^{(1)} \right] = \frac{\partial^2}{\partial T^2} \left[(\rho \alpha h^{(2)} h^{(3)})^{1/2} u^{(1)} \right] \tag{4.63}$$

式中 $h^{(2)}, h^{(3)}$ 为正交坐标系中的尺度因子。此式为一维波动方程，其解为

$$(\rho\alpha h^{(2)}h^{(3)})^{1/2}u^{(1)} = F(t-T) + F(t+T) \tag{4.64}$$

因而得到沿走时 T 增大方向的 P 波几何解为

$$\begin{aligned} u^{\mathrm{P}}(\boldsymbol{x},t) &= (u^{(1)},0,0) \\ &= \left(\frac{1}{\rho\alpha h^{(2)}h^{(3)}}\right)^{1/2} \mathscr{F}^{\mathrm{P}}(c^{(2)},c^{(3)})(\boldsymbol{U}^{(1)}(t-T(\boldsymbol{x})),0,0) \end{aligned} \tag{4.65}$$

式中 $\mathscr{F}^{\mathrm{P}}(c^{(2)},c^{(3)})$ 描述由源向不同方向 $(c^{(2)},c^{(3)})$ 发射的 P 波振幅辐射图案，$(h^{(2)}h^{(3)})^{-1/2}$ 为几何扩散因子。射线的几何扩散情况如图 4.8 的射线管所示，在立体角 $\mathrm{d}\Omega$ 中由 ξ 向外扩散的 P 波束，在 $\boldsymbol{x}$ 处波阵面上有面积 $[\mathscr{R}^{\mathrm{P}}(\boldsymbol{x},\xi)]^2\mathrm{d}\Omega$，均匀介质中的射线为直线，$\mathscr{R}^{\mathrm{P}}(\boldsymbol{x},\xi)=|\boldsymbol{x}-\xi|$，非均匀介质中的射线是弯曲的，$\mathscr{R}^{\mathrm{P}}(\boldsymbol{x},\xi)\propto(h^{(2)}h^{(3)})^{1/2}$。这样，P 波几何解又可表示为

$$u^{\mathrm{P}}(\boldsymbol{x},t) = \left(\frac{1}{\rho(\boldsymbol{x})\alpha(\boldsymbol{x})}\right)^{1/2}\frac{1}{\mathscr{R}^{\mathrm{P}}(\boldsymbol{x},\xi)}\cdot \mathscr{F}^{\mathrm{P}}(c^{(2)},c^{(3)})(\boldsymbol{U}^{(1)}(t-T^{\mathrm{P}}(\boldsymbol{x},\xi)),0,0) \tag{4.66}$$

同理，S 波的几何解为 $\boldsymbol{u}=(0,u^{(2)},u^{(3)})$，写为

$$u^{\mathrm{SV}}(\boldsymbol{x},t) = u^{(2)} = \left(\frac{1}{\rho(\boldsymbol{x})\beta(\boldsymbol{x})}\right)^{1/2}\frac{1}{\mathscr{R}^{\mathrm{S}}(\boldsymbol{x},\xi)}\cdot \mathscr{F}^{\mathrm{SV}}(p,\varphi)(0,\boldsymbol{U}^{(2)}(t-T^{\mathrm{S}}(\boldsymbol{x},\xi)),0) \tag{4.67}$$

$$u^{\mathrm{SH}}(\boldsymbol{x},t) = u^{(3)} = \left(\frac{1}{\rho(\boldsymbol{x})\beta(\boldsymbol{x})}\right)^{1/2}\frac{1}{\mathscr{R}^{\mathrm{S}}(\boldsymbol{x},\xi)}\cdot \mathscr{F}^{\mathrm{SH}}(p,\varphi)(0,0,\boldsymbol{U}^{(3)}(t-T^{\mathrm{S}}(\boldsymbol{x},\xi))) \tag{4.68}$$

可看出，对于 SV 波及 SH 波，其几何扩散因子 $\mathscr{R}^{\mathrm{S}}(\boldsymbol{x},\xi)$ 及走时 T^{S} 是相同的，但振幅辐射图案函数 $\mathscr{F}^{\mathrm{SV}}$ 和 $\mathscr{F}^{\mathrm{SH}}$ 却不相同。

下面考虑剪切位错点源辐射的远场位移的计算。将式(4.66)、(4.67)和(4.68)与式(4.10)中的三个公式相比较，令 $\dot{\bar{u}}\left(t-\frac{R}{\alpha}\right)=U_0\dot{g}\left(t-\frac{R}{\alpha}\right)$，$\dot{\bar{u}}\left(t-\frac{R}{\beta}\right)=U_0\dot{g}\left(t-\frac{R}{\beta}\right)$，$\mathrm{d}S=A$，且 $\frac{1}{\mathscr{R}(\boldsymbol{x},\xi)}=$

$\frac{1}{R}$，那么可得到球对称介质中的远场位移表示式为

$$
\left.
\begin{aligned}
\boldsymbol{u}^{\mathrm{P}}(\boldsymbol{x},t) &= \frac{\mathcal{F}^{\mathrm{P}}\mu(\xi)A\dot{\bar{u}}\,(t-T^{\mathrm{P}})\hat{\boldsymbol{l}}}{4\pi\rho^{1/2}(\xi)\rho^{1/2}(\boldsymbol{x})\alpha^{5/2}(\xi)\alpha^{1/2}(\boldsymbol{x})\mathcal{R}^{\mathrm{P}}(\boldsymbol{x},\xi)} \\
\boldsymbol{u}^{\mathrm{SV}}(\boldsymbol{x},t) &= \frac{\mathcal{F}^{\mathrm{SV}}\mu(\xi)A\dot{\bar{u}}\,(t-T^{\mathrm{S}})\hat{\boldsymbol{p}}}{4\pi\rho^{1/2}(\xi)\rho^{1/2}(\boldsymbol{x})\beta^{5/2}(\xi)\beta^{1/2}(\boldsymbol{x})\mathcal{R}^{\mathrm{S}}(\boldsymbol{x},\xi)} \\
\boldsymbol{u}^{\mathrm{SH}}(\boldsymbol{x},t) &= \frac{\mathcal{F}^{\mathrm{SH}}\mu(\xi)A\dot{\bar{u}}\,(t-T^{\mathrm{S}})\hat{\boldsymbol{\varphi}}}{4\pi\rho^{1/2}(\xi)\rho^{1/2}(\boldsymbol{x})\beta^{5/2}(\xi)\beta^{1/2}(\boldsymbol{x})\mathcal{R}^{\mathrm{S}}(\boldsymbol{x},\xi)}
\end{aligned}
\right\}
\tag{4.69}
$$

若观测点的位移 $\boldsymbol{u}^{\mathrm{P}}$,$\boldsymbol{u}^{\mathrm{SV}}$和 $\boldsymbol{u}^{\mathrm{SH}}$已知，则用它校正辐射图案、几何扩散以及震源与观测点的比例因子之后，可得到矩 M 对时间的微商，即

$$
\dot{M} = \mu A \dot{\bar{u}}\,(t-T) \tag{4.70}
$$

由它可推断剪切位错点源的等效力的分布。

习题与思考题

1．推导均匀介质中静态位移场式(4.8)。

2．由式(4.7)所定义的辐射图案出发，证明平移位错点源产生的远场 P 波和 S 波的振幅辐射图案，在震源球上取均方根分别是$\sqrt{\frac{4}{15}}$,$\sqrt{\frac{2}{5}}$。

3．在什么情况下会发生位移的doppler移位效应。描述此时的 P 波位移特征。

4．对称二阶张量的主轴，是非对角线张量分量为零的直角坐标轴。给定以位错滑动 $\boldsymbol{U}_0$ 和断层面法线 $\hat{\boldsymbol{\nu}}$ 为参考坐标的矩张量 $\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & M_0 \\ 0 & 0 & 0 \\ M_0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，绕 $\hat{\boldsymbol{\nu}}$ 轴旋转 45°，由此证明压力轴和张力轴为矩

张量的主轴。通过求主轴坐标系中向量偶极项的大小，证明断层滑动的地震矩 M_0 是矩张量 $\boldsymbol{M}$ 的不变量。

5. 在球对称介质中，沿相同方位以离源角 i_ξ 和 $i_\xi+\delta i_\xi$ 的两条射线与方位增加 $\delta\varphi$ 的两条射线组成射线管，它在震源 ξ 处的立体角为 $\sin i_\xi\ \delta i_\xi\delta\varphi$，证明此射线管在 $\boldsymbol{x}$ 处的横截面积是 $|\boldsymbol{x}|^2\cos i_x\sin\Delta\ \delta\Delta\delta\varphi$，此时的射线方程为 $p=\frac{|\xi|\sin i_\xi}{c(\xi)}=\frac{|\boldsymbol{x}|\sin i_x}{c(\boldsymbol{x})}$。并求证其几何扩散因子 $\mathscr{R}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$ 与相速度 $c(\boldsymbol{\xi})$ 的乘积为

$$\mathscr{R}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})c(\boldsymbol{\xi})=|\boldsymbol{x}||\boldsymbol{\xi}|\left[\frac{\cos i_x\cos i_\xi\sin\Delta}{p}\left|\frac{\partial\Delta}{\partial p}\right|\right]^{1/2}$$

由于等式右边的对称性，可得到互易性定理

$$\mathscr{R}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})c(\boldsymbol{\xi})=\mathscr{R}(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{x})c(\boldsymbol{x})$$

第五章　成层半空间的地震波

本章讨论在平间断面的弹性介质中,平面波及球面波的反射与透射问题。

§1　平面波的反射与折射

地震波从震源出发在地球介质中传播，其波阵面为球面，所经地球介质也是球状介质，经一段时间后，远离震源的球面波可近似看作平面波，在局部的介质范围内，弯曲界面可近似看作平面。所以，在许多具体的应用问题中，首先讨论平面波经平界面的传播。

对于平面波，由本征矢量 $\boldsymbol{L}$、$\boldsymbol{N}$ 及 $\boldsymbol{M}$ 描述 P、SV 和 SH 波运动。将均匀介质中的稳态平面波表达为

$$u = Se^{i\omega(\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{x}-t)} \tag{5.1}$$

式中 $\boldsymbol{S}$ 为位移振幅，它与质点振动性质有关。$\boldsymbol{s}$ 称为慢度矢量，$\boldsymbol{s}=s\hat{\boldsymbol{l}}$，慢度值 $s=\dfrac{1}{c}$、c 为波的传播速度。沿任意 $\boldsymbol{n}$ 方向的慢度值为 $\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{n}$。在直角坐标中，$\boldsymbol{s}=s_x\hat{x}+s_y\hat{y}+s_z\hat{z}$。如图 5.1 所示的垂直面（$x$，$z$ 面）内，波的水平慢度 $p=\dfrac{\sin i}{c}$，垂直慢度 $\eta=\dfrac{\cos i}{c}$，i 为波的入射角。

平面波经平界面会产生反射与折射，这种界面效应称为散射波效应，相应的反、折射波称为散射波（The scattering waves）。由内部平界面分开的两个相接触的半空间可由固体、液体及真空组成，因此，平面波可遇到五种可能的介质状况。即固体/固体，固

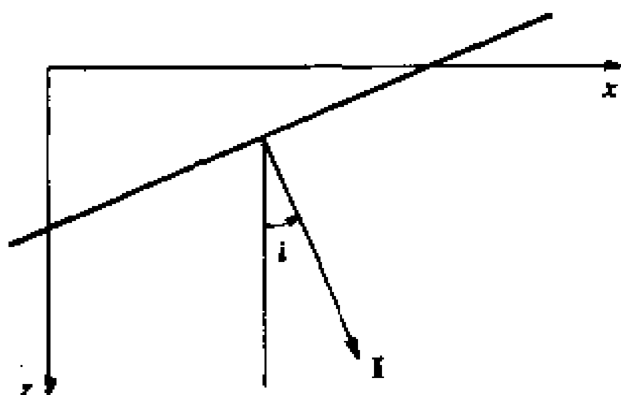


图 5.1 平面波的传播

体/液体，液体/液体，真空/固体及真空/液体。最后两种情况，称为自由半空间。

波经过界面产生散射波时符合运动学与动力学边界条件。所谓运动学条件是位移的三个分量在界面上连续。而当半空间为理想液体时，则只有位移的法向分量连续。所谓动力学条件是通过界面应力连续。而对于理想液体介质，同样，只有法向应力连续。至于自由表面，位移是自由的，不受限制，所需边界条件仅是应力为零。

设 P、S 波分别以 i 角和 j 角入射到界面上（图 5.2 及图 5.3），则入射的 P、SV 及 SH 波的位移分别表达为：

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{u}_{\mathrm{P}} &= A(\hat{x}\sin i - \hat{z}\cos i)\exp\left[\mathrm{i}\omega\left(\frac{x\sin i - z\cos i}{\alpha} - t\right)\right] \\ \boldsymbol{u}_{\mathrm{SV}} &= B(\hat{x}\cos j + \hat{z}\sin j)\exp\left[\mathrm{i}\omega\left(\frac{x\sin j - z\cos j}{\beta} - t\right)\right] \\ \boldsymbol{u}_{\mathrm{SH}} &= C\hat{y}\exp\left[\mathrm{i}\omega\left(\frac{x\sin j - z\cos j}{\beta} - t\right)\right] \end{aligned}\right\} \tag{5.2}$$

它们为上行入射，所以这些波也称为上行波（The upcoming waves）。

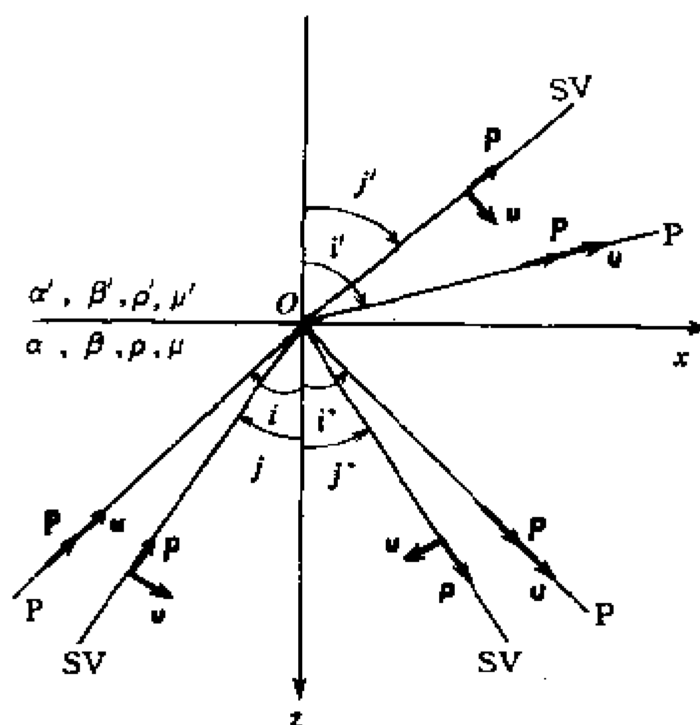


图 5.2　上行 P，SV 入射

又设 P、S 波的反射角为 i^* 和 j^*，则反射的 P、SV 和 SH 波的位移分别为

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{u}_{\mathrm{P}}^{*} &= A^{*}(\hat{x}\sin i^{*} + \hat{z}\cos i^{*})\exp\left[\mathrm{i}\omega\left(\frac{x\sin i^{*} + z\cos i^{*}}{\alpha} - t\right)\right] \\ \boldsymbol{u}_{\mathrm{SV}}^{*} &= B^{*}(-\hat{x}\cos j^{*} + \hat{z}\sin j^{*})\exp\left[\mathrm{i}\omega\left(\frac{x\sin j^{*} + z\cos j^{*}}{\beta} - t\right)\right] \\ \boldsymbol{u}_{\mathrm{SH}}^{*} &= C^{*}\hat{y}\exp\left[\mathrm{i}\omega\left(\frac{x\sin j^{*} + z\cos j^{*}}{\beta} - t\right)\right] \end{aligned}\right\} \tag{5.3}$$

它们也称为下行波（The downgoing waves）。

再设 P、S 波的透射（折射）角分别为 i'、j'，则透射的 P、SV 及 SH 波的位移分别为

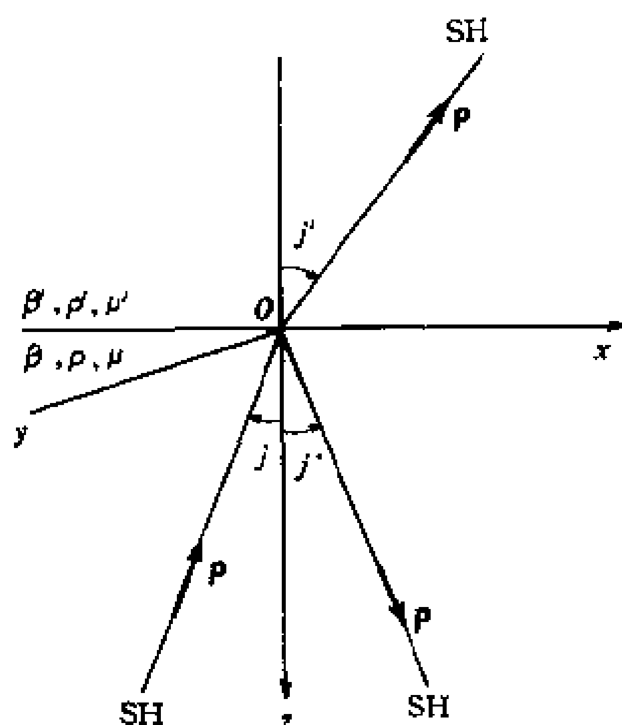


图 5.3　上行 SH 入射

$$\left.\begin{aligned}
\boldsymbol{u}'_{\mathrm{P}} &= A'(\hat{\boldsymbol{x}}\sin i' - \hat{\boldsymbol{z}}\cos i')\exp\left[\mathrm{i}\omega\left(\frac{x\sin i' - z\cos i'}{\alpha'} - t\right)\right] \\
\boldsymbol{u}'_{\mathrm{SV}} &= B'(\hat{\boldsymbol{x}}\cos j' + \hat{\boldsymbol{z}}\sin j')\exp\left[\mathrm{i}\omega\left(\frac{x\sin j' - z\cos j'}{\beta'} - t\right)\right] \\
\boldsymbol{u}'_{\mathrm{SH}} &= C'\hat{\boldsymbol{y}}\exp\left[\mathrm{i}\omega\left(\frac{x\sin j' - z\cos j'}{\beta'} - t\right)\right]
\end{aligned}\right\} \tag{5.4}$$

它们是上行波。

从图 5.2 和图 5.3 可看出，$\boldsymbol{u}_{\mathrm{P}}$沿 $\hat{\boldsymbol{l}}$ 方向，$\boldsymbol{u}_{\mathrm{SH}}$沿 $\hat{\boldsymbol{y}}$ 方向，$\boldsymbol{u}_{\mathrm{SV}}$沿 $\hat{\boldsymbol{l}}\times\hat{\boldsymbol{y}}$方向。而沿坐标方向的位移为 $\boldsymbol{u}(u\hat{\boldsymbol{x}},v\hat{\boldsymbol{y}},w\hat{\boldsymbol{z}})$。同时，有关 $\hat{\boldsymbol{z}}$ 方向的应力为 $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u},\hat{\boldsymbol{z}})=(\sigma_{zx},\sigma_{zy},\sigma_{zz})$，它与边界条件有关，按 P、SV 及 SH 波它们分别为

$$
T(u,\hat{z})=\begin{cases}2\mu\dfrac{\partial u}{\partial z},0,\lambda+\dfrac{\partial u}{\partial x}+(\lambda+2\mu)\dfrac{\partial w}{\partial z} & (\text{P 波})\\ \mu\left(\dfrac{\partial u}{\partial z}+\dfrac{\partial w}{\partial x}\right),0,2\mu\dfrac{\partial w}{\partial z} & (\text{SV 波})\\ 0,\mu\dfrac{\partial v}{\partial z},0 & (\text{SH 波})\end{cases} \tag{5.5}
$$

从式(5.2)至(5.5)可看出，当 P、SV 波入射到内部界面时，一般有四类散射波，即反射 P 与反射 SV，透射 P 与透射 SV。而当 SH 波入射到内部界面时，则仅产生反射 SH 与透射 SH。对于自由表面，透射波消失。

为明确，可运用图 5.4 上的符号。图中用升符表示上行波，用

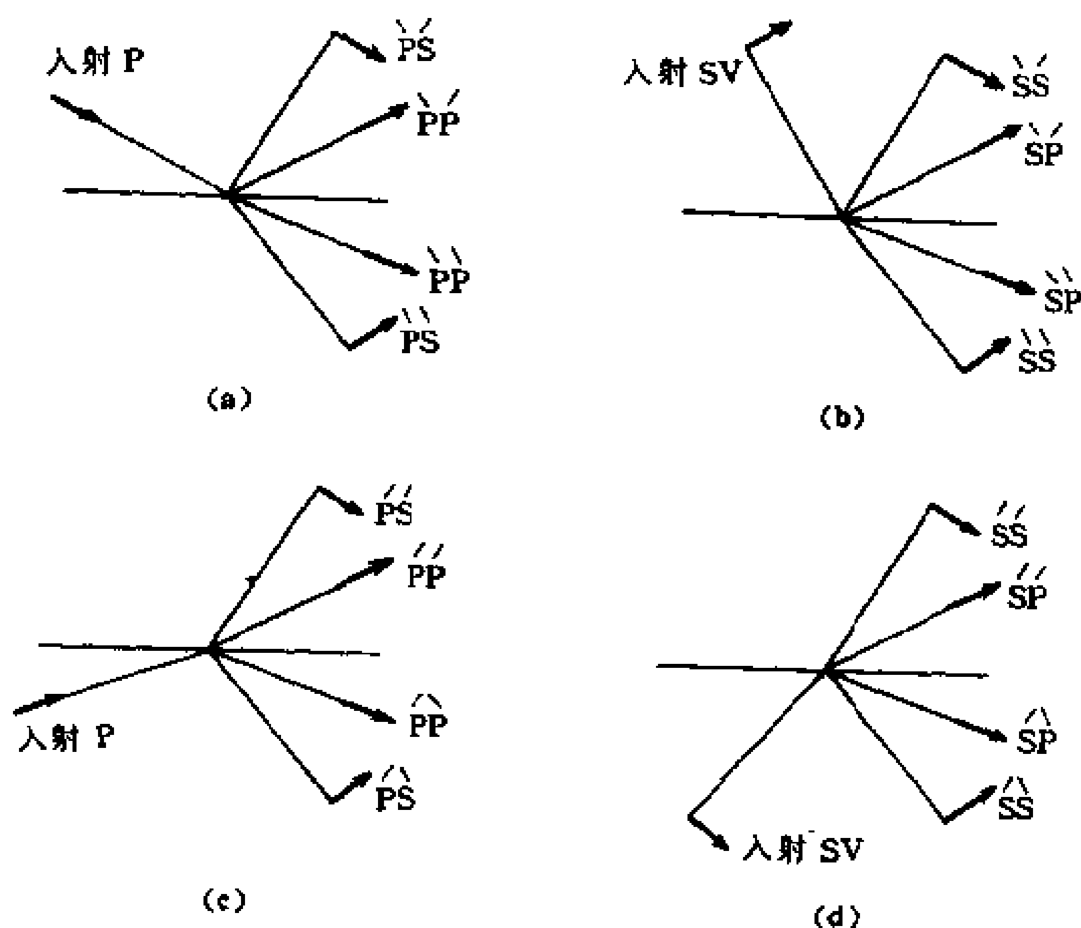


图 5.4　P-SV 入射的散射波

降符表示下行波。散射波一律用2个字母表示。如P波上行入射时，4个散射波分别为 PP、PS、PP、PS，其余类推。当4种可能的入射波同时存在时，其散射波的一般状况如图5.5所示。将它们组成散射矩阵(The scattering matrix)为

$$\begin{pmatrix} \mathrm{PP} & \mathrm{SP} & \mathrm{PP} & \mathrm{SP} \\ \mathrm{PS} & \mathrm{SS} & \mathrm{PS} & \mathrm{SS} \\ \mathrm{PP} & \mathrm{SP} & \mathrm{PP} & \mathrm{SP} \\ \mathrm{PS} & \mathrm{SS} & \mathrm{PS} & \mathrm{SS} \end{pmatrix}$$

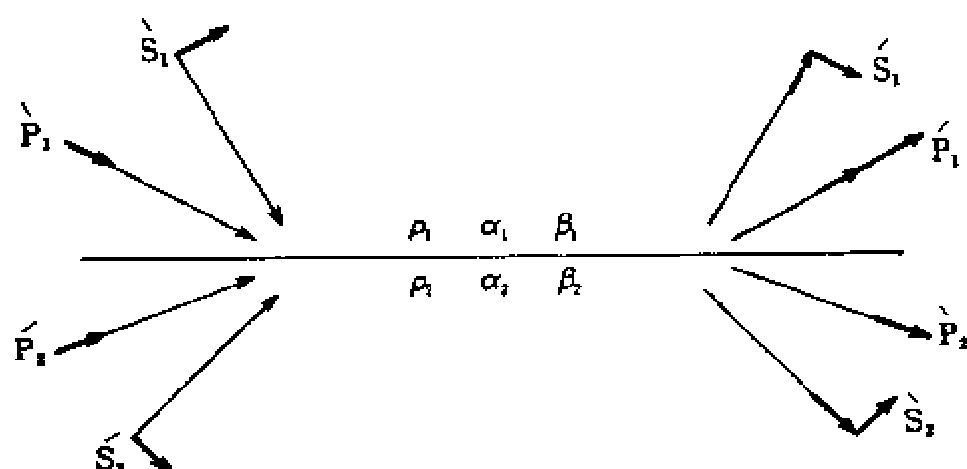


图5.5　P-SV入射的一般情况

矩阵的每一列代表由P或SV入射到内部界面时产生的4个散射波。与波的位移相联系，则散射矩阵的每一个元素代表可能的反射或折射因数。其值为散射波与入射波的位移振幅之比。例如，当P波入射时，$\mathrm{PP}=\frac{A^{\cdot}}{A}$，$\mathrm{PS}=\frac{B^{\cdot}}{A}$，$\mathrm{PP}=\frac{A'}{A}$，$\mathrm{PS}=\frac{B'}{A}$。

§2　自由表面的反射

定义半空间为 $z>0$，$z=0$ 的 xy 面为自由表面。当SH入射

时，在半空间的总位移为

$$\boldsymbol{u}=v\hat{\boldsymbol{y}}=\hat{\boldsymbol{y}}\left\{C\exp\left[\mathrm{i}\omega\left(\frac{x\sin j-z\cos j}{\beta}-t\right)\right]\right.$$

$$\left.+C^{*}\exp\left[\mathrm{i}\omega\left(\frac{x\sin j^{*}+z\cos j^{*}}{\beta}-t\right)\right]\right\} \tag{5.6}$$

在 $z=0$ 的界面上，其边界条件为应力分量 $\sigma_{zy}=\mu\dfrac{\partial v}{\partial z}=0$，即

$$(C\cos j)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\left(\frac{x\sin j}{\beta}-t\right)}-(C^{*}\cos j^{*})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\left(\frac{x\sin j^{*}}{\beta}-t\right)}=0 \tag{5.7}$$

由于此边界条件对于所有的 x、z 都适合，故式中两项带有关于 x、t 的因子

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\left(\frac{x\sin j}{\beta}-t\right)} \text{ 及 } \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\left(\frac{x\sin j^{*}}{\beta}-t\right)}$$

理应相同，则可得到 $j=j^{*}$，此即为反射定律。于是从式(5.7)中得到 $C=C^{*}$。将它代入式(5.6)可知，地表位移恒为入射波位移的两倍。

当 P 波入射时，散射波为反射 P 和反射 SV，则位移矢量为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}&=(u\hat{\boldsymbol{x}}+w\hat{\boldsymbol{z}})\\&=A(\hat{\boldsymbol{x}}\sin i-\hat{\boldsymbol{z}}\cos i)\exp\left[\mathrm{i}\omega\left(\frac{x\sin i-z\cos i}{\alpha}-t\right)\right]+\\&\quad A^{*}(\hat{\boldsymbol{x}}\sin i^{*}+\hat{\boldsymbol{z}}\cos i^{*})\exp\left[\mathrm{i}\omega\left(\frac{x\sin i^{*}+z\cos i^{*}}{\alpha}-t\right)\right]+\\&\quad B^{*}(-\hat{\boldsymbol{x}}\cos j^{*}+\hat{\boldsymbol{z}}\sin j^{*})\exp\left[\mathrm{i}\omega\left(\frac{x\sin j^{*}+z\cos j^{*}}{\beta}-t\right)\right]\end{aligned} \tag{5.8}$$

自由表面的边界条件为：在 $z=0$ 的界面上，σ_{zx}和 σ_{zz}为零。其表达式的每项中带有 x、t 的各因子 $\exp\left[\mathrm{i}\omega\left(\dfrac{\sin i}{\alpha}x-t\right)\right]$、$\exp\left[\mathrm{i}\omega\left(\dfrac{\sin i^{*}}{\alpha}x-t\right)\right]$及 $\exp\left[\mathrm{i}\omega\left(\dfrac{\sin j^{*}}{\beta}x-t\right)\right]$应是相同的，因此可得到

$$
\begin{cases} i^{*} = i \\ \dfrac{\sin i}{\alpha} = \dfrac{\sin j^{*}}{\beta} \end{cases} \tag{5.9}
$$

它们是 Snell 定律。又由于水平慢度 $p=\frac{\sin i}{\alpha}=\frac{\sin j^{*}}{\beta}$,故式(5.9)表达了 j 波在平界面传播的重要特征,即入射波与散射波有共同的水平慢度值,此称为水平慢度的不变性。在射线理论中,p 也称为射线参数。

现在,用边界条件解出反射因数

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{A^{*}}{A} &= \dot{\acute{P}}\dot{P} = \frac{-\left(\frac{1}{\beta^{2}}-2p^{2}\right)^{2}+4p^{2}\frac{\cos i}{\alpha}\frac{\cos j}{\beta}}{\left(\frac{1}{\beta^{2}}-2p^{2}\right)^{2}+4p^{2}\frac{\cos i}{\alpha}\frac{\cos j}{\beta}} \\
\frac{B^{*}}{A} &= \dot{\acute{P}}\dot{S} = \frac{4\frac{\alpha}{\beta}p\frac{\cos i}{\alpha}\left(\frac{1}{\beta^{2}}-2p^{2}\right)}{\left(\frac{1}{\beta^{2}}-2p^{2}\right)^{2}+4p^{2}\frac{\cos i}{\alpha}\frac{\cos j}{\beta}}
\end{aligned}\right\} \tag{5.10}
$$

在散射波中,对于反射 P 波,位移的水平分量的振幅比为 A^{*}/A,垂直分量的振幅比为 $-\frac{A^{*}}{A}$;至于反射 SV 波,位移的水平分量的振幅比为$(-B^{*}\cos j/(A\sin i)$,而垂直分量的振幅比为$(-B^{*}\sin j/(A\cos i)$。而地表总位移,计算可得为

$$
\boldsymbol{u}_0 = A(\hat{\boldsymbol{x}}\sin 2j - \hat{\boldsymbol{z}}\cos 2j)\,\frac{2(\alpha/\beta)^{2}\cos i}{\sin 2i\sin 2j + (\alpha/\beta)^{2}\cos^{2}2j}\mathrm{e}^{i\omega\left(\frac{x\sin i}{\alpha}-t\right)} \tag{5.11}
$$

它给出

$$
\left(\frac{u}{w}\right)_0 = \tan(\pi - 2j) \tag{5.12}
$$

即对于 P 波入射,自由表面的位移总矢量与垂直方向成 $2j$ 角度,如图 5.6 所示。

当 SV 波入射时,产生反射 SV 波与反射 P 波,按 Snell 定律,

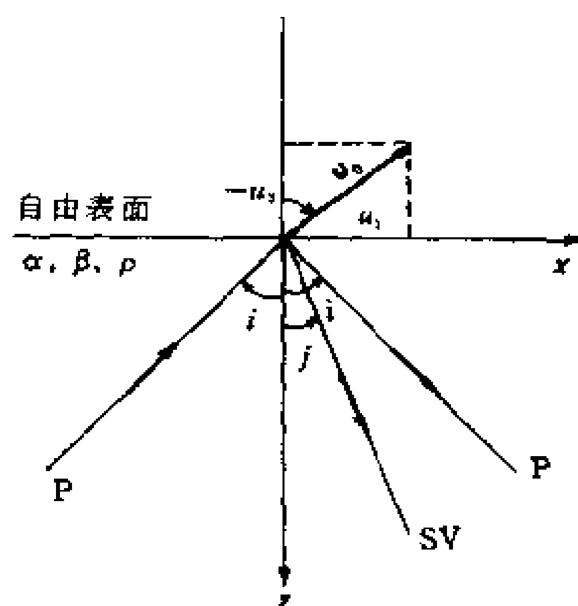


图 5.6 P 入射自由表面的总位移

位移矢量表达为

$$u=\left[B(\hat{x}\cos j+\hat{z}\sin j)e^{i\omega z\cos j/\beta}+A^{\cdot}(\hat{x}\sin i+\hat{z}\cos i)e^{-i\omega z\cos i/\alpha}+B^{\cdot}(-\hat{x}\cos j+\hat{z}\sin j)e^{-i\omega z\cos j/\beta}\right]e^{i\omega(x\sin j/\beta-t)} \tag{5.13}$$

按边界条件可得反射因数为

$$\left.\begin{aligned}\frac{A^{\cdot}}{B}=\dot{\mathrm{S}}\dot{\mathrm{P}}=\frac{4\dfrac{\beta}{\alpha}p\dfrac{\cos j}{\beta}\left(\dfrac{1}{\beta^2}-2p^2\right)}{\left(\dfrac{1}{\beta^2}-2p^2\right)^2+4p^2\dfrac{\cos i}{\alpha}\dfrac{\cos j}{\beta}}\\ \frac{B^{\cdot}}{B}=\dot{\mathrm{S}}\dot{\mathrm{S}}=\frac{\left(\dfrac{1}{\beta^2}-2p^2\right)^2-4p^2\dfrac{\cos i}{\alpha}\dfrac{\cos j}{\beta}}{\left(\dfrac{1}{\beta^2}-2p^2\right)^2+4p^2\dfrac{\cos i}{\alpha}\dfrac{\cos j}{\beta}}\end{aligned}\right\} \tag{5.14}$$

值得注意的是，当入射角 $j=j_0=\sin^{-1}\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)$ 时，反射 P 波的反射角 $i=\dfrac{\pi}{2}$，这里 j_0 为临界角，此时

$$\left.\begin{aligned}\acute{S}\acute{P} &= \frac{4\left(1-\dfrac{\beta^2}{\alpha^2}\right)^{1/2}}{\left(\dfrac{\alpha^2}{\beta^2}-2\right)}\\ \acute{S}\acute{S} &= -1\end{aligned}\right\} \tag{5.15}$$

对于泊松比 $\sigma=\frac{1}{4}$的介质，可得 $j_0\approx 35°16'$。

若入射角 $j>j_0$，则 i 角不再是实数（因 $\sin i>1$），可写成 $i=\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}\gamma$（$\gamma$ 为实数）。此时，$\cos i$ 变成纯虚数，定义

$$\cos i = -\mathrm{i}(\sin^2 i-1)^{1/2} = -\mathrm{i}(\alpha/\beta)(\sin^2 j-\sin^2 j_0)^{1/2} \tag{5.16}$$

相应的反射因数为

$$\left.\begin{aligned}\acute{S}\acute{P} &= 2(\beta/\alpha)\tan 2j\sin\varepsilon\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)}\\ \acute{S}\acute{S} &= \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\varepsilon}\end{aligned}\right\} \tag{5.17}$$

这里
$$\tan\varepsilon = \frac{\cos 2j\cot 2j}{2\sin j\left(\sin^2 j-\dfrac{\beta^2}{\alpha^2}\right)^{1/2}}$$

ε 角称为相移角。

此时的位移分量写为

$$\left.\begin{aligned}u_{\mathrm{P}} &= 2B\sin j\tan 2j\sin\varepsilon\left[\mathrm{i}\hat{x}+\left(1-\frac{c^2}{\alpha^2}\right)^{1/2}\hat{z}\right]\\ &\quad\cdot\exp\left[-\left(\frac{w}{\beta}\right)z\left(\sin^2 j-\frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)^{1/2}+\mathrm{i}\omega\left(\frac{x}{c}-t\right)-\mathrm{i}\varepsilon\right]\\ u_{\mathrm{SV}} &= B(-\hat{x}\cos j+\hat{z}\sin j)\exp\left[\mathrm{i}\omega\left(\frac{x\sin j+z\cos j}{\beta}-t\right)-2\mathrm{i}\varepsilon\right]\end{aligned}\right\} \tag{5.18}$$

式中 $c=\frac{\alpha}{\sin i}=\frac{\beta}{\sin j}$。从式(5.18)中可看出，对于超过临界角 j_0 的入射，反射 P 波随深度增加按指数衰减，这种波为不均匀平面波。

它沿 x 方向的相速度 $c=\beta/\sin j>\beta$，其振幅和相位都发生畸变。其垂直位移相对于水平位移有 $\frac{\pi}{2}$ 的相移。而反射 SV 波则作全反射，但有相移 ε。表明反射波的脉冲形状不再与入射波相同。

P 波和 SV 波入射在自由表面的所有可能的反射因数组成散射矩阵

$$\begin{pmatrix} \acute{\text{P}}\grave{\text{P}} & \acute{\text{S}}\grave{\text{P}} \\ \acute{\text{P}}\grave{\text{S}} & \acute{\text{S}}\grave{\text{S}} \end{pmatrix}$$

图 5.7 表示 $0\leqslant p\leqslant\alpha^{-1}$ 时各个反射因数随 p 的变化状况。

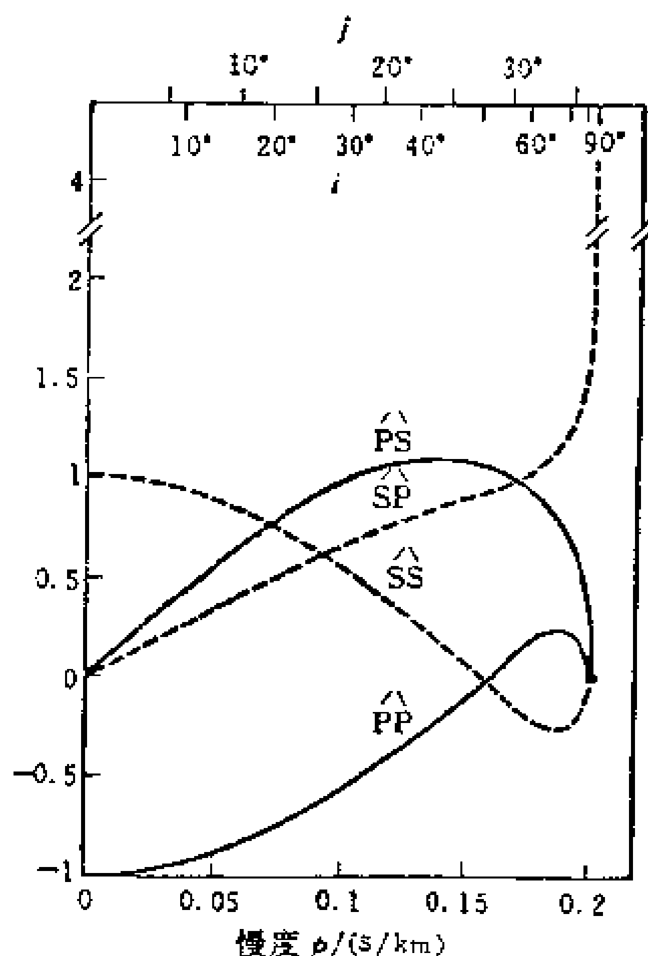


图 5.7　反射因数随 p 变化图

§ 3　固体-固体界面上的反射与折射

当 SH 波入射在固体-固体分界面上时，边界条件为位移 v 分量及应力 σ_{yz} 连续，这时得到的散射波如图 5.8 所示。

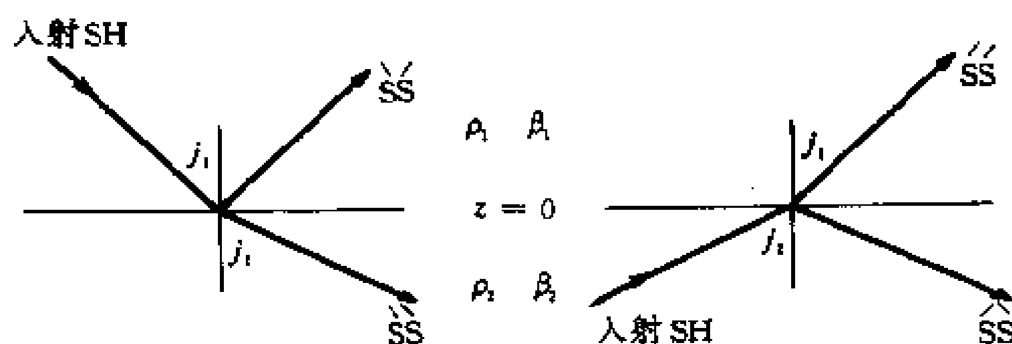


图 5.8　SH 入射在固体-固体界面产生的散射波

其散射矩阵为

$$\begin{bmatrix} \grave{S}\acute{S} & \acute{S}\acute{S} \\ \grave{S}\grave{S} & \acute{S}\grave{S} \end{bmatrix}$$

且有

$$\left.\begin{aligned} \grave{S}\acute{S} &= \frac{\rho_1\beta_1\cos j_1 - \rho_2\beta_2\cos j_2}{\Delta}, & \acute{S}\acute{S} &= \frac{2\rho_2\beta_2\cos j_2}{\Delta} \\ \grave{S}\grave{S} &= \frac{2\rho_1\beta_1\cos j_1}{\Delta}, & \acute{S}\grave{S} &= -\grave{S}\acute{S} \end{aligned}\right\}$$

其中
$$\Delta=\rho_1\beta_1\cos j_1+\rho_2\beta_2\cos j_2$$

当 P、SV 波入射时，其一般情况如图 5.5 所示。4 种可能的入射波的位移振幅分别为 $\grave{P}_1$、$\grave{S}_1$、$\acute{P}_2$、$\acute{S}_2$，4 种散射波具有位移振幅 $\acute{P}_1$、$\acute{S}_1$、$\grave{P}_2$、$\grave{S}_2$。根据位移分量 u、w 及应力分量 σ_{zx}、σ_{zz} 在界面上的连

续性，得到4个方程

$$
\left.\begin{aligned}
&\sin i_1(\grave{P}_1+\acute{P}_1)+\cos j_1(\grave{S}_1+\acute{S}_1)\\
&=\sin i_2(\grave{P}_2+\acute{P}_2)+\cos j_2(\grave{S}_2+\acute{S}_2)\\
&\cos i_1(\grave{P}_1-\acute{P}_1)-\sin j_1(\grave{S}_1-\acute{S}_1)\\
&=\cos i_2(\grave{P}_2-\acute{P}_2)-\sin j_2(\grave{S}_2-\acute{S}_2)\\
&2\rho_1\beta_1^2p\cos i_1(\grave{P}_1-\acute{P}_1)+\rho_1\beta_1(1-2\beta_1^2p^2)(\grave{S}_1-\acute{S}_1)\\
&=2\rho_2\beta_2^2p\cos i_2(\grave{P}_2-\acute{P}_2)+\rho_2\beta_2(1-2\beta_2^2p^2)(\grave{S}_2-\acute{S}_2)\\
&\rho_1\alpha_1(1-2\beta_1^2p^2)(\grave{P}_1+\acute{P}_1)-2\rho_1\beta_1^2p\cos j_1(\grave{S}_1+\acute{S}_1)\\
&=\rho_2\alpha_2(1-2\beta_2^2p^2)(\grave{P}_2+\acute{P}_2)-2\rho_2\beta_2^2p\cos j_2(\grave{S}_2+\acute{S}_2)
\end{aligned}\right\}
$$

重排这些方程，使散射波在右边，入射波在左边，可得

$$
\begin{pmatrix}
\sin i_1 & \cos j_1 & -\sin i_2 & -\cos j_2\\
\cos i_1 & -\sin j_1 & \cos i_2 & -\sin j_2\\
2\rho_1\beta_1^2p\cos i_1 & \rho_1\beta_1(1-2\beta_1^2p) & 2\rho_2\beta_2^2p\cos i_2 & \rho_2\beta_2(1-2\beta_2^2p^2)\\
\rho_1\alpha_1(1-2\beta_1^2p^2) & -2\rho_1\beta_1^2p\cos j_1 & -\rho_2\alpha_2(1-2\beta_2^2p^2) & 2\rho_2\beta_2^2p\cos j_2
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}\acute{P}_1\\ \acute{S}_1\\ \grave{P}_2\\ \grave{S}_2\end{pmatrix}
$$

$$
=\begin{pmatrix}
-\sin i_1 & -\cos j_1 & \sin i_2 & \cos j_2\\
\cos i_1 & -\sin j_1 & \cos i_2 & -\sin j_2\\
2\rho_1\beta_1^2p\cos i_1 & \rho_1\beta_1(1-2\beta_1^2p^2) & 2\rho_2\beta_2^2p\cos i_2 & \rho_2\beta_2(1-2\beta_2^2p^2)\\
\rho_1\alpha_1(1-2\beta_1^2p^2) & 2\rho_1\beta_1^2p\cos j_1 & \rho_2\alpha_2(1-2\beta_2^2p^2) & \rho_2\beta_2^2p\sin j_2
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}\grave{P}_1\\ \grave{S}_1\\ \acute{P}_2\\ \acute{S}_2\end{pmatrix}
\tag{5.19}
$$

将 $\sin i=\alpha_1p$，$\sin i_2=\alpha_2p$，$\sin j_1=\beta_1p$，$\sin j_2=\beta_2p$ 代入式(5.19)，式(5.19)可写成

$$
\mathbf{N}\begin{bmatrix}\grave{\mathrm{P}}_1\\ \grave{\mathrm{S}}_1\\ \acute{\mathrm{P}}_2\\ \acute{\mathrm{S}}_2\end{bmatrix}=\mathbf{M}\begin{bmatrix}\acute{\mathrm{P}}_1\\ \acute{\mathrm{S}}_1\\ \grave{\mathrm{P}}_2\\ \grave{\mathrm{S}}_2\end{bmatrix}
$$

当 P 波下行入射时，即 $\grave{\mathrm{S}}_1=\acute{\mathrm{P}}_2=\acute{\mathrm{S}}_2=0$，且令 $\grave{\mathrm{P}}_1=1$，上式变成

$$
\mathbf{N}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}=\mathbf{M}=\begin{bmatrix}\acute{\mathrm{P}}_1\\ \acute{\mathrm{S}}_1\\ \grave{\mathrm{P}}_2\\ \grave{\mathrm{S}}_2\end{bmatrix}
$$

等式左边变成矩阵 N 的第一列。为明确，可写成

$$
\mathbf{N}_{(1)}=\begin{bmatrix}\alpha_1 p\\ \cos i_1\\ 2\rho_1\beta_1^2 p\cos i_1\\ \rho_1\alpha_1(1-2\beta_1^2p^2)\end{bmatrix}=\mathbf{M}\begin{bmatrix}\grave{\mathrm{P}}\acute{\mathrm{P}}\\ \grave{\mathrm{P}}\acute{\mathrm{S}}\\ \grave{\mathrm{P}}\grave{\mathrm{P}}\\ \grave{\mathrm{P}}\grave{\mathrm{S}}\end{bmatrix}
$$

或写成

$$
\begin{bmatrix}\grave{\mathrm{P}}\acute{\mathrm{P}}\\ \grave{\mathrm{P}}\acute{\mathrm{S}}\\ \grave{\mathrm{P}}\grave{\mathrm{P}}\\ \grave{\mathrm{P}}\grave{\mathrm{S}}\end{bmatrix}=\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}_{(1)}
$$

其他三种情况类似。这样就得到全部反、折射因数，用散射矩阵表示为

$$
\begin{pmatrix}
PP & SP & PP & SP \\
PS & SS & PS & SS \\
PP & SP & PP & SP \\
PS & SS & PS & SS
\end{pmatrix} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}
$$

散射因数的求得，包含有大量的代数运算，上述矩阵运算较为整齐，计算量也较小。

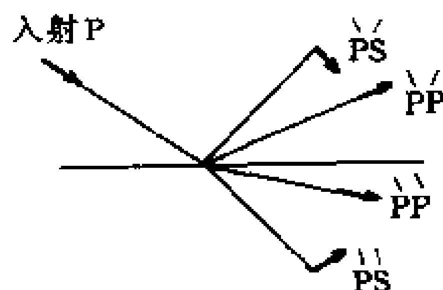


图 5.9　P下行入射在介面上的能流分析

波入射到平界面上，界面上不能储存能量，即离开界面的能流必须与入射波的能流相等。此称为能流守恒。

对于给定频率 ω 的稳态下行P波，在一个周期内通过波阵面单位面积上的平均能流为 $\rho\alpha\omega^2|\mathrm{P}|^2$。如图 5.9 所示，P 波束下行入射，在分界面上能流投影值为 $\rho_1\alpha_1\omega^2\ |\mathrm{P}|^2\cos i$，那么，在界面上的能流守恒等式为

$$
\rho_1\alpha_1\cos i_1 = \rho_1\alpha_1\cos i_1(\mathrm{PP})^2 + \rho_1\beta_1\cos j_1(\mathrm{PS})^2 + \rho_2\alpha_2\cos i_2(\mathrm{PP})^2 + \rho_2\beta_2\cos j_2(\mathrm{PS})^2
$$

即

$$
1 = (\mathrm{PP})^2 + \frac{\beta_1\cos j_1}{\alpha_1\cos i_1}(\mathrm{PS})^2 + \frac{\rho_2\alpha_2\cos i_2}{\rho_1\alpha_1\cos i_1}(\mathrm{PP})^2 + \frac{\rho_2\beta_2\cos j_2}{\rho_1\alpha_1\cos i_1}(\mathrm{PS})^2
$$

这是对散射矩阵第一列的一个限制条件。对其他入射情况也是类似的。那么，为符合能流守恒，必须使散射矩阵的每一元素乘以一个系数，这个系数是（密度×传播速度×入射角的余弦）$^{1/2}$，也

就是说，当 P 波下行入射时，散射矩阵的第一列应为

$$\left(\grave{P}\acute{P} \quad \grave{P}\acute{S}\left(\frac{\beta_1\cos j_1}{\alpha_1\cos i_1}\right)^{1/2} \quad \grave{P}\grave{P}\left(\frac{\rho_2\alpha_2\cos i_2}{\rho_1\alpha_1\cos i_1}\right)^{1/2} \quad \grave{P}\grave{S}\left(\frac{\rho_2\beta_2\cos j_2}{\rho_1\alpha_1\cos i_1}\right)^{1/2}\right)^{T},$$

T 表示转置。那么，散射矩阵的完整形式为

$$\mathbf{S}=\begin{pmatrix} \grave{P}\acute{P} & \grave{S}\acute{P}\left(\frac{\alpha_1\cos i_1}{\beta_1\cos j_1}\right)^{1/2} & \acute{P}\acute{P}\left(\frac{\rho_1\alpha_1\cos i_1}{\rho_2\alpha_2\cos i_2}\right)^{1/2} & \acute{S}\acute{P}\left(\frac{\rho_1\alpha_1\cos i_1}{\rho_2\beta_2\cos j_2}\right)^{1/2} \\ \grave{P}\acute{S}\left(\frac{\beta_1\cos j_1}{\alpha_1\cos i_1}\right)^{1/2} & \grave{S}\acute{S} & \acute{P}\acute{S}\left(\frac{\rho_1\beta_1\cos j_1}{\rho_2\alpha_2\cos i_2}\right)^{1/2} & \acute{S}\acute{S}\left(\frac{\rho_1\beta_1\cos j_1}{\rho_2\beta_2\cos j_2}\right)^{1/2} \\ \grave{P}\grave{P}\left(\frac{\rho_2\alpha_2\cos i_2}{\rho_1\alpha_1\cos i_1}\right)^{1/2} & \grave{S}\grave{P}\left(\frac{\rho_2\alpha_2\cos i_2}{\rho_1\beta_1\cos j_1}\right)^{1/2} & \acute{P}\grave{P} & \acute{S}\grave{P}\left(\frac{\alpha_2\cos i_2}{\beta_2\cos j_2}\right)^{1/2} \\ \grave{P}\grave{S}\left(\frac{\rho_2\beta_2\cos j_2}{\rho_1\alpha_1\cos i_1}\right)^{1/2} & \grave{S}\grave{S}\left(\frac{\rho_2\beta_2\cos j_2}{\rho_1\beta_1\cos j_1}\right)^{1/2} & \acute{P}\grave{S}\left(\frac{\beta_2\cos j_2}{\alpha_2\cos i_2}\right)^{1/2} & \acute{S}\grave{S} \end{pmatrix} \tag{5.20}$$

由于不均匀波无实数能量，故此 S 对任意人射角（包括复数）的入射波都适合，它称为埃米特酉（么正）矩阵（a unitary Hermitian matrix）。当水平慢度 p 处于低值，即 $0<p<\alpha^{-1}$时，i_1、j_1、i_2、j_2 均是实数，S 的各元素也是实数，它为实对称矩阵（也是正交矩阵），有 $\mathbf{S}=\mathbf{S}^{T}=\mathbf{S}^{-1}$（即 $\mathbf{S}^{T}\mathbf{S}=\mathbf{I}$，$\mathbf{S}^{T}=\mathbf{S}^{-1}$）。当 p 出现高值（$p>\alpha^{-1}$）时，有些波成为不均匀波，S 成为复矩阵，且有 $\mathbf{S}^{H}\mathbf{S}=\mathbf{I}$（即 $\mathbf{S}^{H}=\mathbf{S}^{-1}$）或 $\mathbf{S}=\mathbf{S}^{H}=\mathbf{S}^{-1}$（$\mathbf{S}^{H}$ 是共轭转置矩阵），此是酉矩阵特征。散射矩阵 S 的这些性质的出现，是由能量的交换、互易及因果律所规定的。

还应指出，实数散射矩阵的各元素（即散射因数）与频率 ω 无关，即散射波脉冲与入射波脉冲有相同的形状。这是平面波入射到平界面上的一种特殊情况。对于球面波或界面是弯曲的情况，一般都会表现出频率的依赖性。

§4 面波的形成及频散特征

面波的形成是不均匀波叠加的结果，因而我们先来讨论不均

匀波的相移问题。

在本章§2中谈到，当 SV 波以大于临界角 j_0 的角度投射到自由表面时，散射波随频率产生相位畸变，称为相移（a phase shifts）。

考虑时间域的入射波的位移脉冲为

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(\omega)e^{i\omega t}d\omega=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}d\omega\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\cos\omega(\tau-t)d\tau \tag{5.21}$$

反射波的位移脉冲为

$$f_{\epsilon}(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(\omega)e^{i\omega t+i\epsilon\,\mathrm{sgn}(\omega)}d\omega \tag{5.22}$$

式中 $\mathrm{sgn}(\omega)$ 为符号函数。

可看出，入射与反射有相同的振幅，但相位相差（相移）$\epsilon\,\mathrm{sgn}(\omega)$。相移的符号依赖于频率 ω 的符号，反映相位的超前与滞后。当取 $\omega>0$ 时，$\epsilon>0$；当 $\omega<0$ 时，$\epsilon<0$。

按频率 ω 将式(5.22)重写成

$$f_{\epsilon}(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}f(\omega)e^{i(\omega t+\epsilon)}d\omega+\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}f(-\omega)e^{-i(\omega t+\epsilon)}d\omega$$

将 $f(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)e^{i\omega\tau}d\tau$ 代入，可得

$$f_{\epsilon}(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}d\omega\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)e^{-i[\omega(\tau-t)-\epsilon]}d\tau+\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}d\omega\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)e^{i[\omega(\tau-t)-\epsilon]}d\tau$$

将其展开，得到

$$\begin{aligned}f_{\epsilon}(t)&=(\cos\epsilon)\left[\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}d\omega\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\cos\omega(\tau-t)d\tau\right]+\\&\quad(\sin\epsilon)\left[\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}d\omega\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\sin\omega(\tau-t)d\tau\right]\\&=(\cos\epsilon)f(t)+(\sin\epsilon)f_{H}(t)\end{aligned} \tag{5.23}$$

式中

$$
\left.\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\mathrm{d}\omega\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\cos\omega(\tau - t)\mathrm{d}\tau \\
f_H(t) &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\mathrm{d}\omega\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\sin\omega(\tau - t)\mathrm{d}\tau
\end{aligned}\right\} \tag{5.24}
$$

此称为 Hilbert 变换对。函数 $f_H(t)$ 称为 $f(t)$ 的关联函数。

从式(5.23)可以看出，反射波的脉冲形状为入射脉冲形状及其 Hilbert 变换的线性组合。

一般说来，若函数 $f(t)$ 是有界的，则 $f_H(t)$ 是 $f(t)$ 的一个新的变换。先定义以参数 A 表征的函数

$$
\begin{aligned}
f_H(t,A) &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{A}\mathrm{d}\omega\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\sin\omega(\tau - t)\mathrm{d}\tau \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\mathrm{d}\tau\int_{0}^{A}\sin\omega(\tau - t)\mathrm{d}\omega \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\mathrm{d}\tau\left[\frac{1-\cos A(\tau - t)}{\tau - t}\right]
\end{aligned}
$$

在极限情况下，由于 $f(t)$ 的有界性，按卷积定理，可求出上述积分，得到 $f_H(t)$ 的一般定义为

$$
\begin{aligned}
&\lim_{A\to\infty}\left\{\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\mathrm{d}\tau\,\frac{1-\cos A(\tau - t)}{\tau - t}\right\} \\
&= \frac{1}{\pi}P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\tau)}{\tau - t}\mathrm{d}\tau = f(t) * \left(-\frac{1}{\pi t}\right) = f_H(t)
\end{aligned} \tag{5.25}
$$

当 $f(t)$ 为阶跃函数 $H(t-t_0)$ 时，$f_H(t-t_0) = -\frac{1}{\pi}\ln|t-t_0|$；

当 $f(t)$ 为脉冲函数 $\delta(t)$ 时，$f_H(t) = -\frac{1}{\pi t}$ $(f_H(0)=0)$。

仍以 SV 波在自由表面入射为例。在时间域，入射 SV 波的水平分量为

$$
b(t - t_0) = \frac{\cos j}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} B(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(t-t_0)}\mathrm{d}\omega \tag{5.26}
$$

式中 $t_0 = (x\sin j - z\cos j)/\beta$

而反射 P 波的水平分量为

$$a_1(t-t_P)=\frac{\sin i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}A_1(\omega)e^{i\omega(t-t_P)}d\omega \tag{5.27}$$

反射 S 波的水平分量为

$$b_1(t-t_S)=-\frac{\cos j}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}B_1(\omega)e^{i\omega(t-t_S)}d\omega \tag{5.28}$$

这里，$t_P=(x\sin i+z\cos i)/\alpha$，$t_S=(x\sin j+z\cos j)/\beta$。可看出

$$\left.\begin{aligned}a_1(t-t_P)&=\frac{A_1}{B}\left(\frac{\sin i}{\cos j}\right)b(t-t_P)\\ b_1(t-t_S)&=-\frac{B_1}{B}b(t-t_S)\end{aligned}\right\} \tag{5.29}$$

当 $j>j_0$ 时，将$\frac{A_1^*}{B}$值代入，得

$$\left.\begin{aligned}a_1(t-t_P)&=2\tan j\tan 2j\sin\varepsilon[(\sin\varepsilon)b(t-t_P)+(\cos\varepsilon)b_H(t-t_P)]\\ b_1(t-t_S)&=-(\cos 2\varepsilon)b(t-t_S)+(\sin 2\varepsilon)b_H(t-t_S)\end{aligned}\right\} \tag{5.30}$$

式中 $b_H(t-t_P)$和 $b_H(t-t_S)$为关联函数。

这里再一次显示，不均匀波的相移项，可由相应的入射波位移 $b(t-t_P)$或 $b(t-t_S)$与其关联函数 $b_H(t-t_P)$或 $b_H(t-t_S)$的线性相组合来表示。

在层状介质的分界面上，由于不均匀波的相移，波按频率而散开，使它们有可能干涉叠加而合成新的波，这类新波即是面波。

为讨论面波的生成及特征，将平面波位移式(2.104)改写成下述形式

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{u}_P&=A(\hat{\boldsymbol{x}}\pm\eta_\alpha\hat{\boldsymbol{z}})e^{ik(x\mp\eta_\alpha z-ct)}\\ \boldsymbol{u}_{SV}&=B(\mp\eta_\beta\hat{\boldsymbol{x}}+\hat{\boldsymbol{z}})e^{ik(x\mp\eta_\beta z-ct)}\\ \boldsymbol{u}_{SH}&=C\hat{\boldsymbol{y}}e^{ik(x\mp\eta_\beta z-ct)}\end{aligned}\right\} \tag{5.31}$$

这里 $\omega=ck$，$\eta_\alpha=\left(\frac{c^2}{\alpha^2}-1\right)^{1/2}$，$\eta_\beta=\left(\frac{c^2}{\beta^2}-1\right)^{1/2}$，式中的符号($\mp$)分别表示波沿 $\hat{z}$ 的正方向及负方向传播。

对于不均匀平面波则有

$$
\left.\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_{\mathrm{P}} &= A(\hat{\boldsymbol{x}} \mp \mathrm{i}\gamma_{\alpha}\hat{\boldsymbol{z}})\mathrm{e}^{\pm\nu_{\alpha}kz+\mathrm{i}k(x-ct)} \\
\boldsymbol{u}_{\mathrm{SV}} &= B(\pm\,\mathrm{i}\nu_{\beta}\hat{\boldsymbol{x}} + \hat{\boldsymbol{z}})\mathrm{e}^{\pm\nu_{\beta}kz+\mathrm{i}k(x-ct)} \\
\boldsymbol{u}_{\mathrm{SH}} &= C\hat{\boldsymbol{y}}\mathrm{e}^{\pm\nu_{\beta}kz+\mathrm{i}k(x-ct)}
\end{aligned}\right\} \tag{5.32}
$$

这里 $\nu_{\alpha}=\left(1-\dfrac{c^2}{\alpha^2}\right)^{1/2}$，$\nu_{\beta}=\left(1-\dfrac{c^2}{\beta^2}\right)^{1/2}$。它们表示沿 x 正方向传播、振幅随 $\pm z$ 方向衰减的二维不均匀平面波。在一定的层状介质条件下，SH 波可组成勒夫面波；P-SV 波可组成瑞利面波。

考虑均匀半空间(β_2,α_2)上覆盖厚度为 H 的均匀层(β_1,α_1)的勒夫面波的传播。设 SH 波的位移为

$$
\nu = \begin{cases} \left[A_1\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\eta_1 kz} + B_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta_1 kz}\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)} & (0 \leqslant z \leqslant H) \\ \left[A_2\mathrm{e}^{-\nu_2 kz} + B_2\mathrm{e}^{\nu_2 kz}\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)} & (H \leqslant z) \end{cases} \tag{5.33}
$$

所符合的边条件为

(1) 当 $z\rightarrow\infty$ 时，$B_2=0$。

(2) 在 $z=0$ 的自由表面上，应力为零，因而可得 $A_1=B_1$。

(3) 在 $z=H$ 的内分界面上，位移与应力连续，由此可得

$$
\begin{cases} 2A_1\cos(\mathrm{i}\eta_1 kH) = A_2\mathrm{e}^{-\nu_2 Hk} \\ 2A_1\mathrm{i}\mu_1\eta_1\sin(\mathrm{i}\eta_1 kH) = \mu_2\nu_2 A_2\mathrm{e}^{-\nu_2 H} \end{cases}
$$

整理得出

$$
\frac{A_2}{A_1} = \frac{2\cos(\mathrm{i}\eta_1 kH)}{\mathrm{e}^{-\nu_2 Hk}} = \frac{2\mathrm{i}\mu_1\eta_1\sin(\mathrm{i}\eta_1 kH)}{\mu_2\nu_2\mathrm{e}^{-\nu_2 Hk}} \tag{5.34}
$$

从而得出勒夫面波的周期方程为

$$
\tan(\eta_1 kH) = \frac{\mu_2\nu_2}{\mu_1\eta_1} \tag{5.35}
$$

这是一个正切函数方程。传播速度 $c\left(因\ k=\dfrac{\omega}{c}\right)$所符合的范围为 $\beta_1<c<\beta_2$。方程由 $\eta_1 kH$ 的一系列值来确定，第一个区间为 $\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$，第二个区间为 $\left(\pi,\ \dfrac{3}{2}\pi\right)$，…；相应的 k 为 k_0，k_1，…；相应的周期为 $T_n=\dfrac{2\pi}{\omega_n}=\dfrac{2\pi}{ck_n\ (c)}$，$n=0, 1, 2, \cdots$，称 T_0 为勒夫波的基谐模式，T_{n-1} $(n\geqslant2)$ 为勒夫波的高谐模式。周期方程可重

写为

$$k_n = \frac{\omega}{c_n} = \frac{1}{H\sqrt{\frac{c^2}{\beta_1^2} - 1}} \arctan \frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{\beta_2^2}\right)^{1/2}}{\left(\frac{1}{\beta_1^2} - \frac{1}{c^2}\right)^{1/2}} + n\pi$$

$$(n = 0, 1, 2, \cdots) \qquad (5.36)$$

当 $c \to \beta_2$ 时，正切函数的值为 $n\pi$，则可得到

$$\omega_{c_n} = \frac{n\pi\beta_1}{H} \Bigg/ \left(1 - \frac{\beta_1^2}{\beta_2^2}\right)^{1/2} \quad (n = 0, 1, 2, \cdots) \qquad (5.37)$$

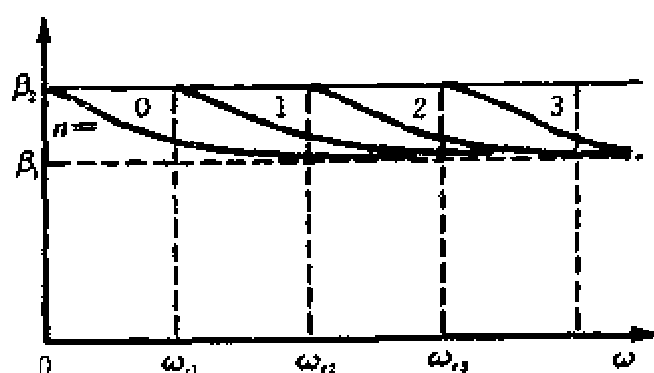


图 5.10 勒夫面波相速度频散曲线图

ω_{c_n} 称为高阶波的截止频率（cut-off frequency）。只有当 $\omega > \omega_{c_n}$ 时，高阶波才出现。在截止频率 ω_{c_n} 处，所有模式都有相同的相速度 β_2。而当 $\omega \to \infty$ 时，则 $c \to \beta_1$。显然，对于给定的 ω，仅有有限个振型（或曰模式）。图 5.10 为相速度曲线图，亦称频散曲线图。

勒夫面波位移表示式为

$$\left.\begin{aligned} &v_n = 2A_1 V(z) e^{ik(x-ct)} \\ &V(z) = \begin{cases} \cos(\eta_1 kz) & (0 < z < H) \\ \cos(\eta_1 kH) e^{-\eta_2 k(z-H)} & (z > H) \end{cases} \end{aligned}\right\} \qquad (5.38)$$

图 5.11 表示对于 $\mu_2/\mu_1 = 1.8$，$\beta_1 = 3.6\text{km/s}$，$\beta_2 = 4.6\text{km/s}$ 和 $c = 4.0\text{km/s}$ 的基谐勒夫面波的位移振幅 $V(z)$。从式（5.38）可看出，层内（$0 < z < H$）为简谐 SH 波，对于 x, t 的任意值，当 $\eta_1 kz = \frac{1}{2}\pi$，$\frac{3}{2}\pi$，$\frac{5}{2}\pi$，…时位移为零，相应的位移平面称为节面，它们平行

于自由表面。显然，当 $\eta_1 kH<\frac{1}{2}\pi$ 时不存在节面，而当 $\frac{1}{2}\pi<\eta_1 kH<\frac{3}{2}\pi$ 时存在一个节面，等等。这些表示，在 $0<\eta_1 k_0 H<\frac{1}{2}\pi$ 的基谐勒夫面波无节面，在 $\pi<\eta_1 k_1 H<\frac{3}{2}\pi$ 的一阶勒夫面波有 1 个节面，在 $2\pi<\eta_1 k_2 H<\frac{5}{2}\pi$ 的二阶勒夫面波有 2 个节面等等。而在层下半空间中为不均匀的 SH 波，当 $z\rightarrow\infty$ 时 SH 波消失。位移的上述特征，对于给定的 ω 才存在。此称为位移的本征值问题。

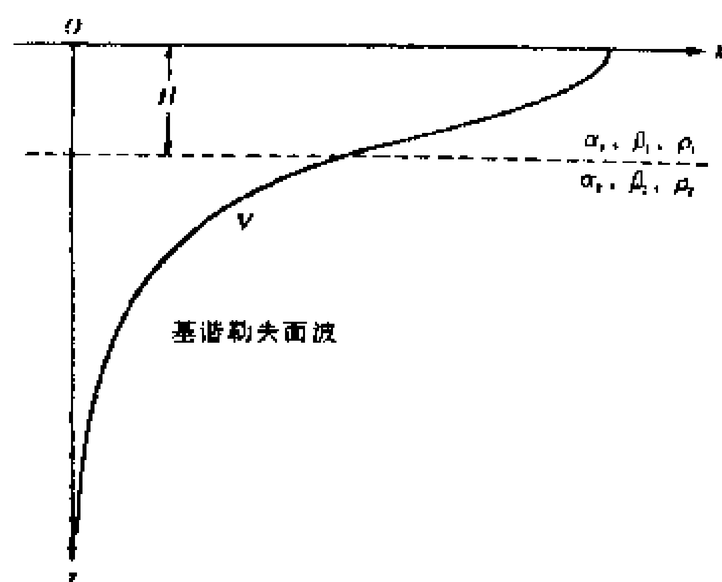


图 5.11　基谐勒夫面波位移

勒夫面波的相速度 c 不是固定的常数，而是依赖于 $k=\frac{2\pi}{\lambda}$ 的特定值。一般说来，不同波长 λ(或频率 ω)的波以不同的相速度传播。在物理学上这种现象称为频散(dispersion)。频散面波具有相速度 c 和群速度 U_g。

对于给定的频率 ω_0，其相速度 $c(\omega_0)=\frac{\omega_0}{k_n(\omega_0)}$，而群速度 U_g 为 ω_0 附近的传播的子波波包的传播速度。设瞬时波形为

$$f_0(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_{\omega_0-\frac{1}{2}\Delta\omega}^{\omega_0+\frac{1}{2}\Delta\omega}\cos(\omega t - k_n(\omega)x)\mathrm{d}\omega$$

当 $\Delta\omega$ 很小时，将 $k_n(\omega)$在 ω_0 附近作 Taylor 展开，取一级项，得

$$k_n(\omega) = k_n(\omega_0) + \left(\frac{\mathrm{d}k_n}{\mathrm{d}\omega}\right)_0(\omega - \omega_0)$$

将它代入上式并作展开，求得

$$\begin{aligned} f_0(x,t) &= \frac{1}{\pi}\int_{\omega_0-\frac{1}{2}\Delta\omega}^{\omega_0+\frac{1}{2}\Delta\omega}\cos\left\{[\omega_0 t - k_n(\omega)x]t(\omega - \omega_0)\left[t - \left(\frac{\mathrm{d}k_n}{\mathrm{d}\omega}\right)_0 x\right]\right\}\mathrm{d}\omega \\ &= \frac{\Delta\omega}{\pi}\frac{\sin Y}{Y}\cos[\omega_0 t - k_n(\omega_0)x] \end{aligned} \tag{5.39}$$

式中 $Y=\frac{\Delta\omega}{2}\left[t-\left(\frac{\mathrm{d}k_n}{\mathrm{d}\omega}\right)_0 x\right]$。

式 (5.39) 表明，波的相位仍以相速度 $\omega_0/k_n(\omega_0)$传播，而振幅是一个由波包 $\sin Y/Y$ 调制的频率为 ω_0 的正弦振荡。其峰值处函数 $Y=0$，即 $x=\left(\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k_n}\right)_0 t$，表明振幅信号以群速度 $U_g=\left(\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k_n}\right)_0$ 传播，且

$$U_g = \left(\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k_n}\right)_0 = \frac{x}{t} \tag{5.40}$$

一般情况下，瞬时波形表示为 Fourier 形式

$$f(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_n(\omega)x-\omega t)}\mathrm{d}\omega$$

当波无频散时，

$$f(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(t-\frac{x}{c_n})}\mathrm{d}\omega = f\left(t - \frac{x}{c_n}\right) \tag{5.41}$$

当波具有频散时，可用稳相法近似计算。因为当时间 t 较大时，积分的贡献主要来自使相位 $\varphi(k)=kx-\omega t$ 稳定的某个频率点的邻近，此点称为鞍点或稳相点。即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}(-\omega t + kx)\Big|_{\omega_s} = 0 \text{ 或 } \frac{x}{t} = \left(\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}\right)\Big|_{\omega_s} = U_g(\omega_s) \tag{5.42}$$

在稳相点 ω_s 附近将相位作 Taylor 展开，略去高于 $(\omega-\omega_s)^2$ 的项，得

$$-\omega t+k_n x=-\omega_s t+k_n(\omega_s)x+\frac{x}{2}\frac{\mathrm{d}^2k_n}{\mathrm{d}\omega^2}(\omega-\omega_s)^2$$

那么

$$\begin{aligned}
f(x,t)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t-k_n x)}\mathrm{d}\omega\\
&=\frac{1}{2\pi}\exp[-\mathrm{i}\omega_s t+\mathrm{i}k_n(\omega_s)x]|F(\omega_s)|\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[\frac{x}{2}\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}^2k_n}{\mathrm{d}\omega^2}(\omega-\omega_s)^2\right]\mathrm{d}\omega\\
&=\frac{|F(\omega_s)|}{2\pi}\left\{\frac{2\pi}{x\left|\frac{\mathrm{d}^2k_n}{\mathrm{d}\omega^2}\right|}\right\}^{1/2}\exp\left[-\mathrm{i}\omega_s t+\mathrm{i}k_n(\omega_s)x\pm\mathrm{i}\frac{\pi}{4}\right]
\end{aligned}\tag{5.43}$$

式中的±符号相应于$\frac{\mathrm{d}^2k_n}{\mathrm{d}\omega^2}$的符号，且$\frac{\mathrm{d}^2k_n}{\mathrm{d}\omega^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}(U_g)^{-1}$。因而对于给定的 x 和 t，得到已知的相速度 $c_n(\omega_s)$、群速度 $U_g(\omega_s)$ 及$\frac{\mathrm{d}U_g^{-1}}{\mathrm{d}\omega}$。由式(5.43)可以求出频散面波的波形，它相对于 Fourier 分量的视相移为$\frac{\pi}{4}$(时移为周期的$\frac{1}{8}$)，如图 5.12 所示。

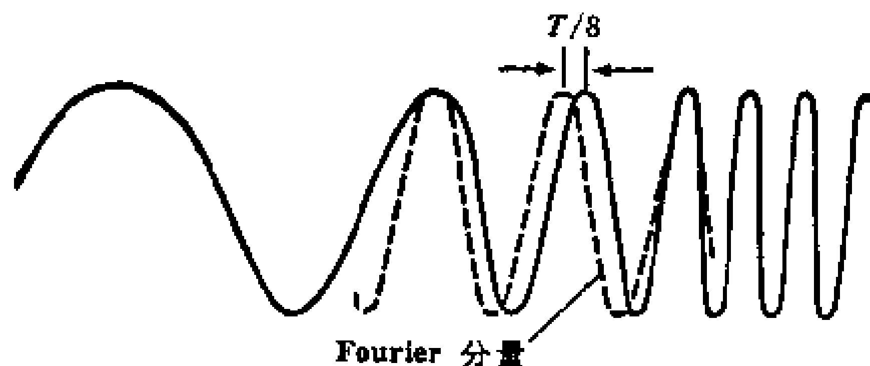


图 5.12　频散面波波形的视相移

当已知相速度 c 求群速度 U_g 时，可用关系式

$$U_g=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}=c+k\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}k}=c-\lambda\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}\lambda}=c^2\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}\lambda}$$

或

$$\frac{1}{U_g}=\frac{1}{c}+\frac{T}{c^2}\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}T}=\frac{1}{c}-\frac{\omega}{c^2}\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}\omega}\tag{5.44}$$

实际上常用U_g来求c。因为$U_g=\frac{x}{t}$可从观测资料直接得到；另外，从周期方程$F(\omega,k)=0$出发，由$\mathrm{d}F=\left(\frac{\partial F}{\partial\omega}\right)\mathrm{d}\omega+\left(\frac{\partial F}{\partial k}\right)\mathrm{d}k=0$也可得$U_g=-\frac{\partial F/\partial k}{\partial F/\partial\omega}$，这样，可用公式$\frac{\mathrm{d}(cT)}{(cT)^2}=\frac{\mathrm{d}T}{T^2U_g}$在$(T,T_1)$区间积分求$c$

$$\frac{1}{c}=T\int_T^{T_1}\frac{\mathrm{d}T}{T^2U_g(T)}+\frac{1}{c_1}\left(\frac{T}{T_1}\right) \tag{5.45}$$

这里$c_1=c(T_1)$。

若群速度对某个参考频率给出稳定值，即$\frac{\mathrm{d}^2k_n}{\mathrm{d}\omega^2}=0$，则式(5.43)不再有效。这时波的振幅达极值，可用Airy函数给出结果，故此时波的到时称为Airy相。此时若$\frac{\mathrm{d}^3k_n}{\mathrm{d}\omega^3}\neq0$，可计算得到

$$f(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t-kx)}\mathrm{d}\omega$$

$$=\begin{cases}\left(\dfrac{2F(T)}{\dfrac{T}{U_g}\sqrt{x\left|\dfrac{\mathrm{d}U_g}{\mathrm{d}T}\right|}}\right)_{T_s}\exp\left[-\mathrm{i}\omega_s t+\mathrm{i}k_n(\omega_s)\pm\mathrm{i}\dfrac{\pi}{4}\right],\left(\dfrac{\mathrm{d}U_g}{\mathrm{d}k}\right)_s\neq0\\[2ex]\left(\dfrac{CF(T)}{\sqrt[3]{\dfrac{xT^4}{U_g^2}\left|\dfrac{\mathrm{d}^2U_g}{\mathrm{d}T^2}\right|}}\right)_{T_s}\exp\left[-\mathrm{i}\omega_s t+\mathrm{i}k_n(\omega_s)\right],\left(\dfrac{\mathrm{d}U_g}{\mathrm{d}k}\right)_s=0,\left(\dfrac{\mathrm{d}^2U_g}{\mathrm{d}k^2}\right)_s\neq0\end{cases} \tag{5.46}$$

式 (5.46) 的第二式为 Airy 相，其中系数$C=2\sqrt{3}\frac{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)}{\left(\frac{\pi}{3}\right)^{1/3}}=3.0462$。

现在讨论自由表面的瑞利面波。设$z=0$为自由表面，$z>0$为半空间。存在不均匀的 P 波和 SV 波，组成位移场

$$\boldsymbol{u}=[A(\hat{x}-\mathrm{i}\nu_\alpha\hat{z})\mathrm{e}^{-\nu_\alpha kz}+B(\mathrm{i}\nu_\beta\hat{x}+\hat{z})\mathrm{e}^{-\nu_\beta kz}]\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-ct)} \tag{5.47}$$

要求ν_α和ν_β为实数，即要求相速度$c<\beta$。按自由表面边界条件，

要得到不为零的 A、B 值，必须有

$$\left(2-\frac{c^2}{\beta^2}\right)^2-4\nu_\alpha\nu_\beta=0 \tag{5.48}$$

此方程是自由表面瑞利面波的周期方程，也称为瑞利方程。将 ν_α，ν_β 代入，方程变为关于 $\xi=\dfrac{c^2}{\beta^2}$ 的三次方程。即

$$F(\xi)=\xi^3-8\xi^2+8\xi\left(3-\frac{2\beta^2}{\alpha^2}\right)-16\left(1-\frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)=0 \tag{5.49}$$

因 $F(0)=16\left(1-\dfrac{\beta^2}{\alpha^2}\right)<0, F(1)=1>0$，所以 $F(\xi)=0$ 在 $0\sim1$ 之间有一根，设此根为 c_R，$0<c_R<\beta$。传播速度为 c_R 的新波就是瑞利面波。对于泊松比 $\sigma=\dfrac{1}{4}$ 的介质，其位移分布如图 5.13 所示。

至于频散瑞利面波，仍以在半空间上覆盖一层介质为例，则在层和半空间中的位移分别为

$$\left.\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1=&\left[A'_1(\hat{\boldsymbol{x}}+\eta_{\alpha_1}\hat{\boldsymbol{z}})e^{-ik\eta_{\alpha_1}z}+A''_1(\hat{\boldsymbol{x}}-\eta_{\alpha_1}\hat{\boldsymbol{z}})e^{-ik\eta_{\alpha_1}z}\right.\\
&\left.+B'_1(-\eta_{\beta_1}\hat{\boldsymbol{x}}+\hat{\boldsymbol{z}})e^{-ik\eta_{\beta_1}z}+B''_1(\eta_{\beta_1}\hat{\boldsymbol{x}}+\hat{\boldsymbol{z}})e^{ik\eta_{\beta_1}z}\right]e^{ik(x-ct)}\\
&\qquad(0<z<H)\\
\boldsymbol{u}_1=&\left[A_2(\hat{\boldsymbol{x}}-i\nu_{\alpha_2}\hat{\boldsymbol{z}})e^{-k\nu_{\alpha_2}z}+B_2(i\nu_{\beta_2}\hat{\boldsymbol{x}}+\hat{\boldsymbol{z}})e^{-k\nu_{\beta_2}z}\right]e^{ik(x-ct)}\\
&\qquad(z>H)
\end{aligned}\right\} \tag{5.50}$$

式中 $\eta_{\alpha_1}=\left(\dfrac{c^2}{\alpha_1^2}-1\right)^{1/2}$，$\nu_{\alpha_2}=\left(1-\dfrac{c^2}{\alpha_2^2}\right)^{1/2}$。

按自由表面及层与半空间的边界条件，得到关于 6 个未知数 A'_1，A''_1，B'_1，B''_1，A_2 和 B_2 的齐次方程，这些方程所符合的条件为下述频散方程

$$\begin{aligned}
\Delta_R=&A_0+B_0\cos k^*\eta_{\alpha_1}\cos k^*\eta_{\beta_1}+C_0\sin k^*\eta_{\alpha_1}\sin k^*\eta_{\beta_1}\\
&+D_0\cos k^*\eta_{\alpha_1}\sin k^*\eta_{\beta_1}+E_0\sin k^*\eta_{\alpha_1}\cos k^*\eta_{\beta_1}=0
\end{aligned} \tag{5.51}$$

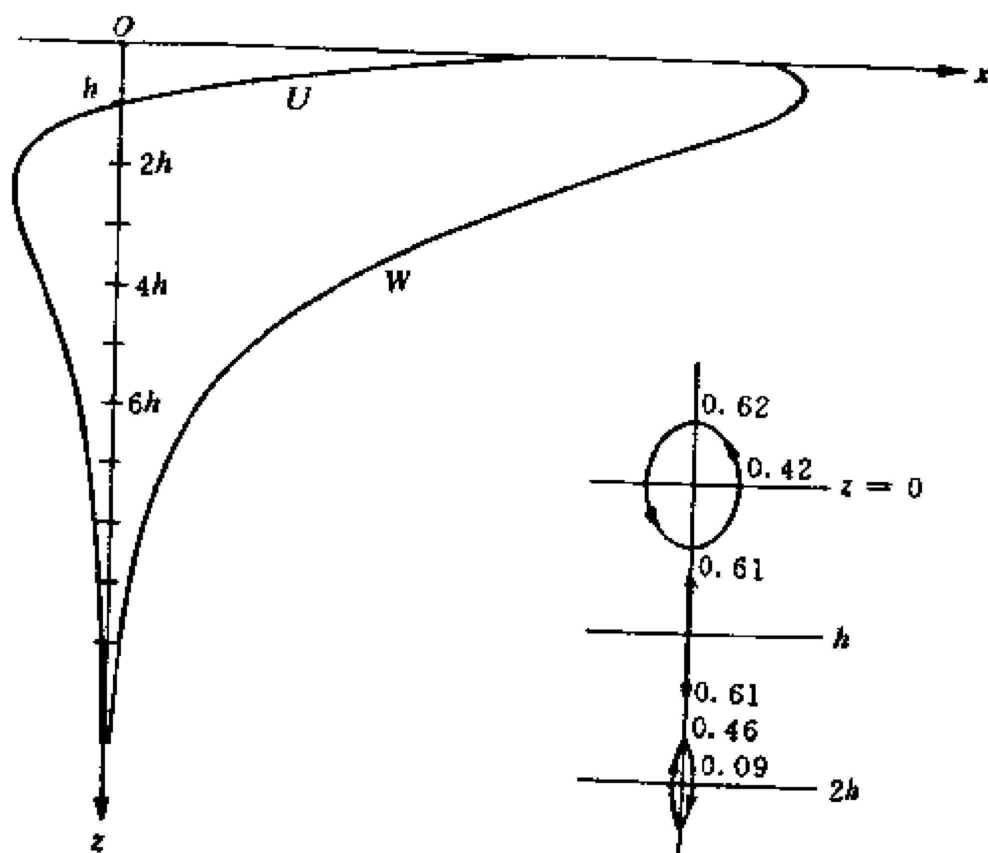


图 5.13　自由表面瑞利面波位移随深度的分布

式中 $k^* = kH$

$$A_0 = 4k^2\left(2k^2 - k_{\beta_1}^2\right)\left[\left(2k^2 f - \frac{\mu_2}{\mu_1}k_{\beta_2}^2\right)\left(2k^2 f - \frac{\mu_2}{\mu_1}k_{\beta_2}^2 + k_{\beta_1}^2\right) - 2fk^2\nu_{\alpha_2}\nu_{\beta_2}\left(2k^2 f + k_{\beta_1}^2\right)\right]$$

$$B_0 = 4k^4\nu_{\alpha_2}\nu_{\beta_2}\left[\left(2k^2 f + k_{\beta_1}^2\right)^2 + f^2\left(2k^2 - k_{\beta_1}^2\right)^2\right] - 4k^4\left(2k^2 f - \frac{\mu_2}{\mu_1}k_{\beta_2}^2 + k_{\beta_1}^2\right)^2 - \left(2k^2 - k_{\beta_1}^2\right)^2\left(2k^2 f - \frac{\mu_2}{\mu_1}k_{\beta_2}^2\right)^2$$

$$C_0 = 4k^2\eta_{\alpha_1}\eta_{\beta_1}\left[\left(2k^2 f - \frac{\mu_2}{\mu_1}k_{\beta_2}^2\right)^2 - 4f^2k^4\nu_{\alpha_2}\nu_{\beta_2}\right] + \frac{\left(2k^2 - k_{\beta_1}^2\right)^2}{\eta_{\alpha_1}\eta_{\beta_1}}\cdot\left[\left(2k^2 f - \frac{\mu_2}{\mu_1}k_{\beta_2}^2 + k_{\beta_1}^2\right)^2 - \left(2k^2 f + k_{\beta_2}^2\right)^2\nu_{\alpha_2}\nu_{\beta_2}\right]$$

$$D_0 = -\frac{\mu_2}{\mu_1}k_{\beta_1}^2 k_{\beta_2}^2\left[4k^2\nu_{\alpha_2}\nu_{\beta_1} + (2k^2 - k_{\beta_1}^2)^2\frac{\nu_{\beta_2}}{\eta_{\beta_1}}\right]$$

$$E_4 = -\frac{\mu_2}{\mu_1} k_{\beta_1}^2 k_{\beta_2}^2 \left[4k^2 \eta_{\alpha_1} \nu_{\beta_2} + (2k^2 - k_{\beta_1}^2)^2 \frac{\nu_{\alpha_2}}{\eta_{\alpha_1}} \right]$$

$$f = -\frac{\mu_2}{\mu_1} - 1, \quad k_{\beta_1} = \frac{\omega}{\beta_1}, \quad k_{\beta_2} = \frac{\omega}{\beta_2}, \quad k_{\alpha_1} = \frac{\omega}{\alpha_1}, \quad k_{\alpha_2} = \frac{\omega}{\alpha_2} \tag{5.52}$$

显然，不同振型面波的频散曲线形状依赖于 4 个速度值 α_1、α_2、β_1、β_2 和切变模量的相对值 μ_2/μ_1。当球面波入射到平界面时，也会产生瑞利面波，有关内容在后面的章节中叙述。

§5 矩阵法及其推广

在均匀介质或垂直非均匀介质中，将关于地震波位移的运动方程与本构关系组合起来，则可统一用矩阵方法来解平面波（包括不均匀平面波）与面波的传播。

平面波在均匀或层状介质中传播时，位移及应力是介质的连续函数，由此导出水平慢度 p 的不变性。所以可以 p 为参数，将位移-应力联合写成：

$$\left.\begin{aligned} u_i &= f_i(z) e^{i\omega(px-t)} \\ \sigma_{ij} &= f_j(z) e^{i\omega(px-t)} \end{aligned}\right\} \tag{5.53}$$

或写成列向量形式

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{f} e^{i\omega(px-t)} \tag{5.54}$$

式中

$$\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} f_i & \hat{\boldsymbol{x}}_i \\ f_j & \hat{\boldsymbol{x}}_j \end{pmatrix}$$

按波所符合的运动方程及本构关系，可得到关于 $\boldsymbol{f}$ 的一阶偏微分方程为

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial z} = \mathbf{A} \boldsymbol{f} \tag{5.55}$$

式中的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的值依赖于介质的参数、水平慢度 p 及频率 ω。

对于均匀介质，它是常数，而对于垂直非均匀介质，它与 z 有关。

考虑均匀介质中的SH波，并令其位移 v 及相关的应力 σ_{yz} 为下述形式

$$
\begin{aligned}
v &= f_1(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(px-t)} \\
\sigma_{yz} &= f_2(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(px-t)}
\end{aligned}
\tag{5.56}
$$

其本构关系 $\sigma_{yz}=\mu\dfrac{\partial v}{\partial z}=\mu\dfrac{\partial f_1}{\partial z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(px-t)}$，将其与式（5.56）中的第2式比较，得

$$
\frac{\partial f_1}{\partial z}=\mu^{-1}f_2 \tag{5.57}
$$

而在运动方程 $\rho\ddot{v}=\sigma_{yz,z}+\sigma_{yx,x}$ 中，

$$
\sigma_{yz,z}=\frac{\partial f_2}{\partial z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(px-t)},\quad \sigma_{yx,x}=\left(\mu\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{,x}=(\mathrm{i}\omega p)^2\mu f_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(px-t)}
$$

那么，运动方程变成

$$
(\mathrm{i}\omega)^2\rho f_1=\frac{\partial f_2}{\partial z}-\omega^2p^2\mu f_1
$$

即

$$
\frac{\partial f_2}{\partial z}=\omega^2(\mu p^2-\rho)f_1 \tag{5.58}
$$

联合式（5.57）和式（5.58）得到

$$
\left.
\begin{aligned}
\frac{\partial f_1}{\partial z} &= \mu^{-1}f_2 \\
\frac{\partial f_2}{\partial z} &= \omega^2(\mu p^2-\rho)f_1
\end{aligned}
\right\}
\tag{5.59}
$$

同式（5.55）形式比较得

$$
\boldsymbol{f}=\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix},\quad \mathbf{A}=\begin{bmatrix} 0 & \mu^{-1} \\ \omega^2(\mu p^2-\rho) & 0 \end{bmatrix} \tag{5.59$'$}
$$

$\boldsymbol{f}_1$ 和 $\boldsymbol{f}_2$ 所符合的边界条件为：

（1）在自由表面上，$\boldsymbol{f}_2=0$。

（2）过内部平界面，$\boldsymbol{f}_1$、$\boldsymbol{f}_2$ 连续。

（3）当 $z\to\infty$ 时，$\boldsymbol{f}_1$ 和 $\boldsymbol{f}_2\to 0$。

对于层状介质中的勒夫面波，其位移-应力联合也可写成如下形式：

$$\left.\begin{aligned} v &= l_1(k,\omega,z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)} \\ \sigma_{yz} &= l_2(k,\omega,z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)} \end{aligned}\right\} \tag{5.60}$$

通过关于运动方程与本构关系的组合，仍可得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mu(z)^{-1} \\ k^2\mu(z) - \omega^2\rho(z) & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix} \tag{5.61}$$

对于均匀介质中的 P-SV 波，可令

$$\left.\begin{aligned} u &= f_3(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(px-t)} \\ w &= f_1(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(px-t)} \\ \sigma_{zx} &= f_4(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(px-t)} \\ \sigma_{zz} &= f_2(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(px-t)} \end{aligned}\right\} \tag{5.62}$$

由本构关系 $\sigma_{zx}=\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)$ 和 $\sigma_{zz}=\lambda\theta+2\mu\frac{\partial w}{\partial x}$ 得到

$$\frac{\partial f_3}{\partial z}=-\mathrm{i}\omega p f_1+\mu^{-1}f_4 \text{ 及 } \frac{\partial f_1}{\partial z}=\frac{1}{\lambda+2\mu}(f_2-\mathrm{i}\omega p\lambda f_3)$$

再由运动方程

$$\rho\ddot{u}=(\lambda+\mu)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}\right)+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

$$\rho\ddot{w}=(\lambda+\mu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}\right)+\mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)$$

得

$$\frac{\partial f_4}{\partial z}=-\frac{\mathrm{i}\omega p\lambda}{\lambda+2\mu}f_2+\left[\frac{4\mu\omega^2p^2(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}-\rho\omega^2\right]f_3$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial z}=-\mathrm{i}\omega\rho f_4-\rho\omega^2 f_1$$

它们合写成

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\begin{bmatrix} f_3 \\ f_1 \\ f_4 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{i}\omega p & \mu^{-1} & 0 \\ \dfrac{-\mathrm{i}\omega p\lambda}{\lambda+2\mu} & 0 & 0 & \dfrac{1}{\lambda+2\mu} \\ \dfrac{4\omega^2 p^2\mu(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu} - \rho\omega^2 & 0 & 0 & \dfrac{-\mathrm{i}\omega p\lambda}{\lambda+2\mu} \\ 0 & -\rho\omega^2 & -\mathrm{i}\omega p & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f_3 \\ f_1 \\ f_4 \\ f_2 \end{bmatrix}
$$

(5.63)

f_1，f_2，f_3，f_4 所符合的边条件为：

(1) 在自由表面，f_4 及 $f_2=0$。

(2) 在内部平界面上，$f_i(i=1,2,3,4)$连续。

(3) 当 $z\to\infty$时，$f_i(i=1,2,3,4)\to 0$。

对于层状介质中的瑞利面波，由于其位移的质点轨迹为椭圆，故令

$$
\left.\begin{aligned} u &= \gamma_3(k,\omega,z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)} \\ w &= -\mathrm{i}\gamma_1(k,\omega,z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)} \\ \sigma_{zx} &= \gamma_4(k,\omega,z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)} \\ \sigma_{zz} &= -\mathrm{i}\gamma_2(k,\omega,z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)} \end{aligned}\right\} \tag{5.64}
$$

可导出方程

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \gamma_4 \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} 0 & -k & \mu^{-1}(z) & 0 \\ k\lambda(z)[\lambda(z)+2\mu(z)]^{-1} & 0 & 0 & [\lambda(z)+2\mu(z)]^{-1} \\ k^2\zeta(z)-\omega^2\rho(z) & 0 & 0 & -k\lambda(z)[\lambda(z)+2\mu(z)]^{-1} \\ 0 & -\omega^2\rho(z) & k & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \gamma_4 \end{bmatrix}
$$

(5.65)

这里 $\zeta(z)=4\mu(z)[\lambda(z)+\mu(z)]/[\lambda(z)+2\mu(z)]$

求解形如式 (5.55) 的一阶偏微分方程的问题即为解矩阵 **A** 的特征值问题。

设 **A** 的特征值为 $\lambda^{(\alpha)}$ (α 为标号，表示所有 λ 的序数)。**A** 的特

征向量为$\nu^{(\alpha)}$，所有特征向量组成特征空间。设方程的一个基本解为：

$$\boldsymbol{f}^{(\alpha)} = \nu^{(\alpha)}\exp[\lambda^{(\alpha)}(z - z_0)] \tag{5.66}$$

式中z_0为初始参考相位，可令为零。

设表征特征空间的矩阵为**F**，即**F**的各列由不同α的式(5.66)所组成。那么，一阶偏微分方程的一般解为**F**各列的某种线性组合，即

$$\boldsymbol{f} = \mathbf{F}\boldsymbol{w} \tag{5.67}$$

若**A**是$n\times n$阶矩阵，则可求出n个本征值和n个线性无关的本征矢量（$\alpha=1, 2, \cdots, n$)、那么，**F**也是$n\times n$阶矩阵，**F**称为解矩阵，$\boldsymbol{w}$称为权重系数。

对于SH波，关于**A**的特征方程为

$$\begin{vmatrix} -\lambda & \mu^{-1} \\ w^2(\mu p^2 - \rho) & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{5.68}$$

得$\lambda=\pm i\omega\eta$，$\eta=\left(\dfrac{1}{\beta^2}-p^2\right)^{1/2}=\beta^{-1}\cos j$，即$\alpha=2$，$\lambda^{(1)}=i\omega\eta$，$\lambda^{(2)}=-i\omega\eta$。

对于本征值$\lambda^{(1)}$，特征向量$\nu^{(\alpha)}$可表为

$$\begin{pmatrix} 0 & \mu^{-1} \\ \omega^2(\mu p^2 - \rho) & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \nu^{(1)} \\ \nu^{(2)} \end{pmatrix} = i\omega\eta\begin{pmatrix} \nu^{(1)} \\ \nu^{(2)} \end{pmatrix}$$

得$\nu^{(2)}=i\omega\mu\eta\nu^{(1)}$。令$\nu^{(1)}=1$，则$\nu^{(2)}=i\omega\mu\eta$，那么，

$$\boldsymbol{\nu}^{(\alpha)} = \begin{pmatrix} 1 \\ i\omega\mu\eta \end{pmatrix}$$

同理，对于本征值$\lambda^{(2)}$，有

$$\nu^{(\alpha)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i\omega\mu\eta \end{pmatrix}$$

则

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i\omega\mu\eta & -i\omega\mu\eta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \exp[i\omega\eta(z - z_0)] & 0 \\ 0 & \exp[-i\omega\eta(z - z_0)] \end{pmatrix} = \mathbf{E\Lambda} \tag{5.69}$$

即 $\mathbf{F}$ 表示本征矢量组成的矩阵 $\mathbf{E}$ 与对角矩阵 $\mathbf{\Lambda}$ 之积。

当 SH 波入射到固体-固体界面时（参看图 5.8），在上介质，$\boldsymbol{f}=\mathbf{F}_1(z)\boldsymbol{w}_1$，在下介质，$\boldsymbol{f}=\mathbf{F}_2(z)\boldsymbol{w}_2$，而在 $z=0$ 的界面上 $\boldsymbol{f}$ 连续，即 $\mathbf{F}_1(0)\boldsymbol{w}_1=\mathbf{F}_2(0)\boldsymbol{w}_2$。当波从上介质入射时，有 $\boldsymbol{w}_1=\begin{bmatrix}1\\ \grave{S}\acute{S}\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{w}_2=\begin{bmatrix}\grave{S}\grave{S}\\ 0\end{bmatrix}$，当波从下介质入射时，有 $\boldsymbol{w}_1=\begin{bmatrix}0\\ \acute{S}\acute{S}\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{w}_2=\begin{bmatrix}\acute{S}\grave{S}\\ 1\end{bmatrix}$。

对于勒夫面波，本征值 $\lambda^{(1,2)}=\pm\left(k^2-\dfrac{\omega^2}{\beta^2}\right)^{1/2}=\pm\nu$，则解矩阵

$$\mathbf{F}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -\mu\nu & \mu\nu\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{-\nu z} & 0\\ 0 & e^{\nu z}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e^{-\nu z} & e^{\nu z}\\ -\mu\nu e^{-\nu z} & \mu\nu e^{\nu z}\end{bmatrix} \tag{5.70}$$

位移-应力解为 $\boldsymbol{l}=\mathbf{F}\boldsymbol{w}$，因 $\boldsymbol{w}=\begin{bmatrix}\grave{S}\\ \acute{S}\end{bmatrix}$，则

$$\boldsymbol{l}=\begin{bmatrix}l_1\\ l_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e^{-\nu z} & e^{\nu z}\\ -\mu\nu e^{-\nu z} & \mu\nu e^{\nu z}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\grave{S}\\ \acute{S}\end{bmatrix} \tag{5.71}$$

也可得到 $\boldsymbol{w}=\mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{l}$，即

$$\begin{bmatrix}\grave{S}\\ \acute{S}\end{bmatrix}=\frac{1}{2\mu\nu}\begin{bmatrix}\nu\mu e^{\nu z} & -e^{-\nu z}\\ -\nu\mu e^{-\nu z} & e^{-\nu z}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}l_1\\ l_2\end{bmatrix} \tag{5.72}$$

对于 P-SV 波，$\mathbf{A}$ 的本征值为 $\pm i\omega\xi$ 和 $\pm i\omega\eta$，其中 $\xi=\alpha^{-1}\cos i$，解矩阵 $\mathbf{F}=\mathbf{E}\mathbf{\Lambda}$，$\mathbf{E}$，$\mathbf{\Lambda}$ 分别为

$$\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}\alpha p & \beta\eta & \alpha p & -\beta\eta\\ \alpha\xi & -\beta p & -\alpha\xi & \beta p\\ 2i\omega\rho\alpha\beta^2 p\xi & i\omega\rho\beta(1-2\beta^2p^2) & -2i\omega\rho\alpha\beta^2p\xi & -i\omega\rho\beta(1-2\beta^2p^2)\\ i\omega\rho\alpha(1-2\beta^2p^2) & -2i\omega\rho\beta^2p\eta & i\omega\rho\beta\alpha(1-2\beta^2p^2) & -2i\omega\rho\beta^2p\eta\end{bmatrix} \tag{5.73}$$

$$
\Lambda=\begin{bmatrix}
\exp(i\omega\xi(z-z_0)) & 0 & 0 & 0\\
0 & \exp(i\omega\eta(z-z_0)) & 0 & 0\\
0 & 0 & \exp(-i\omega\xi(z-z_0)) & 0\\
0 & 0 & 0 & \exp(-i\omega\eta(z-z_0))
\end{bmatrix}
\tag{5.74}
$$

对于瑞利面波，解矩阵 $\mathbf{F}=\mathbf{E}\Lambda$，$\mathbf{E}$，$\Lambda$ 分别为

$$
\mathbf{E}=\omega^{-1}\begin{bmatrix}
\alpha k & \beta\nu & \alpha k & \beta\nu\\
\alpha\zeta & \beta k & -\alpha\zeta & -\beta k\\
-2\alpha\mu k\zeta & -\beta\mu(k^2+\nu^2) & 2\alpha\mu k\zeta & \beta\mu(k^2+\nu^2)\\
-\alpha\mu(k^2+\nu^2) & -2\beta\mu k\nu & \alpha\mu(k^2+\nu^2) & -2\beta\mu k\nu
\end{bmatrix}
$$

$$
\Lambda=\begin{bmatrix}
e^{-\zeta z} & 0 & 0 & 0\\
0 & e^{-\nu z} & 0 & 0\\
0 & 0 & e^{\zeta z} & 0\\
0 & 0 & 0 & e^{\nu z}
\end{bmatrix}
\tag{5.75}
$$

式中 $\zeta=\left(k^2-\dfrac{\omega^2}{\alpha^2}\right)^{1/2}$，$\nu=\left(k^2-\dfrac{\omega^2}{\beta^2}\right)^{1/2}$。

上述以求系数矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征值为基础的矩阵解法，可从另一个角度来作推广。

以勒夫面波为例，位移-应力矢量符合 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{\mathrm{d}z}=\mathbf{A}(z)\boldsymbol{l}$，式中 $\boldsymbol{l}$，$\mathbf{A}$ 见式（5.61），考虑两组独立解（y_{11}，y_{21}）和（y_{12}，y_{22}），则 $\boldsymbol{l}$ 的任意解为

$$
\left.\begin{aligned}
l_1&=A_1y_{11}+A_2y_{12}\\
l_2&=A_1y_{21}+A_2y_{22}
\end{aligned}\right\}
\tag{5.76}
$$

这里 A_1 和 A_2 是由边界条件确定的任意常数。显然，可写出线性组合的基本方程为

$$
\frac{\mathrm{d}\mathbf{Y}}{\mathrm{d}z}=A(z)\mathbf{Y},\ \mathbf{Y}=\begin{bmatrix}y_{11} & y_{12}\\ y_{21} & y_{22}\end{bmatrix}
\tag{5.77}
$$

我们不必局限于 2×2 阶矩阵，设 $\mathbf{A}(z)$ 与 $\mathbf{Y}$ 都是 $n\times n$ 阶矩

阵，而 $\mathbf{Y}$ 定义为 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{\mathrm{d}z}=\mathbf{A}(z)\boldsymbol{l}$ 的积分矩阵(The integral matrix)，它的每一列是此方程的解。若 $\mathbf{Y}$ 在其定义域范围内对任意 z 都非奇异，则它又称为此方程的基本矩阵(a fundamental matrix)。

若给出 $z=z_0$ 时的 $\mathbf{Y}(z_0)$ 值，将式(5.77)直接积分并推广，则引入传播矩阵(The Propagator Matrix)$\mathbf{P}(z,z_0)$，它是从 $z=z_0$ 开始，以 $\mathbf{A}(z)$ 为参数作积分而得到的，那么，定义

$$\mathbf{P}(z,z_0)=\mathbf{I}+\int_{z_0}^{z}\mathbf{A}(\zeta_1)\mathrm{d}\zeta_1+\int_{z_0}^{z}\mathbf{A}(\zeta_1)\left(\int_{z_0}^{\zeta_1}\mathbf{A}(\zeta_2)\mathrm{d}\zeta_2\right)\mathrm{d}\zeta_1$$
$$+\int_{z_0}^{z}\mathbf{A}(\zeta_1)\left[\int_{z_0}^{\zeta_1}\mathbf{A}(\zeta_2)\left(\int_{z_0}^{\zeta_2}\mathbf{A}(\zeta_3)\mathrm{d}\zeta_3\right)\mathrm{d}\zeta_2\right]\mathrm{d}\zeta_1+\cdots \tag{5.78}$$

此等式右边为一级数，称为矩阵积分级数(The matrizant)，积分后的值为一个矩阵。式中 $\mathbf{I}$ 为 n 阶单位矩阵。有

$$\left.\begin{aligned}&\mathbf{P}(z_0,z_0)=\mathbf{I}\\&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\mathbf{P}(z,z_0)=\mathbf{A}(z)\mathbf{P}(z,z_0)\end{aligned}\right\} \tag{5.79}$$

因而
$$\mathbf{Y}(z)=\mathbf{P}(z,z_0)\mathbf{Y}(z_0) \tag{5.80}$$

若区间(z_0,z)有若干点 $z_1,z_2,\cdots,z_{m-1}$，则对于同一深度，即 $\mathbf{P}(z_i,z_i)$为单位矩阵，有

$$\mathbf{P}(z_0,z_0)=\mathbf{P}(z_1,z_1)=\cdots=\mathbf{P}(z_i,z_i)=\mathbf{I} \tag{5.81}$$

且有

$$\mathbf{P}(z,z_0)=\prod_{l=1}^{m}\mathbf{P}(z_l,z_{l-1}) \tag{5.82}$$

此称为链式法则。由此可知 $\mathbf{P}(z_0,z)\mathbf{P}(z,z_0)=\mathbf{I}$，并有逆矩阵

$$[\mathbf{P}(z_0,z)]^{-1}=\mathbf{P}(z,z_0) \tag{5.83}$$

按式(5.80)及(5.82)，可得

$$\mathbf{Y}(z)=\mathbf{P}(z,z_{m-1})\mathbf{P}(z_{m-1},z_{m-2})\cdots\mathbf{P}(z_1,z_0)\mathbf{Y}(z_0) \tag{5.84}$$

从中可看出 $\mathbf{P}(z,z_0)$ 取名为传播矩阵的意义，它也是基本矩阵。由式(5.80)知

$$\mathbf{P}(z,z_0)=\mathbf{Y}(z)\mathbf{Y}^{-1}(z_0) \tag{5.85}$$

式(5.85)表示，从任意一点 z_0 算起的传播矩阵，可由逆矩阵直接计算。因而，一旦方程 $\frac{d\boldsymbol{l}}{dz}=\mathbf{A}(z)\boldsymbol{l}$ 的 n 个线性独立的解（它是矩阵 $\mathbf{Y}$ 的一列）已知，则有

$$\boldsymbol{l}(z)=\mathbf{P}(z,z_0)\boldsymbol{l}(z_0) \tag{5.86}$$

推广之，对于 $\frac{d\boldsymbol{f}}{dz}=\mathbf{A}(z)\boldsymbol{f}$，当给定 $\boldsymbol{f}(z_0)$ 时，有

$$\boldsymbol{f}(z)=\mathbf{P}(z,z_0)\boldsymbol{f}(z_0) \tag{5.87}$$

此由传播矩阵 $\mathbf{P}(z,z_0)$ 表示解 $\boldsymbol{f}(z)$ 的方法称为传播矩阵法。可用给定的 $\boldsymbol{f}(z_0)$ 值通过传播矩阵得到任意深度 z 的位移-应力矢量 $\boldsymbol{f}(z)$。它也可用来求解具有源项的系统：

$$\frac{d\boldsymbol{f}(z)}{dz}=\mathbf{A}(z)\boldsymbol{f}(z)+\boldsymbol{g}(z) \tag{5.88}$$

$\boldsymbol{g}(z)$ 为已知的 $n\times 1$ 阶矩阵。方程的解可由式(5.85)和(5.87)直接代入得到

$$\begin{aligned}\boldsymbol{f}(z)&=\mathbf{Y}(z)\left[\int_{z_0}^{z}\mathbf{Y}^{-1}(\zeta)\boldsymbol{g}(\zeta)d\zeta+\mathbf{Y}^{-1}(z_0)\boldsymbol{f}(z_0)\right]\\&=\int_{z_0}^{z}\mathbf{P}(z,\zeta)g(\zeta)d\zeta+\mathbf{P}(z,z_0)\boldsymbol{f}(z_0)\end{aligned} \tag{5.89}$$

还可证实

$$\left.\begin{aligned}\|\mathbf{Y}(z)\|&=\|\mathbf{Y}(z_0)\|\int_{z_0}^{z}\mathrm{trace}\{\mathbf{P}(\zeta)\}d\zeta\\\|\mathbf{P}(z,z_0)\|&=\int_{z_0}^{z}\mathrm{trace}\{\mathbf{P}(\zeta)\}d\zeta\end{aligned}\right\} \tag{5.90}$$

传播矩阵值的计算依赖于 $\mathbf{A}(z)$ 的函数形式，通常是较困难的。比较简单的有两种情况，即对于任意 z 值，$\mathbf{A}(z)$ 为常量或 $\mathbf{A}(z)$

可用积分 $\int_{z_0}^{z}\mathbf{A}(\zeta)\mathrm{d}\zeta$ 来具体计算。

当 $\mathbf{A}(z)$ 为常量时，$\mathbf{P}(z,z_0)$ 取简单形式

$$\mathbf{P}(z,z_0)=\mathbf{I}+(z-z_0)\mathbf{A}+\frac{1}{2}(z-z_0)^2\mathbf{A}\mathbf{A}+\cdots=\mathrm{e}^{(z-z_0)\mathbf{A}} \tag{5.91}$$

若介质为成层介质，则具体计算时将每一层的 $\mathbf{A}(z)$ 看作为常量。按链式法则，每一层有

$$\mathbf{P}(z,z_0)=\exp[(z-z_{k-1})\mathbf{A}_k]\prod_{l=1}^{k-1}\exp[(z_l-z_{l-1})\mathbf{A}_l] \tag{5.92}$$

对一个具有不同本征值 $\lambda_k(k=1,2,\cdots,n)$ 的矩阵 $\mathbf{A}$，有关 $\mathbf{A}$ 的函数可按 Sylvester 公式展开，表示成

$$F(\mathbf{A})=\sum_{k=1}^{n}F(\lambda_k)\frac{\prod\limits_{r\neq k}(\mathbf{A}-\lambda_r\mathbf{I})}{\prod\limits_{r\neq k}(\lambda_k-\lambda_r)} \tag{5.93}$$

那么，当 $F(\mathbf{A})=\mathrm{e}^{(z-z_0)\mathbf{A}}$ 时，令 $d=(z-z_0)$，则

$$F(d)=\mathrm{e}^{d\mathbf{A}}=\sum_{k=1}^{n}\mathrm{e}^{\lambda_k d}\prod_{r=k}\frac{(\mathbf{A}-\lambda_r\mathbf{I})}{(\lambda_k-\lambda_r)} \tag{5.94}$$

当 n 为偶数时，将本征值写成 $\lambda_0\pm\lambda_k(k=1,2,\cdots,n/2)$，则

$$F(d)=\mathrm{e}^{d\mathbf{A}}=\mathrm{e}^{\lambda_0 d}\sum_{k=1}^{\lambda/2}\left[\mathbf{I}\mathrm{ch}\lambda_k d+(\mathbf{A}-\lambda_0\mathbf{I})\frac{\mathrm{sh}\lambda_k d}{\lambda_k}\right]$$

$$\cdot\prod_{r\neq k}\frac{(\mathbf{A}-\lambda_0\mathbf{I})^2-\lambda_k^2\mathbf{I}}{(\lambda_k^2-\lambda_r^2)} \tag{5.95}$$

对于勒夫面波，$n=2$。令 $\lambda_0=0,\lambda_i=\pm\left(k^2-\dfrac{\omega^2}{\beta^2}\right)^{1/2}=\pm\nu$，则

$$F(d)=\mathbf{I}\mathrm{ch}\nu d+\mathbf{A}\frac{\mathrm{sh}\nu d}{\nu}=\begin{pmatrix}\mathrm{ch}\nu d & \dfrac{\mathrm{sh}\nu d}{\mu\nu}\\ \mu\nu\mathrm{sh}\nu d & \mathrm{ch}\nu d\end{pmatrix} \tag{5.96}$$

此即为所求的传播矩阵 $\mathbf{P}(z,z_0)$ 值。

不论 ν 为实数或虚数，$F(d)$ 的各个元素通常为实数，代入式(5.86)，可得到 n 层均匀介质中勒夫面波位移-应力矢量

$$\boldsymbol{l}(z_n)=\begin{pmatrix}l_1(z_n)\\l_2(z_n)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{ch}\nu_n(z_n-z_0) & \dfrac{\mathrm{sh}\nu_n(z_n-z_0)}{\mu_n\nu_n}\\ \mu_n\nu_n\mathrm{sh}\nu_n(z_n-z_0) & \mathrm{ch}\nu_n(z_n-z_0)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}l_1(z_0)\\l_2(z_0)\end{pmatrix}\tag{5.97}$$

那么，半空间的上、下行波的振幅也可用 z_0 处的位移-应力矢量来表示

$$\begin{pmatrix}\dot{S}_{n+1}\\ \grave{S}_{n+1}\end{pmatrix}=\boldsymbol{w}_{n+1}=\mathbf{F}_{n+1}^{-1}\boldsymbol{l}=\mathbf{F}_{n+1}^{-1}\mathbf{P}(z_n,z_0)\boldsymbol{l}(z_0)=\mathbf{B}\boldsymbol{l}(z_0)\tag{5.98}$$

按无穷远处的辐射条件，得 $\grave{S}_{n+1}=0$，按地表边界条件，得 $l_2(z_0)=0$，那么

$$\boldsymbol{w}_{n+1}=\begin{pmatrix}\dot{S}_{n+1}\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B_{11}&B_{12}\\B_{21}&B_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}l_1(z_0)\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B_{11}l_1(z_0)\\B_{21}l_1(z_0)\end{pmatrix}\tag{5.99}$$

由此，对于有意义的本征函数 $\boldsymbol{l}$，可得到确定本征值的频散方程

$$B_{21}=0\tag{5.100}$$

因为

$$\mathbf{B}=\mathbf{F}_{n+1}^{-1}\mathbf{P}(z_n,z_0)$$

求式(5.70)的逆并联合式(5.96)的 $\mathbf{P}(z_n,z_0)$，得

$$B_{21}=\frac{1}{2\mu_{n+1}\nu_{n+1}}\big[\nu_{n+1}\mu_{n+1}e^{\nu_{n+1}z_n}\mathrm{ch}\nu_n(z_n-z_0)+\nu_n\mu_n e^{\nu_{n+1}z_n}\mathrm{sh}\nu_n(z_n-z_0)\big]\tag{5.101}$$

对于半空间上覆盖有厚度为 H 的一层介质($n=1$)，令 $z_0=0$，$z_1=H$，则式(5.100)写成

$$\nu_2\mu_2\mathrm{ch}\nu_1H+\mu_1\nu_1\mathrm{sh}\nu_1H=0\tag{5.102}$$

由于 $k=\frac{\omega}{c}$，$\beta_1<c<\beta_2$，则 $\nu_1=\omega\sqrt{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{\beta_1^2}}=\mathrm{i}\omega\sqrt{\frac{1}{\beta_1^2}-\frac{1}{c^2}}=\mathrm{i}\bar{\nu}_1$，

$\nu_2=\omega\sqrt{\dfrac{1}{c^2}-\dfrac{1}{\beta_2^2}}$，因此，式(5.102)可写成

$$\mathrm{ch}\,\mathrm{i}\bar{\nu}_1 H+\frac{\mathrm{i}\mu_1\bar{\nu}_1}{\mu_2\nu_2}\mathrm{sh}\,\mathrm{i}\bar{\nu}_1 H=0$$

此即为

$$\tan\bar{\nu}_1 H=\frac{\mu_2\nu_2}{\mu_1\bar{\nu}_1}$$

它就是勒夫面波周期方程式(5.35)。

对于瑞利面波，$n=4$。同理，有

$$\boldsymbol{w}_{n+1}=\mathbf{F}_{n+1}^{-1}\mathbf{P}(z_n,z_0)\boldsymbol{l}(z_0)=\mathbf{B}\boldsymbol{l}(z_0) \tag{5.103}$$

用边界条件，得到

$$\begin{pmatrix}\dot{\mathrm{P}}_{n+1}\\ \dot{\mathrm{S}}_{n+1}\\ 0\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14}\\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & B_{24}\\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & B_{34}\\ B_{41} & B_{42} & B_{43} & B_{44}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}l_3(z_0)\\ l_1(z_0)\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \tag{5.104}$$

本征值由下式给出的频散方程定出。

$$\begin{vmatrix}B_{31} & B_{32}\\ B_{41} & B_{42}\end{vmatrix}=0 \tag{5.105}$$

在近代地震学的计算中，矩阵法在位移的高阶近似以及提高算题速度方面，都以其特有的优点而得到普遍使用。

§6 球面波在平界面的反射与首波

表面点源在半空间的传播，在地震学中是所谓 Lamb 问题的一部分。为引入这一问题，可把点源发射出的球面波表示成平面波的叠加或柱面波的叠加，其基本运算原理在第二章已提出。

在时间域考虑包括点源项的非齐次波动方程

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}-c^2\nabla^2\varphi=4\pi c^2\delta(\boldsymbol{x})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \tag{5.106}$$

在无限均匀介质中，对于零初始条件，其解为

$$\varphi(\boldsymbol{x},t) = \frac{1}{R}e^{i\omega(\frac{R}{c}-t)} \tag{5.107}$$

式中 $R=|\boldsymbol{x}|=(x^2+y^2+z^2)^{1/2}$，$\varphi(\boldsymbol{x},t)$为简谐球面波的一般表达式，它是随时间的稳态振动。下面通过 Fourier 变换方法引出其空间依赖性。对方程(5.106)作关于空间变量 $\boldsymbol{x}(x,y,z)$的 Fourier 变换，即

$$\iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}e^{-i\omega t}e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}d\boldsymbol{x} - c^2\iiint\limits_{-\infty}^{\infty}\nabla^2\varphi e^{-i\omega t}e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}d\boldsymbol{x}$$

$$= 4\pi c^2\iiint\limits_{-\infty}^{\infty}\delta(\boldsymbol{x})e^{-i\omega t}e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}d\boldsymbol{x}$$

按 Fourier 变换对

$$\begin{cases}\varphi(\boldsymbol{x},t) = \dfrac{1}{(2\pi)^3}\displaystyle\iiint\limits_{-\infty}^{\infty}\Phi(\boldsymbol{k},t)e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}d\boldsymbol{k} \\ \Phi(\boldsymbol{k},t) = \displaystyle\iiint\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(\boldsymbol{x},t)e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}d\boldsymbol{x}\end{cases}$$

类似地有

$$\begin{cases}\delta(\boldsymbol{x},t) = \dfrac{1}{(2\pi)^3}\displaystyle\iiint\limits_{-\infty}^{\infty}F(\boldsymbol{k},t)e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}d\boldsymbol{k} \\ F(\boldsymbol{k},t) = \displaystyle\iiint\limits_{-\infty}^{\infty}\delta(\boldsymbol{x})e^{-i\omega t}e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}d\boldsymbol{x} = e^{-i\omega t}\end{cases}$$

可得 $\varphi(\boldsymbol{x},t)$的谱函数为

$$\Phi(\boldsymbol{k},t)=\frac{4\pi c^2}{k^2c^2-\omega^2}e^{-i\omega t} \text{ 及 } k^2=k_x^2+k_y^2+k_z^2$$

再作逆变换，得

$$\varphi(\boldsymbol{x},t)=\frac{1}{R}e^{i\omega(\frac{R}{c}-t)} = \frac{1}{(2\pi)^3}\iiint\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{4\pi c^2}{k^2c^2-\omega^2}e^{-i\omega t}e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}d\boldsymbol{k}$$

$$= \frac{e^{-i\omega t}}{2\pi^2}\iiint_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}}{k^2-\frac{\omega^2}{c^2}}\mathrm{d}k_x\mathrm{d}k_y\mathrm{d}k_z \tag{5.108}$$

此式表示，球面波 $\varphi(\boldsymbol{x},t)$ 是用权重函数 $\left[2\pi^2\left(k^2-\frac{\omega^2}{c^2}\right)\right]^{-1}$ 按 k_x，k_y，k_z 的一定次序排列的平面波 $e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)}$ 的叠加。

具体作积分时，先对 k_z 进行积分。由于被积函数在 $k_z=\pm\left(\frac{\omega^2}{c^2}-k_x^2-k_y^2\right)^{1/2}$ 处有极点，当 k_z 取实数时，这些极点位于实轴上，与积分路径冲突。因此，取 k_z 为复数。这在物理上表示相应的介质为滞弹性介质。此时，$k_z^2=(\mathrm{Re}k_z)^2-(\mathrm{Im}k_z)^2+2i\mathrm{Re}k_z\mathrm{Im}k_z$。令其虚数为一小数 ε，则有 $\mathrm{Re}k_z\mathrm{Im}k_z=\varepsilon$，在复平面上它表示在第一、三象限的双曲线。由此将极点的位置变到第一、三象限，消除了与积分路径的冲突，见图(5.14)。定义第一象限中极点的位置为 $k_z=i\gamma=+\left(\frac{\omega^2}{c^2}-k_x^2-k_y^2\right)^{1/2}$，第三象限中极点的位置为 $k_z=-i\gamma=-\left(\frac{\omega^2}{c^2}-k_x^2-k_y^2\right)^{1/2}$，其中 $\gamma=\left(k_x^2+k_y^2-\frac{\omega^2}{c^2}\right)^{1/2}$，在虚部不大的情况下，$\mathrm{Re}\gamma>0$，$\mathrm{Im}\gamma<0$。现在，对积分 $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ik_z z}}{k_z^2-\left(\frac{\omega^2}{c^2}-k_x^2-k_y^2\right)}\mathrm{d}k_z=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-\gamma z}}{k_z^2-(i\gamma)^2}\mathrm{d}k_z$ 对于 $z>0$ 在复 k_z 平面的上半平面作回路积分；同理，对于 $z<0$，在下半平面作回路积分(图 5.15)。应用留数定理，最后得到

$$\varphi(\boldsymbol{x},t)=\frac{1}{R}e^{i\omega\left(\frac{R}{c}-t\right)}=\frac{e^{-i\omega t}}{2\pi}\iint_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(ik_x x+ik_y y-\gamma|z|)}{\gamma}\mathrm{d}k_x\mathrm{d}k_y \tag{5.109}$$

式中 $\gamma=\left(k_x^2+k_y^2-\frac{\omega^2}{c^2}\right)^2$，$\mathrm{Re}\gamma>0$。此称为 Weyl 积分，表示球面波 $\varphi(\boldsymbol{x},t)$ 可用确定速度为 c 的平面波按 k_x、k_z 叠加来表述。但对 k_x、k_y 积分的某些部分，γ 为正实数 $\left(\frac{\omega^2}{c^2}<k_x^2+k_y^2\right)$，表述的是平行于

xy 平面的不均匀平面波的叠加。

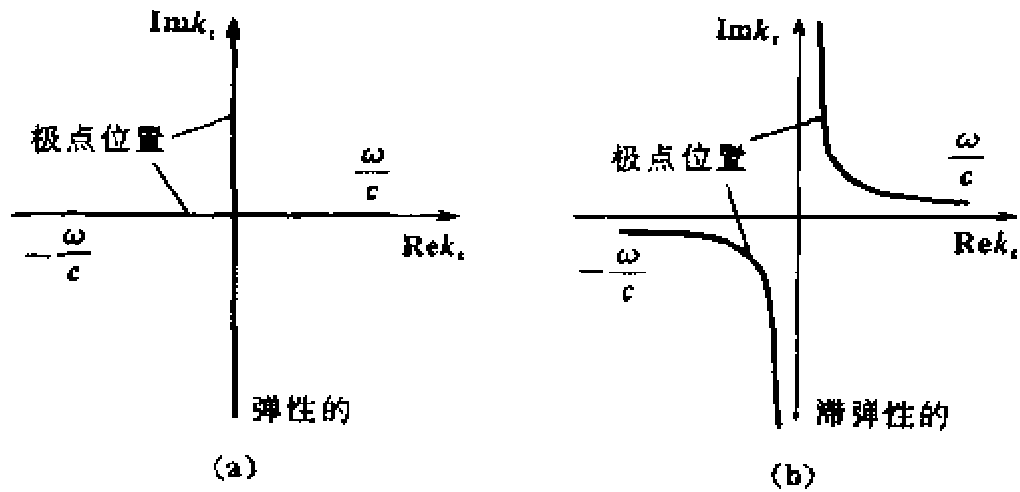


图 5.14 对于 $\omega>0$，复 k_z 平面内极点的位置

(a) 弹性介质；(b) 衰减介质

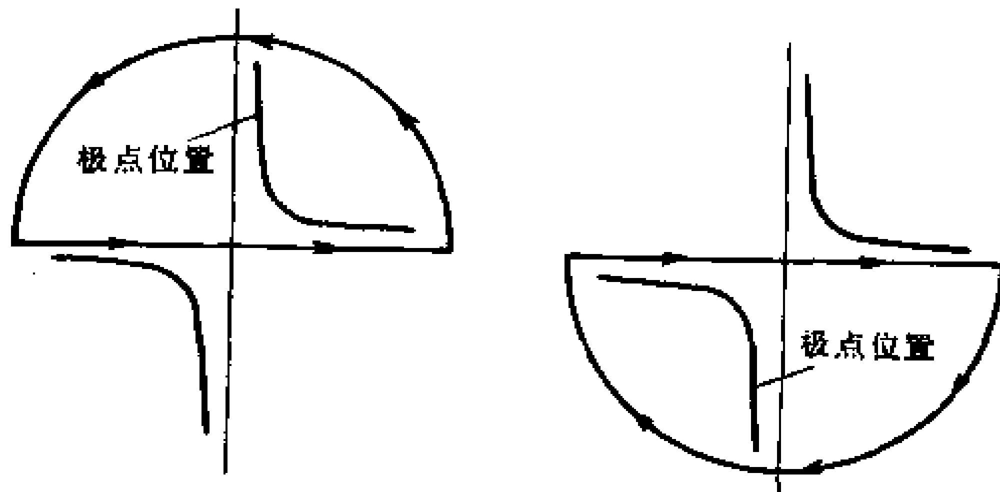


图 5.15 复 k_z 平面内的积分路径

(a) $z>0$；(b) $z<0$

若将 k_x、k_y 用平面极坐标（k_r，ϕ）表示，即 $k_x=k_r\cos\phi$，$k_y=k_r\sin\phi$，且有 $\mathrm{i}\gamma=\left(\frac{\omega^2}{c^2}-k_r^2\right)^{1/2}$，$\mathrm{d}k_x\mathrm{d}k_y=k_r\mathrm{d}k_r\mathrm{d}\phi$。并引入极坐标（$r$，$\varphi$），$x=r\cos\varphi$，$y=r\sin\varphi$，$r$ 为平面径向坐标，φ 为平面方位坐标，那么，式（5.109）变成

$$\frac{e^{-i\omega t}}{2\pi}\int_0^\infty dk_r\int_0^{2\pi}d\varphi'\ \frac{k_r}{\gamma}\exp(ik_r r\cos(\varphi-\varphi')-\gamma|z|) \qquad (5.110)$$

引入零阶 Bessel 函数的表示式 $2\pi J_0(k_r r)=\int_0^{2\pi}\exp(ik_r r\cos\Phi)d\Phi$，最后可得

$$\varphi(x,t)=\frac{1}{R}e^{i\omega(\frac{R}{c}-t)}=\int_0^\infty\frac{k_r J_0(k_r r)e^{-(\gamma|z|+i\omega t)}}{\gamma}dk_r$$

$$(\mathrm{Re}\gamma>0) \qquad (5.111)$$

此为 Sommerfeld 积分，表示球面波也可展成对称于 z 轴的柱面波的叠加。式中水平波数 $k_r=\omega p=\sqrt{k_x^2+k_y^2}$，那么 $i\gamma=\omega\sqrt{\frac{1}{c^2}-p^2}=\omega\xi$（$\xi$ 为垂直慢度），即 $-\gamma=i\omega\xi$。将它代入式（5.111），可得

$$\varphi(x,t)=\frac{1}{R}e^{i\omega(\frac{R}{c}-t)}=i\omega e^{-i\omega t}\int_0^\infty\frac{p}{\xi}J_0(\omega pr)e^{i\omega\xi|z|}dp$$

$$(\mathrm{Re}\gamma>0,\mathrm{Im}\xi>0) \qquad (5.112)$$

对于给定的空间点，复 p 平面上的积分 $\int_0^\infty\frac{\omega p}{\xi}J_0(\omega pr)e^{i\omega\xi|z|}dp$ 的值为频率 ω 的函数，可写成 $I(\omega)=\int_0^\infty F(p)e^{\omega f(p)}dp$ 的指数形式的积分。对于高频波，即 ω 很大时，我们用最速下降法（The method of steepest descents）求出积分的近似值。

为阐述的一般性，将 $I(\omega)$ 积分写成 $I(\Omega)=\int_C F(\zeta)\exp(\Omega f(\zeta))d\zeta$ 的形式，表示 $I(\Omega)$ 为复 ζ 平面上积分路径为 C 的指数积分。被积函数中的 $F(\zeta)$ 与 $f(\zeta)$ 在区域上（内）解析，且 $F(\zeta)$ 较为稳定。令 $f(\zeta)=\varphi(x,y)+i\psi(x,y)$，$(\zeta=x+iy)$，则 $e^{\Omega f(\zeta)}=e^{\Omega\varphi}e^{i\Omega\psi}$，当 Ω 值较大时，指数函数的主要贡献由 $e^{\Omega\varphi}$ 决定，$e^{i\Omega\psi}$ 为振荡项，不会抵消 $e^{\Omega\varphi}$ 的贡献。就是说，当 Ω 较大时，积分的主要贡献由 $f(\zeta)$ 的实部来决定。那么，可寻找一条使函数 $\varphi(x,y)$ 最速下降的路径 C_0，在此路径上点 ζ_0 附近集中了相对大的 $\varphi(x,y)$ 值，此 ζ_0 称为鞍点（The saddle point）。求出鞍点附近小区间内的

$\varphi(x,y)$ 值，即可得到积分 $I(\Omega)$ 的近似值。

由于 $f(\zeta)$ 解析，符合哥西条件 $\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial y}$ 及 $\frac{\partial\varphi}{\partial y}=-\frac{\partial\psi}{\partial x}$，在 ζ 平面上，此条件也表示曲线族 $\varphi=\text{const}$ 与 $\psi=\text{const}$ 相互正交。如果说 $\varphi=\text{const}$ 为 $f(\zeta)$ 的水平曲线路径，则 φ 沿其法线方向 $\psi=\text{const}$ 的路径急速变化，此曲线族中的一条就是所寻求的路径 C_0。这样，可将积分路径 C 改变为 C_0。在 C_0 上的 ζ_0 处，有 $\varphi'(\zeta_0)=0$ 及 $\psi'(\zeta_0)=0$。那么，路径 C_0 上的 ζ_0 点由方程 $f'(\zeta_0)=0$ 决定。取 $f(\zeta)=f(\zeta_0)-\xi^2$，$\xi$ 为从 $-\infty$ 至 $+\infty$ 的实数，可看出 $\psi(\zeta)=\psi(\zeta_0)$（保持常数），$\varphi(\zeta)=\varphi(\zeta_0)-\xi^2$。当 $\xi=0$ 时，$\varphi(\zeta)=\varphi(\zeta_0)$ 为最大值，此点即为鞍点 ζ_0。当 $\xi\neq 0$，即离开 ζ_0 点时，函数 $\varphi(\zeta)$ 值减小。为了在 ζ 面上画出路径 C_0，可把 ξ 扩充为任意复数 $\xi=\xi_R+i\xi_I$，那么，$\varphi=\varphi(\zeta_0)-(\xi_R^2-\xi_I^2)=\text{const}$ 与 $\psi=\psi(\zeta_0)-2\xi_R\xi_I=\text{const}$ 的两组正交曲线族为双曲线族，如图 5.16 所示。图中实轴（$\xi_I=0$）为最速下降（谷）路径 C_0，虚轴（$\xi_R=0$）为最速增长（脊）路径。还可设想在 ζ 平面上空构成函数 $\varphi(\zeta)$ 的马鞍地形图（图 5.17），故 ζ_0（即 $\xi=0$ 的点）称为鞍点。现在，只要 $f(\zeta)$ 沿路径 C_0 解析，沿任意路径 C 的积分就可用同一被积函数沿最速下降路径 C_0 所取的积分来代替。但是，当路径 C_0 上有奇点时，为了保持函数 $f(\zeta)$ 的解析性必须绕过它们，而奇点对积分有贡献，所以必须对积分补充某些项。那么，指数积分的值可写成 $I(\Omega)=\int_{C_0}+$ 绕过奇点所得的某些补充项。这些补充项，当奇点为支点时，为割线积分值；若奇点为极点，则为留数项。

至于鞍点的贡献，可将解析函数 $F(\zeta)$ 及 $f(\zeta)$ 在 ζ_0 处作 Taylor 展开，取 $F(\zeta)\approx F(\zeta_0)$ 及 $f(\zeta)\approx f(\zeta_0)+\frac{1}{2!}(\zeta-\zeta_0)^2 f''(\zeta_0)$（略去 $(\zeta-\zeta_0)^3$ 以上的项，且 $f'(\zeta_0)=0$）。那么，可得积分值

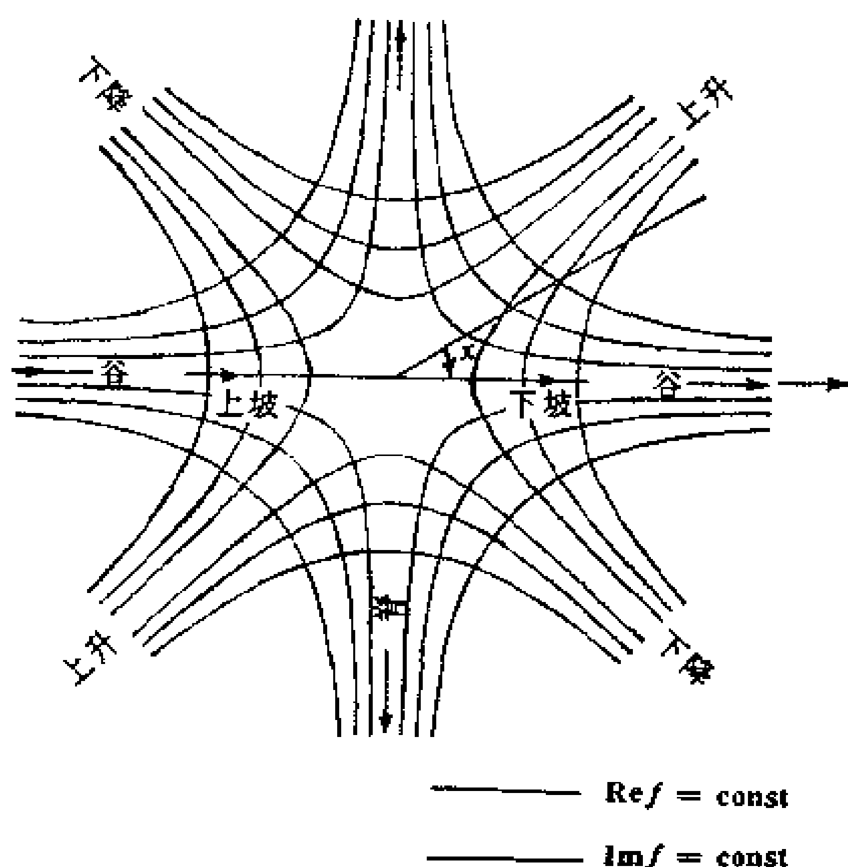


图 5.16　最速下降路径图

$$I(\Omega)=\int_{C_0}F(\zeta)\exp(\Omega f(\zeta))\mathrm{d}\zeta\approx\frac{\pm\sqrt{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\chi}\mathrm{e}^{\Omega f(\zeta_0)}}{|\Omega f''(\zeta_0)|^{1/2}}F(\zeta_0)$$

$$(\text{当 }\Omega\to\infty)\qquad(5.113)$$

式中 χ 为路径 C_0 与正的实 ζ 轴的夹角，其符号与 $f''(\zeta_0)$ 相同。

上述求积分值 $I(\Omega)$ 的方法，称为最速下降法。

下面讨论两个紧密接触的均匀液体半空间中球面波的传播。设两半空间的平分界面为 $z=0$。位于介质 $1(\rho_1,\alpha_1)$ 的点源发射球面波，点源深度为 z_0。观测点在介质 1 中（图 5.18），波在界面上反射回介质 1 并透射入介质 $2(\rho_2,\alpha_2)$，且有 $\alpha_1>\alpha_2$。这里着重讨论频率较高且距离较远的反射与折射。源点一接收点的距离 $R=[x^2+y^2+(z-z_0)^2]^{1/2}=[r^2+(z-z_0)^2]^{1/2}$。

将震源产生的压力球面波展成柱面波，按式（5.112）有

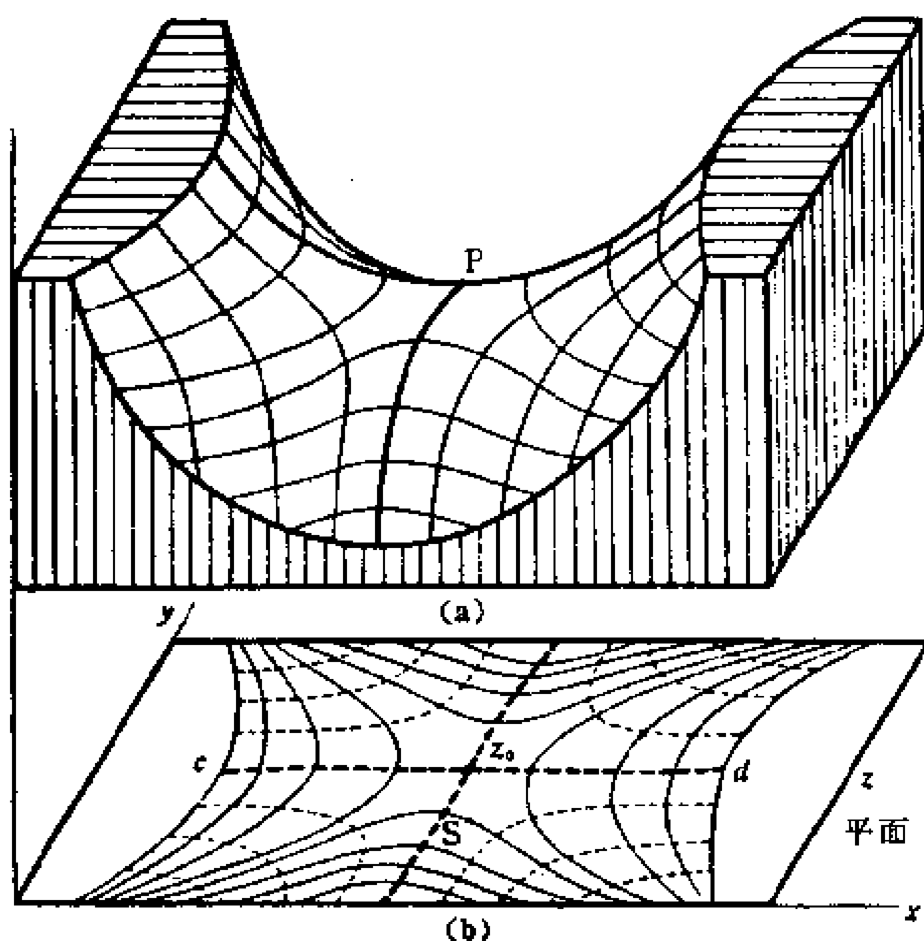


图 5.17 马鞍地形图

$$P^{入射} = \frac{A}{R} e^{i\omega(\frac{R}{\alpha_1} - t)}$$

$$= i\omega e^{-i\omega t} \int_0^\infty \frac{Ap}{\xi_1} J_0(\omega pr) \exp(i\omega\xi_1 |z - z_0|) dp \qquad (5.114)$$

$$P^{反射} = \frac{B}{R} e^{i\omega(\frac{R}{\alpha_1} - t)}$$

$$= i\omega e^{-i\omega t} \int_0^\infty \frac{Bp}{\xi_1} J_0(\omega pr) \exp[-i\omega\xi_1(z + z_0)] dp \quad (5.115)$$

且 $\mathrm{Im}\xi_1 > 0$ $(z<0)$，$\xi_1 = (\alpha_1^{-2} - p^2)^{1/2}$

$$P^{折射} = \frac{C}{R} e^{i\omega(\frac{R}{\alpha_2} - t)}$$

$$= i\omega e^{-i\omega t} \int_0^\infty \frac{Cp}{\xi_1} J_0(\omega pr) \exp[-i\omega\xi_1 z_0 + i\omega\xi_2 z] dp \quad (5.116)$$

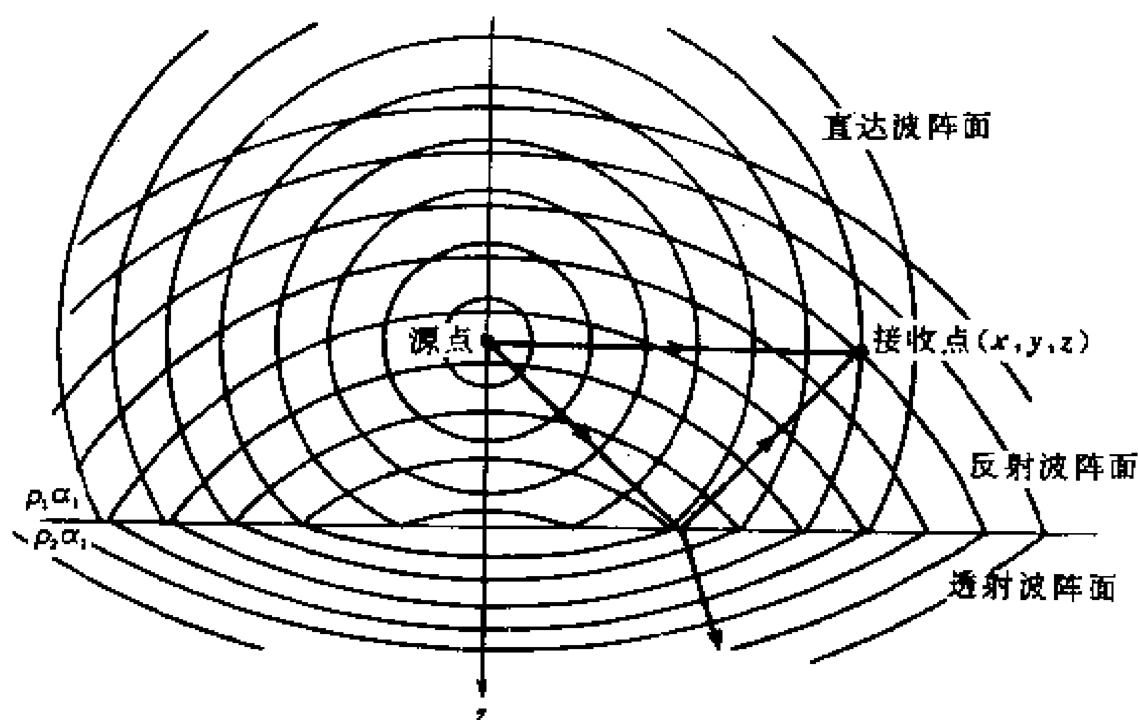


图 5.18 液体半空间的球面波

且 $\mathrm{Im}\xi_2>0(z>0)$，$\xi_2=(\alpha_2^{-2}-p^2)^{1/2}$

上述式子中的 A、B、C 分别为入射波振幅及反射、折射波振幅。按在 $z=0$ 的界面上，压力和垂直位移连续的边界条件，可得反射因数和折射因数为

$$\left.\begin{aligned}\frac{B}{A}&=-\frac{\rho_1\xi_2-\rho_2\xi_1}{\rho_1\xi_2+\rho_2\xi_1}=-\frac{(\rho_1\alpha_1\cos i_2-\rho_2\alpha_1\cos i_1)}{\rho_1\alpha_1\cos i_2+\rho_2\alpha_2\cos i_1}\\ \frac{C}{A}&=\frac{2\rho_2\xi_1}{\rho_1\xi_2+\rho_2\xi_1}=\frac{2\rho_2\alpha_2\cos i_1}{\rho_1\alpha_1\cos i_2+\rho_2\alpha_2\cos i_1}\end{aligned}\right\}\quad(5.117)$$

因 $J_0(x)=\frac{1}{2}\left(H_0^{(1)}(x)+H_0^{(2)}(x)\right)$，$H_0^{(2)}(x)=-H_0^{(1)}(-x)$，则

$J_0(x)=\frac{1}{2}\left(H_0^{(1)}(x)-H_0^{(1)}(-x)\right)$，可得到

$$\mathrm{P}^{\text{反射}}=\frac{\mathrm{i}\omega}{2}\exp(-\mathrm{i}\omega t)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{Bp}{\xi_1}H_0^{(1)}(\omega pr)\exp[-\mathrm{i}\omega\xi_1(z+z_0)]\mathrm{d}p \quad (5.118)$$

而当 $r\gg\lambda$(波长)时，$H_0^{(1)}(\omega pr)$的渐近展开式为

$$H_0^{(1)}(\omega pr) = \left(\frac{2}{\pi\omega pr}\right)^{1/2}\exp\left[\mathrm{i}\left(\omega pr - \frac{\pi}{4}\right)\right]$$
$$\left[1 - \frac{\mathrm{i}}{8\omega pr} + o\left(\frac{1}{\omega^2 p^2 r^2}\right)\right] \tag{5.119}$$

略去$\frac{1}{\omega}$及更高阶项，代入式(5.118)可得

$$P^{反射} = \left(\frac{\omega}{2\pi r}\right)^{1/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega-\frac{\pi}{4})}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{Bp^{1/2}}{\xi_1}\exp[\mathrm{i}\omega(pr-\xi_1 z-\xi_1 z_0)]\mathrm{d}p$$
$$(\mathrm{Im}\xi_1 > 0, \mathrm{Im}\xi_2 > 0) \tag{5.120}$$

式中 $B=B(p)$是 p 的偶函数。

现在，用最速下降法来求式(5.120)中的积分值。

首先，可看出被积函数具有奇异点，因为 $\frac{B}{\xi_1} = -A\frac{\rho_1\frac{\xi_2}{\xi_1}-\rho_2}{\rho_1\frac{\xi_2}{\xi_1}+\rho_2} = -A\left[\rho_1\sqrt{\frac{\alpha_2^{-2}-p^2}{\alpha_1^{-2}-p^2}}-\rho_2\right]\Big/\left[\rho_1\sqrt{\frac{\alpha_2^{-2}-p^2}{\alpha_1^{-2}-p^2}}+\rho_2\right]$ 中的 ξ_1 和 ξ_2 为多值函数，在复平面上的分支点为$\pm\frac{1}{\alpha_1}$及$\pm\frac{1}{\alpha_2}$，而 $p^{1/2}=pH_0^{(1)}(\omega pr)=pp^{-1/2}$亦为多值函数，分支点为$-\infty$及 0，为保持被积函数的解析性，需作割线绕过分支点。在割线上，$\mathrm{Im}\xi=0$，即 $\alpha^{-2}-p^2$ 为正实数，令 $p=\mathrm{Re}p+\mathrm{iIm}p$，那么，$\frac{1}{\alpha^2}-(\mathrm{Re}p)^2+(\mathrm{Im}p)^2-2\mathrm{i}(\mathrm{Re}p)(\mathrm{Im}p)\geqslant 0$。引入小数 ε ($\varepsilon > 0$)，令 $(\mathrm{Re}p)(\mathrm{Im}p)=\varepsilon$，表示分支点$\pm\frac{1}{\alpha_1}$，$\pm\frac{1}{\alpha_2}$的割线为第一、三象限的双曲线。在 $\varepsilon\to 0$ 时，其割线如图 5.19 所示。而$-\infty$、0 分支点的割线在负实轴上，那么，在负实轴上有三条割线，在正实轴上有两条。在复 p 平面上积分时，在实轴上的积分路径 C 位于三条割线稍上一点的负实轴上和两条割线稍下一点的正实轴上（从$-\infty$至$+\infty$）。当积分路径通过割线时，为使被积函数保持单值性，要求用两个 p 平面（Riemann 叶）来描述。

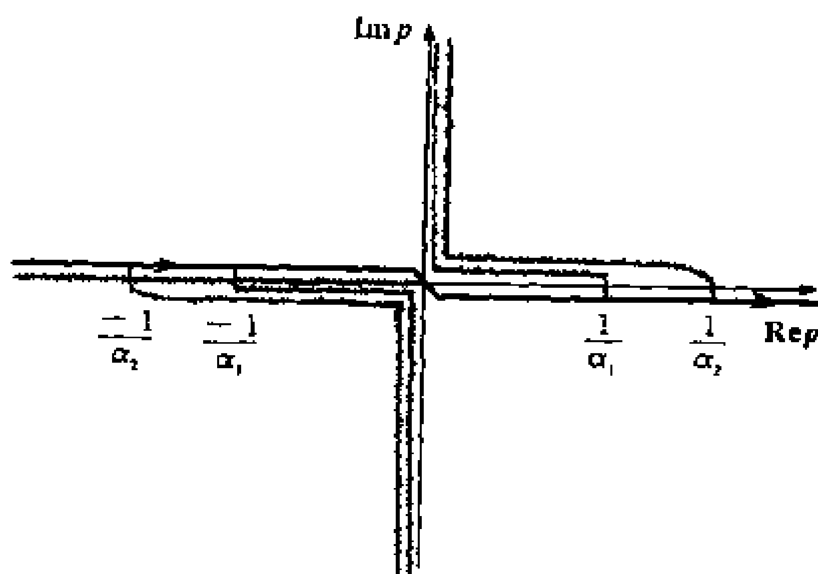


图 5.19　复平面内 ξ_1、ξ_2 及 $p^{1/2}$ 的分支割线

将式(5.120)中的积分写成 $I(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}F(p)e^{\omega f(p)}dp$ 的形式，其中 $F(p)=\frac{Bp^{1/2}}{\xi_1}$，$f(p)=i(pr+\xi_1|z+z_0|)$，$f'(p)=\frac{\partial f}{\partial p}=i\left(r-\frac{p|z+z_0|}{\xi_1}\right)$，$f''(p)=-i\frac{|z+z_0|}{\alpha_1^2\xi_1^3}$。令 $f'(p_s)=0$，使得 $\xi_1 r=p_s|z+z_0|$，它表示的几何关系如图 5.20 所示。鞍点 p_s 恰好给出源与接收点之间的反射射线。在复 p 平面上，$p_s=\frac{\sin i_s}{\alpha_1}=\frac{r}{R_0}\frac{1}{\alpha_1}<\frac{1}{\alpha_1}$，即在正实轴的左边($R_0$ 为像源点至接收点的距离)。最速下降路径 C_0 必通过鞍点。令 $f(p)=f(p_s)-X^2$，X 为正实数，而 $f(p_s)=i(p_s r+\xi_1|z+z_0|)=i\frac{R_0}{\alpha_1}$，$R_0=r\sin i_s+|z+z_0|\cos i_s$，那么，$f(p)-f(p_s)+X^2=D(p)=X^2+i(pr+\sqrt{\alpha_1^{-2}-p^2}|z+z_0|)-i\frac{R_0}{\alpha_1}=0$。可看出，$D(p)=0$ 表达的是 p 的二次曲线，此为路径 C_0 的方程。此二次曲线的渐近线的斜率 $m=\lim\limits_{p\to\infty}\frac{D(p)}{p}=ir-|z+z_0|$，即

$\mathrm{Im}p/\mathrm{Re}p = r/|z+z_0| = \tan i_s$。按 $f''(p)$的符号，得出 $\chi = -\frac{\pi}{4}$。现在，可在复 p 平面上画出最速下降路径 C_0，它是过鞍点 p_s 且与 p 实轴成 $-\frac{\pi}{4}$ 的二次曲线，如图 5.21 所示。从图上可看到，C_0 在 Bp_s 段要经过两条割线。为保持函数的单值性，C_0 必须离开 Riemann 顶叶（上盘）进入 $\mathrm{Im}\xi_1<0$ 及 $\mathrm{Im}\xi_2<0$ 的底叶（下盘），到达鞍点 p_s 处之后，C_0 重新出现在顶叶（$\mathrm{Im}\xi_1>0$，$\mathrm{Im}\xi_2>0$）。Bp_s 段路径用虚线示。在第一、四象限，用弧 C_1 和 C_2 将 C_0 连接起来，在这个回路中无奇点，积分值主要为鞍点的贡献。按式(5.113)，当频率值 ω 较大时

$$I(\omega) = \frac{\sqrt{2\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\chi}\mathrm{e}^{\omega f(p_s)}}{|\omega f''(p_s)|^{1/2}}F(p_s)$$

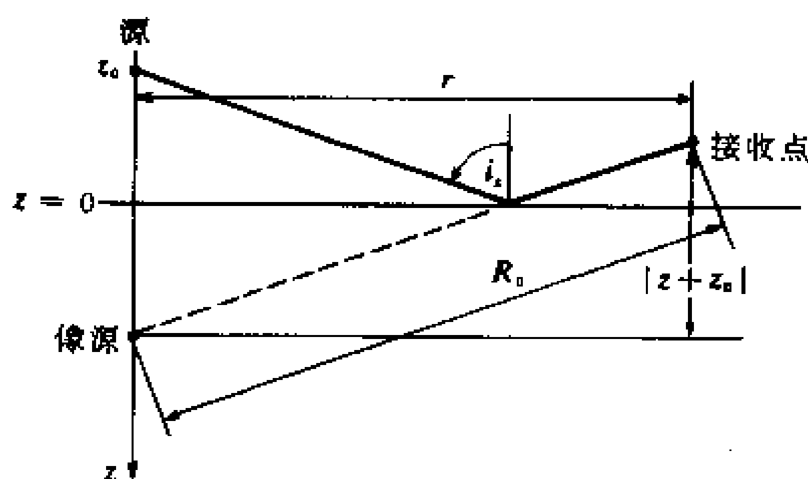


图 5.20 源点与接收点间界面反射射线的几何关系

将 $f(p_s)$及 $F(p_s)$、χ 代入上式，得到

$$I(\omega) = \frac{B(p_s)}{R_0}\left(\frac{2\pi r}{\omega}\right)^{1/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\omega R_0}{\alpha}}$$

将它代入式(5.120)中，得到

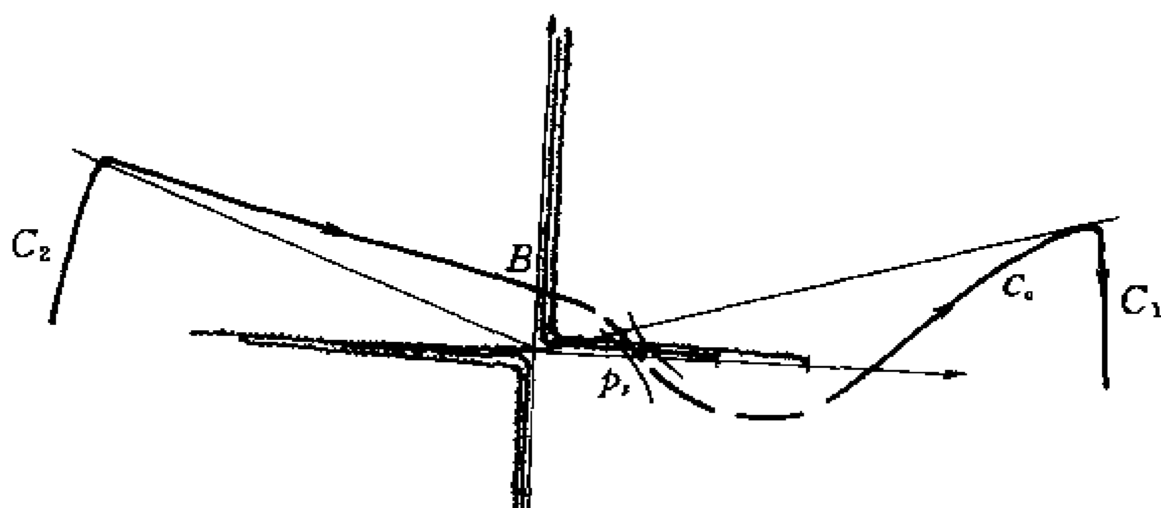


图 5.21　当 $\alpha_1>\alpha_2$ 时，复 p 平面上的最速下降路径 C_0

$$\mathrm{P}^{反射} \approx \frac{B(p_s)}{R_0} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\left(\frac{R_0}{\alpha_1}-t\right)} \quad (\omega \to \infty) \tag{5.121}$$

从式(5.121)可看出，当高频的球面波入射到平界面时，其反射波状况与平面波射线理论一样，它的几何扩散因子为 $\frac{1}{R_0}$，走时为 R_0/α_1。若保留 $\frac{1}{\omega}$ 及更高阶的项，则有

$$\mathrm{P}^{反射} = \frac{B(p_s)}{R_0}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{\mathrm{i}}{\omega}\right)^n\right] \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\left(\frac{R_0}{\alpha_1}-t\right)} \tag{5.122}$$

式中系数 a_n 为常数，依赖于源点至接收点的几何关系。作 Fourier 逆变换，得到时间域的结果

$$\mathrm{P}^{反射} = \frac{B(p_s)}{R_0}\left\{\delta\left(t - \frac{R_0}{\alpha_1}\right) + H\left(t - \frac{R_0}{\alpha_1}\right) \cdot \left[a_1 + a_2\left(t - \frac{R_0}{\alpha_1}\right) + a_3\left(t - \frac{R_0}{\alpha_1}\right)^2 + \cdots\right]\right\} \tag{5.123}$$

可看出，与时间域的入射波 $\mathrm{P}^{入射} = \frac{A}{R}\delta\left(t - \frac{R_0}{\alpha_1}\right)$ 相比较，反射波有一个较长的尾巴。

若令 $\alpha_1<\alpha_2$，波仍从介质 1 入射，则波将产生全反射，全反射

角 $i_c=\arcsin\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$。当 $i<i_c$ 时（$p<\alpha_1^{-1}$），称为小角反射波；当 $i>i_c$ 时（$p>\alpha_2^{-1}$），称为广角反射波。对于小角反射波，$p_s<\alpha_2^{-1}$（$\sin i_s=p_s\alpha_1$），其反射状况如式（5.121）所示。对于广角反射波，由于 $\alpha_1^{-1}>p_s>\alpha_2^{-1}$，故鞍点在 α_2^{-1} 与 α_1^{-1} 之间。有一点需注意，由于小角反射与广角反射的连续性，反射波位移仍要求 $\mathrm{Im}\xi_1>0$，$\mathrm{Im}\xi_2>0$。而这里却是 $\mathrm{Im}\xi_1<0$（因 $p_s<\alpha_1^{-1}$）及 $\mathrm{Im}\xi_2>0$（因 $p_s>\alpha_2^{-1}$），为保持函数的单值性，设此为 Riemann 面的第三叶，则需转入第二叶 $\mathrm{Im}\xi_1>0$ 及 $\mathrm{Im}\xi_2<0$，再转入第一叶 $\mathrm{Im}\xi_1>0$，$\mathrm{Im}\xi_2>0$。整个积分路径如图5.22所示。图中用圆弧 $\widehat{AB}$，$\widehat{GH}$，$\widehat{HA}$ 将积分路径连成回路，整个回路 $=\widehat{AB}+BCD$（绕过支点 α_2^{-1}）$+DEF$（第二叶）$+Fp_s$（第三叶）$+p_s\widehat{GH}+\widehat{HA}$。当回路半径 $R\to\infty$ 时，按约当引理，$\widehat{AB}$、$\widehat{GH}$、$\widehat{HA}$ 的贡献为零，$DEFp_sG$ 为最速下降路径，从而得到广角反射波。反射状况仍由式（5.121）表示，但需注意到 $B(p_s)$ 有相移。

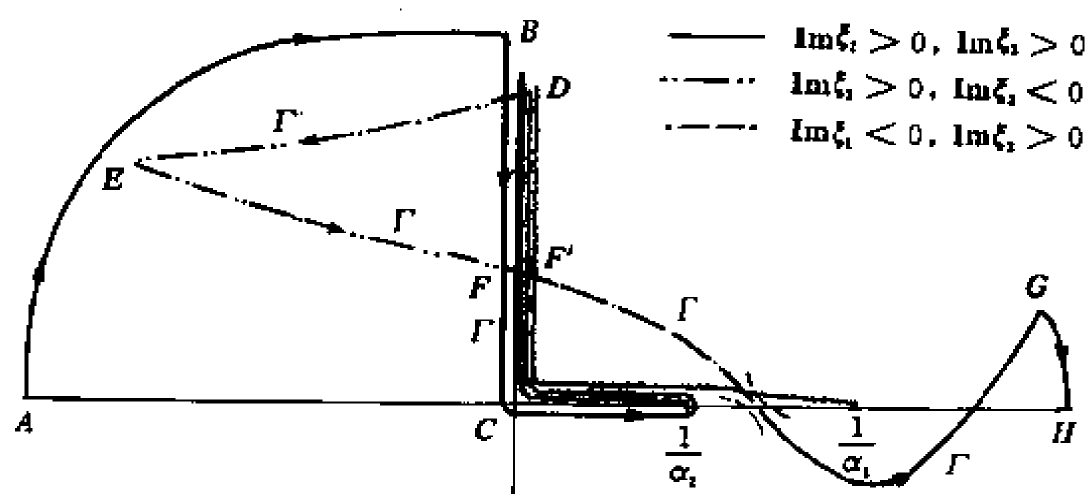


图 5.22 当 $\alpha_1<\alpha_2$ 时，复 p 平面上的积分路径

路径的另一贡献是绕分支点（奇点）α_2^{-1} 的割线积分。在 BCD

段，从 $p=0$ 至 $p=\alpha_2^{-1}$ 的正实轴分支割线上，过 α_2^{-1} 点时 ξ_2 变号，即在下岸 $\xi_2=\alpha_2^{-1}\cos i_2$，上岸则为 $\xi_2=-\alpha_2^{-1}\cos i_2$。仍从式(5.120)出发，其贡献为首波的形成，其积分值写成

$$
\begin{aligned}
& A\left(\frac{\omega}{2\pi r}\right)^{1/2} e^{-i(\omega t-\frac{\pi}{4})}\left(\int_{i\infty}^{0}+\int_{0}^{\frac{1}{\alpha_2}}\right)\cdot \\
& \left(\frac{-\rho_1\alpha_1\cos i_2+\rho_2\alpha_2\cos i_1}{\rho_1\alpha_1\cos i_2+\rho_2\alpha_2\cos i_1}-\frac{\rho_1\alpha_1\cos i_2+\rho_2\alpha_2\cos i_1}{-\rho_1\alpha_1\cos i_2+\rho_2\alpha_2\cos i_1}\right)\cdot \\
& \frac{\alpha p^{1/2}}{\cos i_1}\exp[i\omega(pr+\xi_1|z+z_0|)]\mathrm{d}p \\
& = A\left(\frac{\omega}{2\pi r}\right)^{1/2} e^{-i(\omega t-\frac{\pi}{4})}\left(\int_{i\infty}^{0}+\int_{0}^{\frac{1}{\alpha_2}}\right)F(p)e^{\omega f(p)}\mathrm{d}p \qquad (5.124)
\end{aligned}
$$

式中 $f(p)=i(pr+\xi_1|z+z_0|)$，$f\left(\frac{1}{\alpha_2}\right)=i\left(\frac{r}{\alpha_2}+\frac{\cos i_2}{\alpha_1}|z+z_0|\right)=it_h$，$\cos i_1=\sqrt{1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}=\cos i_c$，$\xi_1=\frac{\cos i_c}{\alpha_1}$（$i_c$ 为全反射角）。$f'\left(\frac{1}{\alpha_2}\right)=i\left(r-\frac{p|z+z_c|}{\xi_1}\right)\Big|_{\frac{1}{\alpha_2}}=i(r-|z+z_c|\tan i_c)=iL$，即 $L=r-|z+z_0|\tan i_c$。i_c 及 L 的几何意义可由图 5.23 看出。

从图中还可看出，首波走时 $t_h=(\alpha_1^{-1}\sec i_c)|z+z_0|+\alpha_2^{-1}L$。将 $f(p)$ 在 $p=\frac{1}{\alpha_2}$ 点处展开取一级项，得

$$
f(p)=f\left(\frac{1}{\alpha_2}\right)+\left(p-\frac{1}{\alpha_2}\right)f'\left(\frac{1}{\alpha_2}\right)=i\left[t_h+L\left(p-\frac{1}{\alpha_2}\right)\right]
$$

那么
$$
e^{\omega f(p)}=e^{i\omega[t_h+L(p-\frac{1}{\alpha_2})]}
$$
同时

$$
F(p)=-\left(\frac{\rho_1\alpha_1\cos i_2-\rho_2\alpha_2\cos i_1}{\rho_1\alpha_1\cos i_2+\rho_2\alpha_2\cos i_1}+\frac{\rho_1\alpha_1\cos i_2+\rho_2\alpha_2\cos i_1}{-\rho_1\alpha_1\cos i_2+\rho_2\alpha_2\cos i_1}\right)\cdot \frac{\alpha_1 p^{1/2}}{\cos i_1}
$$

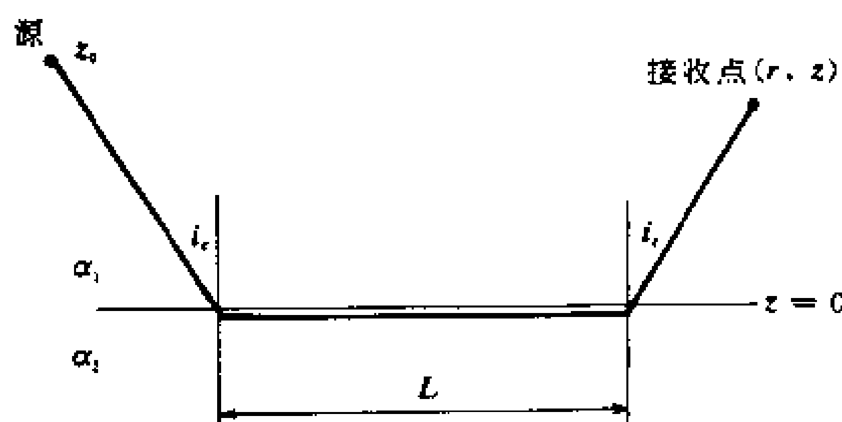


图 5.23 源点与接收点间的首波射线

取 $F(p)\approx F\left(\frac{1}{\alpha_2}\right)$，得

$$F(p)=-\left(\frac{2\rho_1\alpha_1\cos i_2}{\rho_2\alpha_2\cos i_1}\right)\cdot\frac{\alpha_1 p^{1/2}}{\cos i_1}=-\frac{2\sqrt{2}\rho_1\alpha_1^2\left(\frac{1}{\alpha_2}-p\right)^{1/2}}{\rho_2\alpha_2\left(1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\right)}$$

那么，式(5.124)的值可写为

$$\mathrm{P}^{首波}=-A\left(\frac{\omega}{\pi r}\right)^{1/2}\frac{2\rho_1\alpha_1^2 e^{i\frac{\pi}{4}}e^{i\omega(t_h-t)}}{\rho_2\alpha_2\left(1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\right)}\cdot$$

$$\left(\int_{i\infty}^{0}+\int_{0}^{\frac{1}{\alpha_2}}\right)\left(\frac{1}{\alpha_2}-p\right)^{1/2}e^{i\omega L\left(p-\frac{1}{\alpha_2}\right)}dp$$

令 $p-\frac{1}{\alpha_2}=iy^2$，则 $\left(\frac{1}{\alpha_2}-p\right)^{1/2}=i^{-1/2}y$，$dp=2iydy$。当 $p=0$ 时，$y=\sqrt{\frac{i}{\alpha_2}}$；$p=\frac{1}{\alpha_2}$ 时，$y=0$；$p=i\infty$ 时，$y=\infty$。于是由 $\int_0^\infty y^2e^{-ay^2}dy=\frac{1}{4}(\pi^{1/2}/a^{3/2})$，得到

$$\left(\int_{i\infty}^{0}+\int_{0}^{\frac{1}{\alpha_2}}\right)\left(\frac{1}{\alpha_2}-p\right)^{1/2}e^{i\omega L\left(p-\frac{1}{\alpha_2}\right)}dp$$

$$= -2\sqrt{\mathrm{i}}\int_0^{\infty} y^2 \mathrm{e}^{-\omega L y^2}\mathrm{d}y = -\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}{\omega^{3/2}L^{3/2}}$$

从而得到当高频时，绕过支点的补充项而形成的首波的值为

$$P^{首波} = \mathrm{i}\frac{A}{\omega}\frac{\rho_1\alpha_1^2}{\rho_2\alpha_2\left(1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\right)}\cdot\frac{1}{r^{1/2}L^{1/2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(t_h - t)} \qquad (5.125)$$

首波(The head waves) 在地震学中称为"圆锥波"(The conical waves)(因其波阵面为圆锥面)或称为"侧面波"(The lateral waves)。它以 $r^{-1/2}L^{-3/2}$的形式作几何扩散，当 $r\gg|z+z_0|$时，L 趋近于 r，使 $r^{-1/2}L^{-3/2}\approx r^{-2}$，表明首波比球面波及广角反射波扩散得快。它与反射波一样，在时间域有$\frac{\mathrm{i}}{\omega}$的幂次项，且尾部较长。在接近临界角时，$L\to 0$，$i_1\to i_c$，那么式(5.125)失效，表明此时高频射线理论对首波不再适用。

§7　球面波在弹性半空间的效应——瑞利面波

设点源位于 $z=h$ 处(图5.24)，它相对于过源点的竖直线为轴对称。源至观测点的距离 $R=\sqrt{r^2+(z-h)^2}$，解只依赖于(r,z)。对

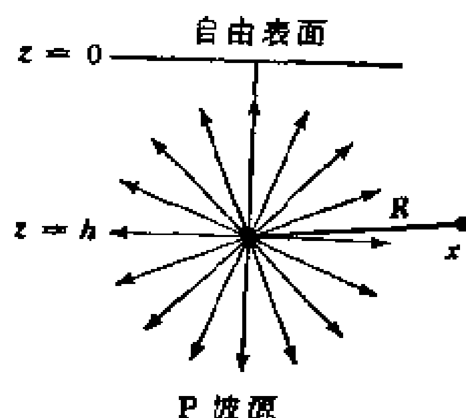


图 5.24　位于半空间中深度为 h 的点源

于 P-SV 耦合，位移表示为

$$\boldsymbol{u} = \nabla\varphi + \nabla \times \nabla(0,0,\psi)$$

P 波位函数 φ 满足

$$\ddot{\varphi} = \frac{\Phi}{\rho} + \alpha^2\nabla^2\varphi \tag{5.126}$$

SV 波位函数 ψ 满足

$$\ddot{\psi} = \frac{\Psi}{\rho} + \beta^2\nabla^2\psi \tag{5.127}$$

式中 Φ、Ψ 为点源处力的位函数，它们满足的运动方程为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f} &= \rho\ddot{\boldsymbol{u}} - (\lambda + 2\mu)\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{u}) + \mu\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{u}) \\ &= \nabla\Phi + \nabla\times\nabla\times(0,0,\Psi) \end{aligned} \tag{5.128}$$

对于 P 波点源，所产生的球面波

$$\varphi(\boldsymbol{x},t) = A\frac{1}{R}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\left(\frac{R}{\alpha}-t\right)} \tag{5.129}$$

入射到自由表面上，产生广义的反射波 $\acute{\mathrm{P}}\grave{\mathrm{P}}$、$\acute{\mathrm{P}}\grave{\mathrm{S}}$，用 Sommerfeld 公式表示为

$$\begin{aligned} \varphi &= A\mathrm{i}\omega\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\int_0^\infty \frac{p}{\xi}J_0(\omega pr)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\xi|z-h|}\mathrm{d}p \\ &\quad + A\mathrm{i}\omega\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\int_0^\infty \acute{\mathrm{P}}\grave{\mathrm{P}}\frac{p}{\xi}J_0(\omega pr)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\xi(z+h)}\mathrm{d}p \end{aligned} \tag{5.130}$$

$$\psi = A\mathrm{i}\omega\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\int_0^\infty \left(\acute{\mathrm{P}}\grave{\mathrm{S}}\frac{1}{\mathrm{i}\omega p}\cdot\frac{\beta}{\alpha}\right)\frac{p}{\xi}J_0(\omega pr)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(\xi h+\eta z)}\mathrm{d}p \tag{5.131}$$

当 $r\gg\lambda$ 时，用 $H_0^{(1)}(\omega pr)$ 的渐近式表示，得

$$\begin{aligned} \varphi &\approx A\left(\frac{\omega}{2\pi r}\right)^{1/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\omega t-\frac{\pi}{4}\right)}\int_{-\infty}^\infty \acute{\mathrm{P}}\grave{\mathrm{P}}\frac{p^{1/2}}{\xi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(pr+\xi z+\eta h)}\mathrm{d}p \\ &\quad (\mathrm{Im}\xi \geqslant 0, \mathrm{Im}\eta \geqslant 0) \end{aligned} \tag{5.132}$$

式中

$$\acute{\mathrm{P}}\grave{\mathrm{P}} = \frac{4\beta^2\xi\eta - \left(\frac{1}{\beta^2}-2p^2\right)^2}{4p^2\xi\eta + \left(\frac{1}{\beta^2}-2p^2\right)^2}, \xi = \alpha^{-1}\cos i = \sqrt{\alpha^{-2}-p^2}$$

$\eta=\beta^{-1}\cos j=\sqrt{\beta^{-2}-p^2}$，$p=\alpha^{-1}\sin i$。

在复 p 平面上，有支点 $p=\alpha^{-1}$ 和 $p=\beta^{-1}$，割线 $\mathrm{Im}\xi=0$ 及 $\mathrm{Im}\eta=0$ 为双曲线，还有极点 $p=C_R^{-1}$（由 $\grave{\mathrm{P}}\acute{\mathrm{P}}$ 分母为零得来），如图 5.25a,b 所示。当小角反射时，只有鞍点的贡献。鞍点所在的积分路径（最速下降路径）C_a 为二次曲线（图 5.25c）。鞍点的位置为 $p_s=\frac{\sin i_s}{\alpha}=\frac{r}{R_0}\frac{1}{\alpha}<\frac{1}{\alpha}$，按 $pr=\frac{R_0}{\alpha}$ 得到路径 C_a 在实轴上的第二个交点为 $p=\frac{1}{\alpha}\frac{1}{(r/R_0)}=\frac{1}{\alpha\sin i_s}$（图 5.25d）。当广角反射时（$r\gg z+h$），除鞍点路径 C_a 表示的表面 P 反射波外，还有支点 $p=\beta^{-1}$ 的路径 C_β 的贡献。它代表从源到自由表面向上减弱的非均匀 P 波，到自由表面后沿水平向传播的 SV 波，和从自由表面到接收点向下减弱的非均匀 P 波。它形成瑞利面波的 S 波分量。还有极点 $p=C_R^{-1}$ 的路径 C_R（图 5.25e）的贡献，它是瑞利面波的 P 波分量。此 P 波分量由式（5.132）被积函数的留数给出，其值主要是 $\grave{\mathrm{P}}\acute{\mathrm{P}}=\frac{4p^2\xi\eta-(\beta^{-2}-2p^2)^2}{R(p)}$ 的分母 $R(p)=4p^2\xi\eta+(\beta^{-2}-2p^2)^2=0$ 所致。因 $\grave{\mathrm{P}}\acute{\mathrm{P}}=\frac{M}{R}$ 为分数型，故

$$\mathrm{Res}(C_R^{-1})=\frac{M(C_R^{-1})}{R''(C_R^{-1})}=\lim_{p\to C_R^{-1}}\left[(p-C_R^{-1})\grave{\mathrm{P}}\acute{\mathrm{P}}\right]$$

$$=\frac{8\xi\eta}{C_R^2R'(C_R^{-1})}$$

这样，按留数定理，可得

$$\begin{aligned}\varphi_R&=A\left(\frac{\omega}{2\pi r}\right)^{1/2}e^{-i(\omega t-\frac{\pi}{4})}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{p}{\xi}\grave{\mathrm{P}}\acute{\mathrm{P}}e^{i\omega(pr+\xi z+\xi h)}\mathrm{d}p\\&=A\left(\frac{\omega}{2\pi r}\right)^{1/2}e^{-i(\omega t-\frac{\pi}{4})}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{8p^{3/2}\eta}{R(p)}e^{i\omega(pr+\xi z+\xi h)}\mathrm{d}p\\&=A\left(\frac{\omega}{2\pi r}\right)^{1/2}e^{-i(\omega t-\frac{\pi}{4})}(2\pi i)e^{i\omega rC_R^{-1}}e^{-\omega(C_R^{-2}-\alpha^{-2})^{1/2}(z+h)}\end{aligned}$$

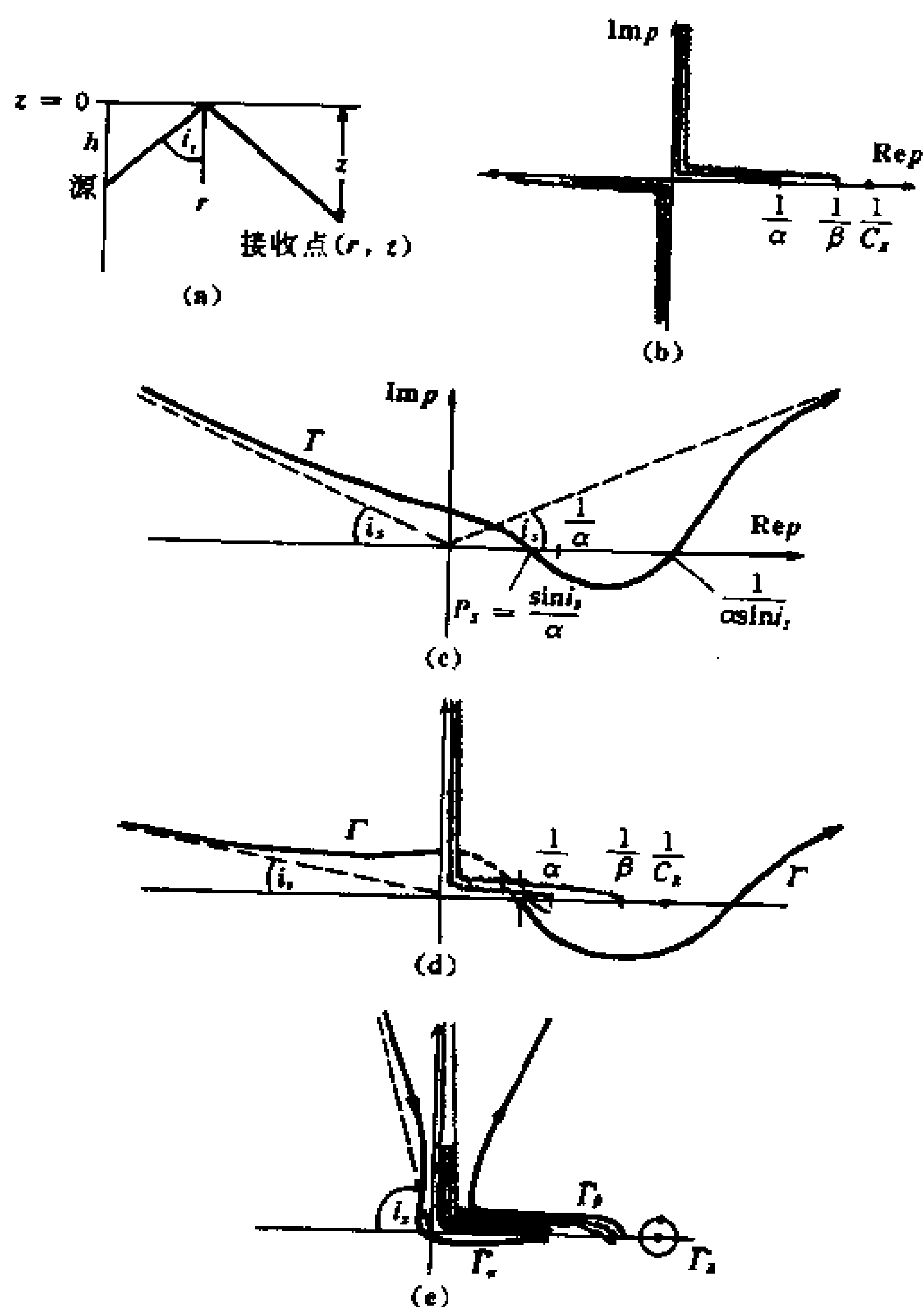


图 5.25 弹性半空间中点源产生的广义反射在复 p 平面上的奇点及积分路径

$$\cdot \frac{8\mathrm{i}(C_R^{-2}-\beta^{-2})^{1/2}}{C_R^{3/2}R'(C_R^{-1})}$$

$$= -8A\left(\frac{2\pi\omega}{rC_R}\right)^{1/2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\frac{(C_R^{-2}-\beta^{-2})^{1/2}}{C_R^2R'C_R^{-1}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(rC_R^{-1}-t)}\mathrm{e}^{-\omega(C_R^{-2}-\alpha^{-2})^{1/2}(z+h)} \tag{5.133}$$

式中 $R'=\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}p}$。

同理，瑞利面波的 S 波分量也可给出

$$\psi_R = 4A\left(\frac{2\pi\omega}{rC_R}\right)^{1/2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\left(\frac{C_R}{\omega}\right)\frac{(\beta^{-2}-2C_R^{-2})}{C_RR'C_R^{-1}} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(rC_R^{-1}-t)}\mathrm{e}^{-\omega(C_R^{-2}-\alpha^{-2})^{1/2}h}\mathrm{e}^{-\omega(C_R^{-2}-\beta^{-2})^{1/2}z} \tag{5.134}$$

相应的瑞利面波位移按下式计算

$$u_r = \frac{\partial\varphi_R}{\partial r} + \frac{\partial^2\psi_R}{\partial r\partial z},\quad u_z = \frac{\partial\varphi_R}{\partial z} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi_R}{\partial r}\right)$$

在地表（自由表面 $z=0$），对远场（$r\gg\lambda$）可得

$$\left.\begin{aligned} u_r &= -2\mathrm{i}Q\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\left[\frac{2}{C_R}(C_R^{-2}-\beta^{-2})^{1/2}\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(rC_R^{-1}-t)}\mathrm{e}^{-\omega(C_R^{-2}-\alpha^{-2})^{1/2}h} \\ u_z &= -2Q\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\left(\frac{2\beta^2}{C_R^2}\right)(2C_R^{-2}-\beta^{-2})\,\mathrm{e}^{-\omega(C_R^{-2}-\alpha^{-2})^{1/2}h} \end{aligned}\right\} \tag{5.135}$$

式中 $Q=A\left(\dfrac{2\pi\omega}{rC_R}\right)^{1/2}\dfrac{\omega}{\beta^2R'C_R^{-1}}$。

球面 P 波入射至平界面，会产生首波及瑞利面波，而当实数平面 P 波入射到平界面则不会出现此现象。瑞利面波的相位谱由 $\omega r/C_R$ 决定，与深度 h 无关，因而其走时关系为直线。其振幅谱由 $\mathrm{e}^{-\omega(C_R^{-2}-\alpha^{-2})^{1/2}h}$ 决定，与水平距离 r 无关。表明波的振幅与相位彼此独立，此称为波的简正模式（normal modes）。这类独立性是违反地震学的因果律的，因而谈论瑞利面波或单个简正模式（振型）的“初动”是无意义的。瑞利面波的几何扩散因子为 $r^{-1/2}$，与球面波（r^{-1}）及首波（r^{-2}）比较，在相当的一段距离内，扩散较为缓慢，因此，成为远震地震记录图上的主要震相。在地表面上瑞利面波质点运动

为逆椭圆轨迹，这与自由瑞利面波相同。

习题与思考题

1. 对于固体半空间 $z>0$，当 $z=0$ 的边界条件由(a) $u_z=0$ 和 $\tau_{zx}=0$；(b) $u_x=0$ 和 $\tau_{zz}=0$ 给定时，求 P-SV 散射矩阵。并证明由边界条件(a)导出的反射与由边界条件(b)导出的反射相加，所有向下的反射都相互抵消。

2. 试证明：若半空间的表面是刚性的，则不产生瑞利面波。

3. 为什么在两个均匀半空间的边界面上，不能产生勒夫面波？

4. 写出不均匀 P 波与 SV 波表示式，并证明它们都有顺进椭圆质点运动。

5. 由式(5.47)和(5.48)证明瑞利面波在自由表面($z=0$)上的质点位移向量比例于向量

$$\left(\frac{2i}{C_R}\sqrt{\frac{1}{C_R^2}-\frac{1}{\beta^2}},0,\frac{2}{C_R^2}-\frac{1}{\beta^2}\right)$$

然后证明：在自由表面其质点运动是逆进椭圆，而随深度的增大，由于其水平位移变化并通过零值，故在充分大的深度上，其质点运动又变成顺进椭圆。

6. 证明上行 P 波(振幅 $\acute{P}$)入射至自由表面时，地表总位移为

$$\frac{\acute{P}\left[\frac{4\alpha p}{\beta^2}\frac{\cos i}{\alpha}\frac{\cos j}{\beta},0,\frac{-2\alpha}{\beta^2}\frac{\cos i}{\alpha}\left(\frac{1}{\beta^2}-2p^2\right)\right]\exp[i\omega(px-t)]}{\left(\frac{1}{\beta^2}-2p^2\right)^2+4p^2\frac{\cos i}{\alpha}\frac{\cos j}{\beta}}$$

上行 SV 波(振幅 $\acute{S}$)入射至自由表面时，地表位移为

$$\frac{\acute{S}\left[\frac{2}{\beta}\frac{\cos j}{\beta}\left(\frac{1}{\beta^2}-2p^2\right),0,\frac{4p}{\beta}\frac{\cos i}{\alpha}\frac{\cos j}{\beta}\right]\exp[i\omega(px-t)]}{\left(\frac{1}{\beta^2}-2p^2\right)^2+4p^2\frac{\cos i}{\alpha}\frac{\cos j}{\beta}}$$

上行 SH 波入射时，自由表面的总位移恒为入射波位移的 2 倍。

7. 证明当介质的 ρ、λ 和 μ 是 z 的函数时，P-SV 波的位移-应力形式仍可写成 $\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial z}=\mathbf{A}\boldsymbol{f}$，如式(5.63)所示。但一般情况下，式(5.66)不给出方程的解。

8. 在图 5.22 中，沿总路径 Γ 与沿路径 $A\rightarrow B\rightarrow C$（绕 $1/\alpha^2$）$\rightarrow F'\rightarrow$ 鞍点 $\rightarrow G\rightarrow H$ 有什么差别吗？（即略去 $F'\rightarrow D\rightarrow E\rightarrow F'$）。并述首波位移特征。

第六章　非均匀介质中的面波振幅理论与简正振型

在第五章§4、§5、§7中已讨论远离震源的状况下，在自由表面及层状介质中的面波的传播。由于面波的激发及其特征与震源的类型及震源深度有密切的关系，因而，本章进一步讨论剪切位错点源在垂直非均匀介质中激发的面波辐射场，及球对称介质中的固有振荡与面波的关系等问题。

§1　面波的变分原理（瑞利原理）

将面波的理论频散曲线与观测值比较，可研究平均地壳构造。而要进一步研究地壳的精细结构，必须要利用面波的相速度与群速度的偏微商值。这些值是由于介质的弹性参数的变化而引起的。利用它们，可计算任意地球模型的较为稳定的面波频散值，因而提高了利用面波资料作反演问题的精度。我们将用变分方法来求得这些偏微商值。

从 Lagrange 密度 L（式 1.103）入手。对于一各向同性的线性弹性体，L 是动能减去弹性应变能（式 1.67），即

$$L = \frac{1}{2}\rho\dot{u}_i\dot{u}_i - \frac{1}{2}\tau_{ij}\varepsilon_{ij} \tag{6.1}$$

或写成

$$L = \frac{1}{2}\rho\dot{u}_i\dot{u}_i - \left(\frac{1}{2}\lambda\varepsilon_{kk}{}^2 + \mu\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}\right) \tag{6.2}$$

实际运算时，用一周期内 Lagrangian 能量密度的平均值$\langle L\rangle$。

对于勒夫面波，位移分量

$$v = l_1(k,z,\omega)e^{i(kx-\omega t)} \tag{6.3}$$

则

$$\langle L\rangle = \frac{1}{4}\rho\omega^2 l_1^2 - \frac{1}{4}\mu\left(k^2 l_1^2 + \left(\frac{dl_1}{dz}\right)^2\right) \tag{6.4}$$

引入能量积分

$$I_1 = \frac{1}{2}\int_0^\infty \rho l_1^2 dz, I_2 = \frac{1}{2}\int_0^\infty \mu l_1^2 dz, I_3 = \frac{1}{2}\int_0^\infty \mu\left(\frac{dl_1}{dz}\right)^2 dz \tag{6.5}$$

按 Hamilton 虚功原理，$\langle L\rangle$的积分取稳定值。那么，对于勒夫面波位移，其运动方程可写为

$$\omega^2\rho(z)l_1 - k^2\mu(z)l_1 + \frac{d}{dz}\left(\mu(z)\frac{dl_1}{dz}\right) = 0 \tag{6.6}$$

且应符合条件：

(1) 在自由表面上的应力为零，即当 $z\to 0$ 时，$\frac{dl_1}{dz}\to 0$。

(2) 在无穷远处函数有限，即当 $z\to\infty$时，$\delta l_1\to 0$。 (6.7)

(3) 要求 l_1 及 $\mu\frac{dl_1}{dz}$连续，并可分部积分。

将运动方程(6.6)乘以 l_1 并从 $0\to\infty$对 z 积分，可得

$$\begin{aligned}
0 &= \int_0^\infty\left\{\omega^2\rho l_1^2 - k^2\mu l_1^2 + l_1\frac{d}{dz}\left(\mu\frac{dl_1}{dz}\right)\right\}dz \\
&= 2\omega^2 I_1 - 2k^2 I_2 + \left(l_1\mu\frac{dl_1}{dz}\right)\Big|_0^\infty - \int_0^\infty\mu\left(\frac{dl_1}{dz}\right)^2 dz \\
&= 2\omega^2 I_1 - 2k^2 I_2 - 2I_3 + \left(l_1\mu\frac{dl_1}{dz}\right)\Big|_0^\infty \\
&= 2\omega^2 I_1 - 2k^2 I_2 - 2I_3
\end{aligned}$$

(因按条件(6.7)有$\left(l_1\frac{dl_1}{dz}\right)\Big|_0^\infty=0$)。因而，上式写成

$$2\int_0^\infty\langle L\rangle dz = \omega^2 I_1 - k^2 I_2 - I_3 = 0$$

或

$$\omega^2 I_1 = k^2 I_2 + I_3 \tag{6.8}$$

这是维里理论(Virial theorem)的应用，表示在保守系统中，波动的全部动能与位能相等。

实际运动中，作为勒夫面波本征函数的位移 l_1 有微小扰动时，$\langle L\rangle$ 的积分仍取稳定值。据此，作

$$\omega^2\delta I_1 - k^2\delta I_2 - \delta I_3 = \omega^2\int_0^\infty \rho l_1\delta l_1 \mathrm{d}z - k^2\int_0^\infty \mu l_1\delta l_1\mathrm{d}z - \int_0^\infty \mu\frac{\mathrm{d}l_1}{\mathrm{d}z}\frac{\mathrm{d}\delta l_1}{\mathrm{d}z}\mathrm{d}z$$

将等式右边的最后一项分部积分，上式变成

$$\int_0^\infty\left\{\omega^2\rho l_1 - k^2\mu l_1 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\mu\frac{\mathrm{d}l_1}{\mathrm{d}z}\right)\right\}\delta l_1\mathrm{d}z - \left(\mu\frac{\mathrm{d}l_1}{\mathrm{d}z}\delta l_1\right)\Big|_0^\infty$$

按运动方程(6.6)及条件(6.7)，可得

$$\omega^2\delta I_1 - k^2\delta I_2 - \delta I_3 = 2\int_0^\infty \delta\langle L\rangle\mathrm{d}z = 0$$

或者写成 $\omega^2\delta I_1 - k^2\delta I_2 - \delta I_3 = 0$ (6.9)

这种微扰理论，在地震学中概述为瑞利原理(The Rayleigh Principle)，含义是，在振动系统中，当本征值 k 作微小扰动时，可导出本征函数 l_1 的相应扰动，但此相应扰动 δl_1 与本征值 k 的微扰 δk 相比为二级小量。具体的运算过程，是按变分原理的规则进行的。

将瑞利原理运用到式(6.8)，即将 k 扰动换为 $k+\delta k$，相关的频率 ω 扰动换为 $\omega+\delta\omega$。因 $l_1(z,k+\delta k)-l_1(z,k)$ 为 δk 的二级小量，对式(6.8)作小扰动，只保留一级小量，则有

$$\omega(\delta\omega)I_1 = k(\delta k)I_2 + O(\delta k)^2$$

当 $\delta k\to 0$ 时，有 $\frac{\partial\omega}{\partial k}=\frac{k}{\omega}\frac{I_2}{I_1}$，即

$$U = \frac{I_2}{cI_1} \tag{6.10}$$

式中 $U=\frac{\partial\omega}{\partial k}$ 为群速度，$c=\frac{\omega}{k}$ 为相速度。

式(6.10)表明，可用比数值方法更为稳定的能量积分的代数运算来求得群速度值，群速度是波的能量传输的速度。

对于本征值为 k_i 的本征函数 l_{1i} 和 l_{2i}，它们符合的一阶方程组为

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}l_{11}}{\mathrm{d}z} &= \frac{1}{\mu}l_{21} \\ \frac{\mathrm{d}l_{21}}{\mathrm{d}z} &= (\mu k_1^2 - \rho\omega^2)y_{11}\end{aligned}\right\} \tag{6.11}$$

同时也可有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(l_{12}l_{21}) = (\mu k_1^2 - \rho\omega_1^2)l_{11}l_{12} + \mu\frac{\mathrm{d}l_{11}}{\mathrm{d}z}\frac{\mathrm{d}l_{12}}{\mathrm{d}z} \tag{6.12}$$

用 l_{11} 代替 l_{12}，并对式(6.12)作关于 z 的积分，得

$$l_{11}l_{21}\Big|_0^{\infty} = k_1^2\int_0^{\infty}\mu l_{11}^2\mathrm{d}z - \omega_1^2\int_0^{\infty}\rho l_{11}^2\mathrm{d}z + \int_0^{\infty}\mu\left(\frac{\mathrm{d}l_{11}}{\mathrm{d}z}\right)^2\mathrm{d}z$$

因 $l_{21}(0)=0$，$l_{21}(\infty)=0$，此式即为式(6.8)。同理有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(l_{11}l_{22}) = (\mu k_2^2 - \rho\omega_2^2)l_{12}l_{11} + \mu\frac{\mathrm{d}l_{12}}{\mathrm{d}z}\frac{\mathrm{d}l_{11}}{\mathrm{d}z} \tag{6.13}$$

那么可得

$$(l_{12}l_{21} - l_{11}l_{22})\Big|_0^{\infty} = (k_1^2 - k_2^2)\int_0^{\infty}\mu l_{11}l_{12}\mathrm{d}z - (\omega_1^2 - \omega_2^2)\int_0^{\infty}\rho l_{11}l_{12}\mathrm{d}z$$

因为 $l_{21}(0)=l_{21}(\infty)=l_{22}(0)=l_{22}(\infty)=0$，最后得

$$(k_1^2 - k_2^2)\int_0^{\infty}\mu l_{11}l_{12}\mathrm{d}z = (\omega_1^2 - \omega_2^2)\int_0^{\infty}\rho l_{11}l_{12}\mathrm{d}z \tag{6.14}$$

式(6.14)表示，对于相同的频率 ω 而有不同的本征值 k_1、k_2 时，若有本征函数为 l_{11} 及 l_{12}，则它们的正交性用权重函数 $\mu(z)$ 表示。而对于 $k_1=k_2$ 但 $\omega_1\neq\omega_2$ 的本征函数，它们的正交性用权重函数 $\rho(z)$ 来体现。

利用位移 l_1 的扰动 $l_1+\delta l_1$，在数值上得到的是 $I_1+\delta I_1$，$I_2+\delta I_2$ 及 $I_3+\delta I_3$。按式(6.8)与(6.9)，可得

$$k^2 = \frac{\omega^2(I_1+\delta I_1) - (I_3+\delta I_3)}{I_2+\delta I_2} \tag{6.15}$$

表示本征值 k(或 ω)与本征函数 l_1 有相对独立性。

我们更感兴趣的是当波数 k(或频率 ω)固定时,介质的弹性参数的扰动引起的相速度的变化。将瑞利原理运用于式(6.8),有

$$2\omega(\delta\omega)I_1 + \omega^2(\delta I_1) = \delta I_3 + k^2\delta I_2 \tag{6.16}$$

同理,当频率 ω 固定时,则有

$$\omega^2\delta I_1 = 2k(\delta k)I_2 + k^2\delta I_2 + \delta I_3 \tag{6.17}$$

因为

$$\delta I_1 = \frac{1}{2}\int_0^\infty \delta\rho l_1^2 \mathrm{d}z + \int_0^\infty \rho l_1 \delta l_1 \mathrm{d}z$$

$$\delta I_2 = \frac{1}{2}\int_0^\infty \delta\mu l_1^2 \mathrm{d}z + \int_0^\infty \mu l_1 \delta l_1 \mathrm{d}z$$

$$\delta I_3 = \frac{1}{2}\int_0^\infty \delta\mu\left(\frac{\mathrm{d}l_1}{\mathrm{d}z}\right)^2 \mathrm{d}z - \int_0^\infty \mu\left(\frac{\mathrm{d}l_1}{\mathrm{d}z}\right)\frac{\mathrm{d}\delta l_1}{\mathrm{d}z}\mathrm{d}z$$

且对于本征函数 l_1 的扰动有式(6.9),将它们都代入式(6.17),可得

$$\int_0^\infty \omega^2 l_1^2 \delta\rho \mathrm{d}z = \int_0^\infty \left[k^2 l_1^2 + \left(\frac{\mathrm{d}l_1}{\mathrm{d}z}\right)^2\right]\delta\mu \mathrm{d}\mu + 2k(\delta k)\int_0^\infty \mu l_1^2 \mathrm{d}z$$

或写作

$$-\frac{\delta k}{k} = \left\{\int_0^\infty \left[k^2 l_1^2 + \left(\frac{\mathrm{d}l_1}{\mathrm{d}z}\right)^2\right]\delta\mu \mathrm{d}z - \int_0^\infty \omega^2 l_1^2 \delta\rho \mathrm{d}z\right\}\Big/ 2k^2\int_0^\infty \mu l_1^2 \mathrm{d}z \tag{6.18}$$

由于 $kc=\omega$,那么 $c\delta k+k\delta c=0$,即 $-\frac{\delta k}{k}=\left(\frac{\delta c}{c}\right)_\omega$,这样,可写出对于给定频率 ω 的相速度的相对变化 $\frac{\delta c}{c}$ 与介质参量的变化 $\delta\mu$、$\delta\rho$ 之间的线性关系,为

$$\left(\frac{\delta c}{c}\right)_\omega = \frac{\int_0^\infty \left[k^2 l_1^2 + \left(\frac{\mathrm{d}l_1}{\mathrm{d}z}\right)^2\right]\delta\mu \mathrm{d}z - \int_0^\infty \omega^2 l_1^2 \delta\rho \mathrm{d}z}{2k^2\int_0^\infty \mu l_1^2 \mathrm{d}z} \tag{6.19}$$

至于相速度相对于介质参数(ρ,μ)的偏微商值,可以这样来计算

$$\delta c = \left(\frac{\delta c}{\delta\rho}\right)_{\omega,\mu}\delta\rho + \left(\frac{\partial c}{\partial\mu}\right)_{\omega,\rho}\delta\mu$$

即

$$\left(\frac{\delta c}{c}\right)_{\omega}=\int_0^{\infty}\frac{\rho}{c}\left(\frac{\partial c}{\partial\rho}\right)_{\omega,\mu}\frac{\partial\rho}{\rho}\mathrm{d}z-\int_0^{\infty}\frac{\mu}{c}\left(\frac{\partial c}{\partial\mu}\right)_{\omega,\rho}\frac{\delta\mu}{\mu}\mathrm{d}z \quad (6.20)$$

与式(6.19)比较，可得一定深度 z 上的偏微商值

$$\left.\begin{aligned}\frac{\rho}{c}\left(\frac{\partial c}{\partial\rho}\right)_{\omega,\mu}&=-\frac{\rho\omega^2 l_1^2}{2k^2\int_0^{\infty}\mu l_1^2\mathrm{d}z}\\ \frac{\mu}{c}\left(\frac{\partial c}{\partial\mu}\right)_{\omega,\rho}&=\frac{\beta}{2c}\left(\frac{\partial c}{\partial\beta}\right)_{\omega,\rho}=\frac{\mu\left[k^2 l_1^2+\left(\frac{\mathrm{d}l_1}{\mathrm{d}z}\right)^2\right]}{2k^2\int_0^{\infty}\mu l_1^2\mathrm{d}z}\end{aligned}\right\} \quad (6.21)$$

对于瑞利面波，位移分量

$$\left.\begin{aligned}u&=r_1(k,z,\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)}\\ w&=\mathrm{i}r_2(k,z,w)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-wt)}\end{aligned}\right\} \quad (6.22)$$

引入能量积分

$$\left.\begin{aligned}I_1&=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\rho(r_1^2+r_2^2)\mathrm{d}z\\ I_2&=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}[(\lambda+2\mu)r_1^2+\mu r_2^2]\mathrm{d}z\\ I_3&=\int_0^{\infty}\left(\lambda r_1\frac{\mathrm{d}r_2}{\mathrm{d}z}-\mu r_2\frac{\mathrm{d}r_1}{\mathrm{d}z}\right)\mathrm{d}z\\ I_4&=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\left[(\lambda+2\mu)\left(\frac{\mathrm{d}r_2}{\mathrm{d}z}\right)^2+\mu\left(\frac{\mathrm{d}r_1}{\mathrm{d}z}\right)^2\right]\mathrm{d}z\end{aligned}\right\} \quad (6.23)$$

对于本征函数的扰动，可得到类似于式(6.8)和式(6.9)的表征 Hamilton 原理的公式

$$\omega^2 I_1=k^2 I_2+kI_3+I_4 \quad (6.24)$$

$$\omega^2\delta I_1=k^2\delta I_2+k\delta I_3+\delta I_4 \quad (6.25)$$

那么，瑞利原理给出的群速度 U 的积分表示为

$$U=\frac{I_2+\frac{I_3}{2k}}{cI_1} \quad (6.26)$$

对于 λ、μ 和 ρ 的微小扰动，相速度的相对变化值也可从式(6.24)及式(6.25)中得到，对于给定的频率 ω，有

$$\delta k(2kI_2 + I_3) = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \omega^2(r_1^2 + r_2^2)\delta\rho \mathrm{d}z - \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \left(kr_1 - \frac{\mathrm{d}r_2}{\mathrm{d}z}\right)^2 \delta\lambda \mathrm{d}z -$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{\infty} \left[2k^2 r_1^2 + 2\left(\frac{\mathrm{d}r_2}{\mathrm{d}z}\right)^2 + \left(kr_2 - \frac{\mathrm{d}r_1}{\mathrm{d}z}\right)^2\right]\delta\mu \mathrm{d}z \tag{6.27}$$

由式(6.27)可得

$$\left(\frac{\delta c}{c}\right)_{\omega} = -\frac{\delta k}{k} = \frac{1}{4k^2 UcI_1}\left\{\int_0^{\infty}\left(kr_1 + \frac{\mathrm{d}r^2}{\mathrm{d}z}\right)^2 \delta\lambda \mathrm{d}z + \right.$$

$$\int_0^{\infty}\left[2k^2 r_1^2 + 2\left(\frac{\mathrm{d}r_2}{\mathrm{d}z}\right)^2 + \left(kr_2 - \frac{\mathrm{d}r_1}{\mathrm{d}z}\right)^2\right]\delta\mu \mathrm{d}z -$$

$$\left.\int_0^{\infty}\omega^2(r_1^2 + r_2^2)\delta\rho \mathrm{d}z\right\} \tag{6.28}$$

相速度随介质参数变化的偏微商值也可随之得出。由于 $\lambda=\rho(\alpha^2-2\beta^2)$，$\mu=\rho\beta^2$，那么，也可用下述关系式

$$\left.\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial c}{\partial \alpha}\right)_{\beta,\rho} = 2\rho\alpha\left(\frac{\partial c}{\partial \lambda}\right)_{\mu,\rho} \\
&\left(\frac{\partial c}{\partial \beta}\right)_{\alpha,\rho} = 2\rho\beta\left\{-2\left(\frac{\partial c}{\partial \lambda}\right)_{\mu,\rho} + \left(\frac{\partial c}{\partial \mu}\right)_{\lambda,\rho}\right\} \\
&\left(\frac{\partial c}{\partial \rho}\right)_{\alpha,\beta} = \left(\frac{\partial c}{\partial \rho}\right)_{\lambda,\mu} + (\alpha^2 - 2\beta^2)\left(\frac{\partial c}{\partial \lambda}\right)_{\mu,\rho} + \beta^2\left(\frac{\partial c}{\partial \mu}\right)_{\rho,\lambda}
\end{aligned}\right\} \tag{6.29}$$

用$\frac{\partial c}{\partial \alpha}$、$\frac{\partial c}{\partial \beta}$及$\left(\frac{\partial c}{\partial \rho}\right)_{\alpha,\beta}$替代$\frac{\partial c}{\partial \lambda}$，$\frac{\partial c}{\partial \mu}$及$\left(\frac{\partial c}{\partial \rho}\right)_{\lambda,\mu}$的值。

勒夫面波与瑞利面波的偏微商值随周期而变化，这是频散面波的固有特征，对这一特征的讨论，可使我们在作反演问题时，对不同深度的各类参数变化的重要性有更深入的了解。图 6.1a 表示勒夫面波相速度偏微商值随周期的变化曲线（对于给定的地球模型），从图中可看出，相速度对密度的偏微商值$\frac{\partial c}{\partial \rho}$随周期的变化远小于相速度对横波速度的偏微商值 $\frac{\partial c}{\partial \beta}$ 随周期的变化。图 6.1b 表示的是瑞利面波的情形，它也有类似的结果。这些表示了面波相速度对介质的横波速度 β 的敏感性及依赖性。

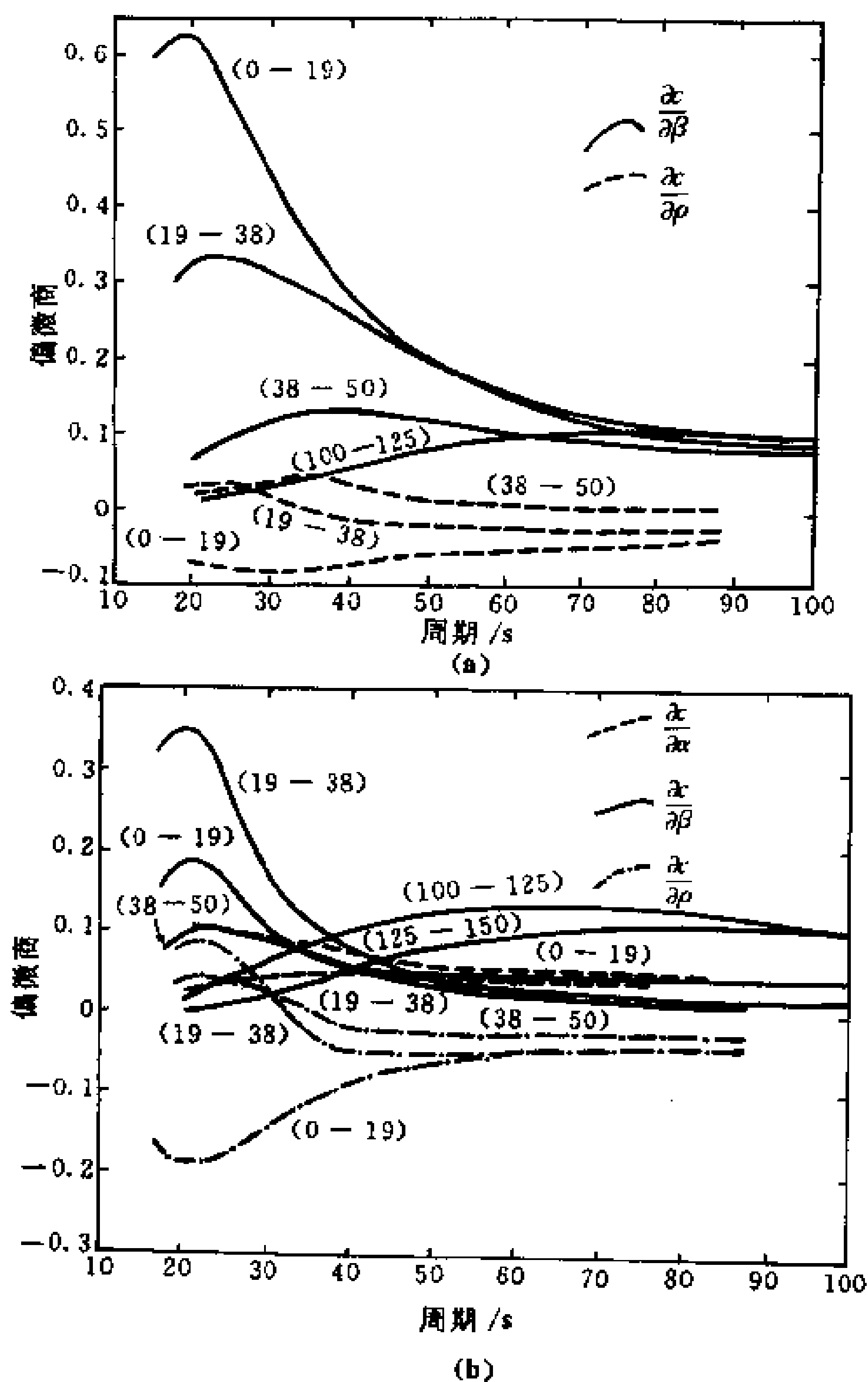


图 6.1　给定 k 时相速度的偏微商值

(a)勒夫面波；(b)瑞利面波

§2 瑞利面波的垂直位移分量与勒夫面波的方位位移分量

讨论剪切位错源在半空间中产生的瑞利面波与在二层半空间介质中产生的勒夫面波的位移特征。

取柱坐标(Δ,φ,z)，z 轴指向非均匀介质(图 6.2)。

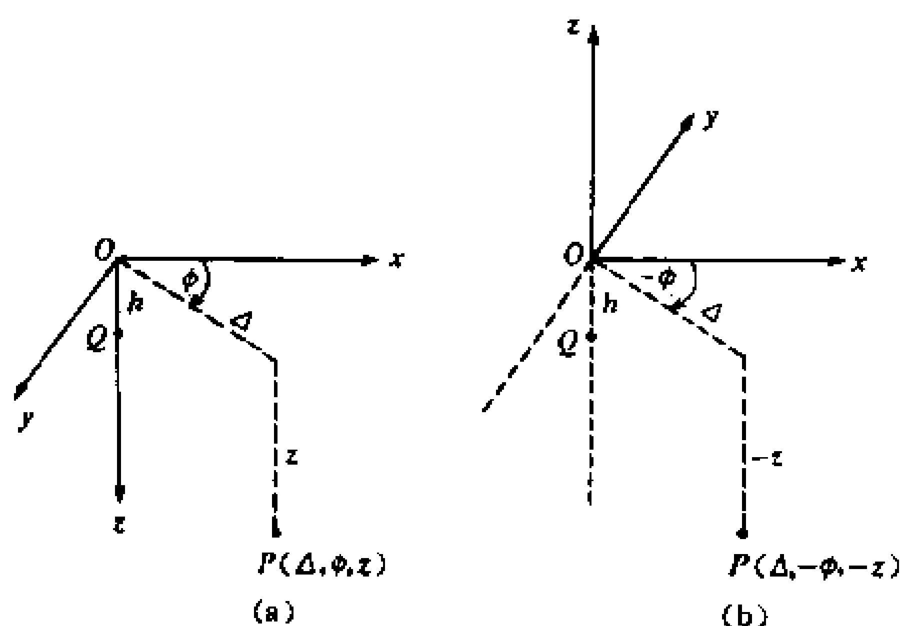


图 6.2 柱坐标系统

(a)z 轴向下；(b)z 轴向上

设位移谱和应力谱分别为

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{u} &= \int_0^\infty \sum_m \boldsymbol{u}_m(k) k\mathrm{d}k \\ \boldsymbol{T} &= \int_0^\infty \sum_m \boldsymbol{\sigma}_m(k) k\mathrm{d}k \end{aligned}\right\} \tag{6.30}$$

式中 $\boldsymbol{u}_m = U_P\boldsymbol{P}_m + U_B\boldsymbol{B}_m + U_C\boldsymbol{C}_m$，其中波函数 $\boldsymbol{P}_m$、$\boldsymbol{B}_m$、$\boldsymbol{C}_m$，已由式(2.68)给出，U_P、U_B、U_C 为与反射系数及路径有关的系数。

在 $z=0$ 的自由表面上，三个基本的剪切位错源产生的位移的积分表达式分别为：

情况 Ⅰ（$\lambda=0°, \delta=90°$）：

$$
\left.
\begin{aligned}
u_z &= \frac{U_0\mathrm{d}S}{2\pi}\sin 2\varphi\int_0^\infty \frac{k}{R(k)} J_2(k\Delta) f_2(k)\mathrm{d}k \\
u_\Delta &= -\frac{U_0\mathrm{d}S}{2\pi}\sin 2\varphi\int_0^\infty \frac{k^2}{R(k)}\left[f_1(k)\frac{\partial J_2(k\Delta)}{\partial(k\Delta)}+\right. \\
&\quad \left.\left(\frac{2R(k)}{\nu_\beta}\frac{J_2(k\Delta)}{k\Delta}\right)\mathrm{e}^{h\nu_\beta}\right]\mathrm{d}k \\
u_\varphi &= -\frac{U_0\mathrm{d}S}{2\pi}\cos 2\varphi\int_0^\infty \frac{k^2}{R(k)}\left[2f_4(k)\frac{J_2(k\Delta)}{k\Delta}+\right. \\
&\quad \left.\left(\frac{R(k)}{\nu_\beta}\frac{\partial J_2(k\Delta)}{\partial(k\Delta)}\right)\mathrm{e}^{-h\nu_\beta}\right]\mathrm{d}k
\end{aligned}
\right\} \tag{6.31}
$$

情况 Ⅱ（$\lambda=90°, \delta=90°$）：

$$
\left.
\begin{aligned}
u_z &= \frac{-U_0\mathrm{d}S}{\pi}\sin\varphi\int_0^\infty \frac{k^2}{R(k)}\nu_\alpha(2k^2-k_\beta^2)\times \\
&\quad J_1(k\Delta)(\mathrm{e}^{-h\nu_\alpha}-\mathrm{e}^{-h\nu_\beta})\mathrm{d}k \\
u_\Delta &= \frac{U_0\mathrm{d}S}{2\pi}\sin\varphi\int_0^\infty \frac{k^2}{R(k)}\left\{4\nu_\alpha\nu_\beta k\frac{\partial J_1(k\Delta)}{\partial(k\Delta)}\mathrm{e}^{-h\nu_\alpha}-\right. \\
&\quad \left.\left[\frac{(2k^2-k_\beta^2)^2}{k}\frac{\partial J_1(k\Delta)}{\partial(k\Delta)}+\frac{J_1(k\Delta)}{k\Delta}\frac{R(k)}{k}\right]\mathrm{e}^{-h\nu_\beta}\right\}\mathrm{d}k \\
u_\varphi &= \frac{U_0\mathrm{d}S}{2\pi}\cos\varphi\int_0^\infty \frac{k^2}{R(k)}\left\{4\nu_\alpha\nu_\beta k\frac{J_1(k\Delta)}{k\Delta}\mathrm{e}^{-h\nu_\alpha}-\right. \\
&\quad \left.\left[\frac{(2k^2-k_\beta^2)^2}{k}\frac{J_1(k\Delta)}{k\Delta}+\frac{\partial J_1(k\Delta)}{\partial(k\Delta)}\frac{R(k)}{k}\right]\mathrm{e}^{-h\nu_\beta}\right\}\mathrm{d}k
\end{aligned}
\right\} \tag{6.32}
$$

情况 Ⅲ（$\lambda=90°, \delta=45°$）

$$
\left.\begin{aligned}
u_z &= \frac{-U_0 \mathrm{d}S}{2\pi}\int_0^{\infty}[f_1(k)J_0(k\Delta)+\cos 2\varphi f_2(k)J_2(k\Delta)]\frac{k\mathrm{d}k}{R(k)} \\
u_\Delta &= \frac{U_0 \mathrm{d}S}{4\pi}\int_0^{\infty}\frac{k^2}{R(k)}\Big[f_3(k)J_1(k\Delta)-\cos 2\varphi\times \\
&\quad \Big(f_4(k)\frac{\partial J_2(k\Delta)}{\partial(k\Delta)}+\frac{2R(k)}{\nu_\beta}\mathrm{e}^{-h\nu_\beta}\frac{J_2(k\Delta)}{k\Delta}\Big)\Big]\mathrm{d}k \\
u_\varphi &= \frac{-U_0 \mathrm{d}S}{4\pi}\sin 2\varphi\int_0^{\infty}\frac{k^2}{R(k)}\Big[2f_4(k)\frac{J_2(k\Delta)}{k\Delta}+ \\
&\quad \Big(\frac{R(k)}{\nu_\beta}\frac{\partial J_2(k\Delta)}{\partial(k\Delta)}\Big)\mathrm{e}^{-h\nu_\beta}\Big]\mathrm{d}k
\end{aligned}\right\}
\tag{6.33}
$$

且有

$$
\left.\begin{aligned}
f_1(k) &= -(2k^2-k_\beta^2)(3k^2-2k_\alpha^2)\mathrm{e}^{-h\nu_\alpha}+6k^2\nu_\alpha\nu_\beta\mathrm{e}^{-h\nu_\beta} \\
f_2(k) &= 2k^2\nu_\alpha\nu_\beta\mathrm{e}^{-h\nu_\beta}-k^2(2k^2-k_\beta^2)\mathrm{e}^{-h\nu_\alpha} \\
f_3(k) &= 2\nu_\beta(3k^2-2k_\alpha^2)\mathrm{e}^{-h\nu_\alpha}-3\nu_\beta(2k^2-k_\beta^2)\mathrm{e}^{-h\nu_\beta} \\
f_4(k) &= -2k^2\nu_\beta\mathrm{e}^{-h\nu_\alpha}+\nu_\beta(2k^2-k_\beta^2)\mathrm{e}^{-h\nu_\beta} \\
\nu_\alpha &= (k^2-k_\alpha^2)^{1/2},\nu_\beta=(k^2-k_\beta^2)^{1/2},k_\alpha=\frac{\omega}{\alpha},k_\beta=\frac{\omega}{\beta}
\end{aligned}\right\}
\tag{6.34}
$$

上述公式的推导过程类似于第五章 § 6 中关于球面波的叙述。它们表示的是总位移场，包括 P 波、S 波、面波等。从第五章 § 7 的阐述已知，每个位移积分表达式中的极点贡献为瑞利面波。例如，用最速下降法，可求出在情况 I 中，震源深度为 h 时，在 $z=0$ 的表面上的瑞利面波的垂直位移为

$$
\begin{aligned}
u_z^R &= \frac{U_0\mathrm{d}S}{\sqrt{2\pi\Delta}}(\sin 2\varphi)k_R^{3/2}\frac{\hat{\gamma}(2\hat{\gamma}^2-1)}{G(\hat{\gamma})}\times \\
&\quad\Big[\mathrm{e}^{-\gamma_\alpha k_R h}-\Big(1-\frac{c_R^2}{2\beta^2}\Big)\mathrm{e}^{-\gamma_\beta k_R h}\Big]\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-k_\beta\Delta-\frac{\pi}{4})}
\end{aligned}
\tag{6.35}
$$

式中 $c_R=\dfrac{\omega}{k_R},\gamma_\alpha=\Big(1-\dfrac{c_R^2}{\alpha^2}\Big)^{1/2},\gamma_\beta=\Big(1-\dfrac{c_R^2}{\beta^2}\Big)^{1/2},$

$$k_{\alpha}/k_{\beta} = \hat{\gamma}, G(\hat{\gamma}) = 2\,\frac{4\hat{\gamma}^2 - 1 - 8\hat{\gamma}^6(1 - \beta^2/\alpha^2)}{\hat{\gamma}(2\hat{\gamma}^2 - 1)^2} \quad (6.36)$$

从式(6.35)可看出，位移谱振幅反比于 $\sqrt{\Delta}$，且随震源深度 h 的增加按指数减小。在随方位角 φ(相对于断层面走向)变化的辐射图案中，当 $\varphi=0,\frac{\pi}{2}$、π 及 $\frac{3}{2}\pi$ 时为位移节线。

当 $h=0$ 时，任意深度 z 的垂直位移为

$$u_z^{R} = \frac{U_0 dS}{\sqrt{2\pi\Delta}}(\sin 2\varphi)k_R^{3/2}\,\frac{\hat{\gamma}(2\hat{\gamma}^2 - 1)}{G(\hat{\gamma})} \times$$

$$\left[e^{\gamma_{\beta}k_R z} - \left(1 - \frac{C_R^2}{2\beta^2}\right)e^{\gamma_{\alpha}k_R z}\right]e^{i(\omega t - k\Delta - \frac{\pi}{4})} \quad (6.37)$$

位移的几何扩散因子仍为 $\sqrt{\Delta}$，但这种情况下是随深度 z 作指数减小。

应该指出的是，对于球形地球模型，其几何扩散系数为 $(a\sin\frac{\Delta}{a})^{\frac{1}{2}}$，它是圆球率(sphericity)所致，这里 a 为地球平均半径。此时，远场瑞利面波的垂直位移分量为

$$u_z^{R} = U_0 dS\,\frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\sin\frac{\Delta}{a}}}P_R\sin 2\varphi\, e^{i(\omega t - k_R\Delta)} \quad (6.38)$$

式中 P_R 称为振幅传输系数。

且其径向分量为

$$u_{\Delta}^{R} = \left(\epsilon(0)e^{i\frac{\pi}{2}}\right)u_z^{R} \quad (6.39)$$

式中 $\varepsilon(0)=\frac{u(0)}{w(0)}$ 是表面椭球率。u_{Δ}^{R} 与震源类型及震源深度无关。远场瑞利面波的方位分量 u_{φ}^{R} 很小(与 u_z^{R} 相比)，可以忽略不计。

类似地，对于半空间上覆盖一层厚度为 H 的介质(称为二层半空间)，在 $z=0$ 的自由表面上，SH 波位移的方位分量的积分表示式为：

情况 I ($\lambda=0°,\delta=90°$)：

$$
\left.\begin{aligned}
u_\varphi(h<H) &= \frac{-U_0\mathrm{d}S}{2\pi}\cos 2\varphi\frac{\partial}{\partial\Delta}\int_0^\infty J_2(k\Delta)\frac{A^+(k,h,H)}{L(k,H)}\frac{k\mathrm{d}k}{\nu_{1\beta}} \\
u_\varphi(h>H) &= \frac{-U_0\mathrm{d}S}{\pi}\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)\cos 2\varphi\frac{\partial}{\partial\Delta}\int_0^\infty J_2(k\Delta)\mathrm{e}^{-\nu_{2\beta}(h-H)}\frac{k\mathrm{d}k}{L(k,H)}
\end{aligned}\right\} \tag{6.40}
$$

情况 Ⅱ（$\lambda=90°,\delta=90°$）：

$$
\left.\begin{aligned}
u_\varphi(h<H) &= \frac{U_0\mathrm{d}S}{2\pi}\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\Delta}\int_0^\infty J_1(k\Delta)\frac{A^-(k,h,H)}{L(k,H)}\mathrm{d}k \\
u_\varphi(h>H) &= \frac{-U_0\mathrm{d}S}{\pi}\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\Delta}\int_0^\infty J_1(k\Delta)\mathrm{e}^{-\nu_{2\beta}(h-H)}\frac{\nu_{2\beta}\mathrm{d}k}{L(k,H)}
\end{aligned}\right\} \tag{6.41}
$$

情况 Ⅲ（$\lambda=90°,\delta=45°$）：

$$
\left.\begin{aligned}
u_\varphi(h<H) &= \frac{-U_0\mathrm{d}S}{4\pi}\sin 2\varphi\frac{\partial}{\partial\Delta}\int_0^\infty J_2(k\Delta)\frac{A^+(k,h,H)}{L(k,H)}\frac{k\mathrm{d}k}{\nu_{1\beta}} \\
u_\varphi(h>H) &= \frac{-U_0\mathrm{d}S}{2\pi}\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)\sin 2\varphi\frac{\partial}{\partial\Delta}\int_0^\infty J_2(k\Delta)\mathrm{e}^{-\nu_{2\beta}(h-H)}\frac{k\mathrm{d}k}{L(k,H)}
\end{aligned}\right\} \tag{6.42}
$$

这里，μ_1,β_1 及 μ_2,β_2 分别表示层与半空间的参数，且

$$
\left.\begin{aligned}
&\nu_{1\beta}=\left(k^2-\frac{\omega^2}{\beta_1^2}\right)^{1/2},\ \nu_{2\beta}=\left(k^2-\frac{\omega^2}{\beta_2^2}\right)^{1/2} \\
&L(k,H)=\left(\nu_{1\beta}+\frac{\mu_2}{\mu_1}\nu_{2\beta}\right)\mathrm{e}^{H\nu_{1\beta}}-\left(\nu_{1\beta}-\frac{\mu_2}{\mu_1}\nu_{2\beta}\right)\mathrm{e}^{-H\nu_{1\beta}} \\
&A^+(k,h,H)=\left(\nu_{1\beta}+\frac{\mu_2}{\mu_1}\nu_{2\beta}\right)\mathrm{e}^{(H-h)\nu_{1\beta}}+\left(\nu_{1\beta}-\frac{\mu_2}{\mu_1}\nu_{2\beta}\right)\mathrm{e}^{-(H-h)\nu_{1\beta}} \\
&A^-(k,h,H)=-\left(\nu_{1\beta}+\frac{\mu_2}{\mu_1}\nu_{2\beta}\right)\mathrm{e}^{(H-h)\nu_{1\beta}}+\left(\nu_{1\beta}-\frac{\mu_2}{\mu_1}\nu_{2\beta}\right)\mathrm{e}^{-(H-h)\nu_{1\beta}}
\end{aligned}\right\} \tag{6.43}
$$

可看出，在三种源的情况下，SH 波的垂直位移 $u_z=0$，且对于远场，位移分量 u_Δ（与 u_φ 相比）可忽略不计。SH 波位移的积分表示中的极点留数值，即为勒夫面波。远场勒夫面波较为简单，主要成分是位移的方位分量 u_φ^L，径向分量可忽略不计，垂直分量为零。这样，下面我

们只分别给出瑞利面波位移的垂直分量 u_z^R(半空间介质)与勒夫面波的方位分量 u_φ^L(二层半空间介质)。按三个基本剪切位错点源位移的组合(式(3.64)),得到任意剪切位错点源产生的面波位移:

$$\left.\begin{aligned} u_z^R &= (U_0 \mathrm{d}S) g(\omega) \frac{\mathrm{e}^{-\gamma_R \Delta} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\sin(\Delta/a)}} (s_R S_R + p_R P_R + \mathrm{i} q_R Q_R) \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - k_R \Delta)} \\ u_\varphi^L &= (U_0 \mathrm{d}S) g(\omega) \frac{\mathrm{e}^{-\gamma_L \Delta} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\sin(\Delta/a)}} (p_L P_L + \mathrm{i} q_L Q_L) \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - k_L \Delta)} \end{aligned}\right\} \tag{6.44}$$

式中

$$\left.\begin{aligned} P_R &= \frac{1}{4\pi a^2}(k_R a)^{3/2} \sqrt{8\pi}\left[\mathrm{e}^{-\gamma_a k_R h} - \left(1 - \frac{1}{2\hat{\gamma}^2}\right)\mathrm{e}^{-\gamma_\beta k_R h}\right]\frac{\hat{\gamma}(2\hat{\gamma}^2 - 1)}{G(\hat{\gamma})} \\ Q_R &= \frac{1}{4\pi a^2}(k_R a)^{3/2} \sqrt{8\pi}\left[\mathrm{e}^{-\gamma_a k_R h} - \mathrm{e}^{-\gamma_\beta k_R h}\right]\frac{(2\hat{\gamma}^2 - 1)^3}{2G\hat{\gamma}^2 \sqrt{\hat{\gamma}^2 - 1}} \\ S_R &= \frac{1}{4\pi a^2}(k_R a)^{3/2} \sqrt{8\pi}\left[\mathrm{e}^{-\gamma_a k_R h} - \left(\frac{\hat{\gamma}^2 - (1/2)}{\hat{\gamma}^2 - (2\beta^2/3\alpha^2)}\right)\mathrm{e}^{-\gamma_\beta k_R h}\right] \times \\ &\quad \frac{(2\hat{\gamma}^2 - 1)(3\hat{\gamma} - 2\beta^2/\alpha^2)}{\hat{\gamma}G(\hat{\gamma})} \\ P_L(h < H) &= \frac{1}{4\pi a^2}(k_L a)^{3/2} \sqrt{8\pi}\left[\frac{\sqrt{k_L^2 - k_{\beta_2}^2}\cos(h\sqrt{k_{\beta_1}^2 - k_L^2})}{k_L \Phi}\right] \\ P_L(h > H) &= \frac{1}{4\pi a^2}(k_L a)^{3/2} \sqrt{8\pi} \times \\ &\quad \left[\frac{(\mu_2/\mu_1)\sqrt{k_L^2 - k_{\beta_2}^2}\cos(H\sqrt{k_{\beta_1}^2 - k_L^2})}{k_L \Phi}\right]\mathrm{e}^{-(h-H)\sqrt{k_L^2 - k_{\beta_2}^2}} \\ Q_L(h \gtrless H) &= \frac{1}{4\pi a^2}(k_L a)^{3/2} \sqrt{8\pi} \times \\ &\quad \left[\frac{\sqrt{k_{\beta_1}^2 - k_L^2}\sqrt{k_L^2 - k_{\beta_2}^2}\sin(H\sqrt{k_{\beta_1}^2 - k_L^2})}{k_L^2 \Phi}\right] \end{aligned}\right\} \tag{6.45}$$

$$
\left.\begin{aligned}
&Q_L(h > H) = \frac{1}{4\pi a^2}(k_L a)^{3/2}\sqrt{8\pi}\times \\
&\left[\frac{\sqrt{k_{\beta_1}^2 - k_L^2}\sqrt{k_L^2 - k_{\beta_2}^2}\sin(H\sqrt{k_{\beta_1}^2 - k_L^2})}{k_L^2\Phi}\right]e^{-(h-H)\sqrt{k_L^2 - k_{\beta_2}^2}} \\
&\Phi = H\sqrt{k_L^2 - k_{\beta_2}^2} + \frac{(\mu_2/\mu_1)(k_{\beta_1}^2 - k_{\beta_2}^2)}{(k_{\beta_1}^2 - k_L^2) + (\mu_2/\mu_1)^2(k_L^2 - k_{\beta_2}^2)}
\end{aligned}\right\}\quad(6.45)
$$

及

$$
\left.\begin{aligned}
s_R &= \sin\lambda\sin\delta\cos\delta \\
q_R &= (\sin\lambda\cos 2\delta)\sin\varphi + (\cos\lambda\cos\delta)\cos\varphi \\
p_R &= (\cos\lambda\sin\delta)\sin 2\varphi - (\sin\lambda\sin\delta\cos\delta)\cos 2\varphi \\
q_L &= -(\cos\lambda\cos\delta)\sin\varphi + (\sin\lambda\cos 2\delta)\cos\varphi \\
p_L &= (\sin\lambda\sin\delta\cos\delta)\sin 2\varphi + (\cos\lambda\sin\delta)\cos 2\varphi
\end{aligned}\right\}\quad(6.46)
$$

$g(\omega)$为源时间函数的谱函数，对于单位阶跃函数，$g(\omega)=\frac{1}{i\omega}$。$\gamma_R$ 与 γ_L 分别为瑞利面波和勒夫面波的物理衰减系数。

当已知震源参数及震中距Δ后，给定介质模型的面波位移 u_z^R 及 u_φ^L 取决于振幅函数 S_R, P_R, Q_R 及 P_L, Q_L。下面讨论的主要问题是计算及分析它们的特征。

§3 垂直非均匀介质中的面波振幅谱传输函数

作为例子，我们从 SH 波位移场开始讨论。在垂直非均匀介质中，频域 SH 波的运动方程（无源）可写成

$$
\nabla^2 \boldsymbol{u} + \frac{\mu'}{\mu}\left[2\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial z} + (\hat{\boldsymbol{e}}_z \times \mathrm{curl}\boldsymbol{u})\right] + k_\beta^2 \boldsymbol{u} = 0 \quad (6.47)
$$

这里，$k_\beta=\omega/\beta(z)$，$\mu'=\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}z}$，$\boldsymbol{u}$ 是 SH 波谱位移，

$$
\boldsymbol{u} = \mathrm{curl}(\hat{e}_z S) = \left(\hat{e}_\Delta \frac{1}{\Delta}\frac{\partial}{\partial \varphi} - \hat{e}_\varphi \frac{\partial}{\partial \Delta}\right) S \quad (6.48)
$$

位函数 S 符合

$$\nabla^2 S + \frac{\mu'}{\mu}\frac{\partial S}{\partial z} + k_\beta^2 S = 0 \tag{6.49}$$

设 $S(\Delta,\varphi,z) = \int_0^\infty \sum_{m=-\infty}^{\infty} S_m \mathrm{d}k$，且

$$S_m = F(k,z)Y_m(k\Delta,\varphi),\ Y_m(k\Delta,\varphi) = J_m(k\Delta)\mathrm{e}^{im\varphi} \tag{6.50}$$

则

$$\boldsymbol{u} = \int_0^\infty \sum_{m=-\infty}^{\infty} F(k,z)\boldsymbol{C}_m(k\Delta,\varphi)k\mathrm{d}k \tag{6.51}$$

这里

$$\boldsymbol{C}_m(k\Delta,\varphi) = \left(\hat{\boldsymbol{e}}_\Delta \frac{1}{k\Delta}\frac{\partial}{\partial\varphi} - \hat{\boldsymbol{e}}_\varphi \frac{\partial}{\partial(k\Delta)}\right)Y_m(k\Delta,\varphi) \tag{6.52}$$

因

$$\nabla^2 S_m = \left(\frac{\partial^2}{\partial\Delta^2} + \frac{1}{\Delta}\frac{\partial}{\partial\Delta} + \frac{1}{\Delta^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)S_m = J_m(k\Delta)\left(\frac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}z^2} - k^2F\right)$$

故式(6.49)可变为关于函数 F 的二阶常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}z^2} + \frac{\mu'}{\mu}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z} + (k_\beta^2 - k^2)F = 0 \tag{6.53}$$

将它写成 Sturm-Liouville 形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\mu\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}\right) - (\mu k^2 - \rho\omega^2)F = 0 \tag{6.54}$$

引入

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= F \\ y_2 &= \mu\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z} \end{aligned}\right\} \tag{6.55}$$

我们已熟知，y_1 为 SH 波位移，y_2 为切应力。那么，可用一对关于 y_1、y_2 的一阶常微方程来替代式(6.54)，它们是

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= \frac{1}{\mu} y_2 \\ y_2' &= (\mu k^2 - \rho\omega^2) y_1 \end{aligned}\right\} \tag{6.56}$$

对于均匀介质($\mu'=0$),式(6.53)的两个解为 $F=e^{\nu_\beta z}$ 及 $e^{-\nu_\beta z}$($\nu_\beta = \sqrt{k^2-k_\beta^2}$),Hansen 矢量为 $M^+=e^{\nu_\beta z}C_m$,$M^-=e^{-\nu_\beta z}C_m$。

对于非均匀介质,推广 Hansen 矢量的概念,定义

$$M_m^+ = F^+(k,z)C_m,\ M_m^- = F^-(k,z)C_m$$

这里 $F^\pm(k,z)=y^\pm$ 是式(6.53)的两个解。再对单位脉冲源运动方程进行运算,最终得到 SH 波谱格林函数

$$\mathbf{G}(\mathbf{z}/\mathbf{z}_0) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty k\mathrm{d}k \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\hat{y}_1(z)}{y_2^+(0)} C_m(k\Delta,\varphi) C_m^*(k\Delta_0,\varphi_0) \tag{6.57}$$

式中

$$\left.\begin{aligned} &\hat{y}_1(z) = y_1^+(z_<)\left(\frac{y_2^+(0)y_1^-(z_>) - y_2^-(0)y_1^+(z_>)}{y_2^-(0)y_1^+(0) - y_2^+(0)y_1^-(0)}\right) \\ &z_> = \max(z_0,z),\ z_< = \min(z_0,z),\ \hat{y}_1(0) = -y_1^+(z_0) \\ &\mathbf{z} = (\Delta,\varphi,z),\ \mathbf{z}_0 = (\Delta_0,\varphi_0,z_0) \end{aligned}\right\} \tag{6.58}$$

三个基本剪切位错源在自由表面产生的 SH 波位移的方位分量为:

$$\left.\begin{aligned} u_\varphi^{I}(\omega) &= -\frac{\mu_s U_0 \mathrm{d}S}{2\pi}\cos 2\varphi \frac{\partial}{\partial\Delta}\int_0^\infty \frac{y_1^+(z_0)}{y_2^+(0)} J_2(k\Delta) k\mathrm{d}k \\ u_\varphi^{\mathrm{I}}(\omega) &= -\frac{\mu_s U_0 \mathrm{d}S}{2\pi}\cos\varphi \frac{\partial}{\partial\Delta}\int_0^\infty \frac{y_2^+(z_0)}{y_2^+(0)} J_1(k\Delta) \mathrm{d}k \\ u_\varphi^{\mathrm{II}}(\omega) &= -\frac{\mu_s U_0 \mathrm{d}S}{4\pi}\sin 2\varphi \frac{\partial}{\partial\Delta}\int_0^\infty \frac{y_1^+(z_0)}{y_2^+(0)} J_2(k\Delta) k\mathrm{d}k \end{aligned}\right\} \tag{6.59}$$

式中 μ_s 为震源处的 μ 值。

现在考虑勒夫面波,即求式(6.59)中的极点留数值。按在均匀介质中求值的类似方法,位移可写成式(6.44)的形式,而引入了推广的振幅传输函数

$$\left.\begin{aligned}P_L &= \frac{1}{4\pi a^2}(k_L a)^{3/2}\ \sqrt{8\pi}\left\{\frac{\mu_s y_1^+(z_0)}{\left(\frac{\partial}{\partial k}\right) y_2^+(0)}\right\}_{k_L} \\ Q_L &= \left(\frac{y_2^+(z_0)}{\mu_2 k y_1^+(z_0)}\right)_{k_L} P_L\end{aligned}\right\} \quad (6.60)$$

或称为勒夫面波的谱传输函数(The spectral transfer functions)。式中 $y_2^+(k,z)$通常用其一阶常微分方程组的数值积分来求其数值解。但此数值作关于 k_L 的偏微商的计算是比较困难的，可用积分运算来替代它。

引入

$$\frac{1}{\tilde{A}_L} = 2\int_{-\infty}^{\infty}\mu(z)\left(\frac{y_1^+(z)}{y_1^+(0)}\right)^2 dz \quad (6.61)$$

那么，在 $z<0$ 空间，可得

$$\frac{\partial}{\partial k_L} y_2^+(k_L, 0) = \frac{k_2 y_1^+(k_L, 0)}{\tilde{A}_L} \quad (6.62)$$

随之也将振幅传输函数写成

$$\left.\begin{aligned}P_L &= \frac{1}{4\pi a^2}(k_L a)^{3/2}\ \sqrt{8\pi}\left(\frac{\mu_s \tilde{A}_L}{k_L}\right)\left(\frac{y_1^+(z_0)}{y_1^+(0)}\right) \\ Q_L &= \left(\frac{1}{\mu_s k_L}\right)\left(\frac{y_2^+(z_0)}{y_1^+(z_0)}\right) P_L\end{aligned}\right\} \quad (6.63)$$

至于瑞利面波，可考虑振幅为 $y_1^R(z), y_2^R(z), y_3^R(z)$, $y_4^R(z)$的 P-SV 位移的积分表达式的极点留数值。这里 $y_1(z)$与 $y_3(z)$为位移振幅值，$y_2(z)$和 $y_4(z)$为应力振幅值。当无源时可得一阶微分方程组为

$$\left.\begin{aligned}\frac{dy_1^R}{dz} &= \frac{1}{\lambda + 2\mu}(y_2^R + k\lambda y_3^R) \\ \frac{dy_2^R}{dz} &= -\rho\omega^2 y_1^R + k y_4^R \\ \frac{dy_3^R}{dz} &= \frac{1}{\mu} y_4^R - k y_1^R \\ \frac{dy_4^R}{dz} &= -\frac{k\lambda}{\lambda + 2\mu} y_2^R + \left(-\rho\omega^2 + 4k^2\frac{\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu}\right) y_3^R\end{aligned}\right\} \quad (6.64)$$

我们感兴趣的仅是格林函数的面波项，下面从谱域非齐次运动方程

$$\rho\omega^2 \boldsymbol{u} + \nabla \sigma = - \boldsymbol{F}_0 g(\omega)\delta(z - z_0) \tag{6.65}$$

出发，与面波位移展开式相似，将 $\boldsymbol{F}_0\delta(z-z_0)$ 展为

$$\boldsymbol{F}_0\delta(z - z_0) = \left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left[f_2^{\mathrm{R}}\boldsymbol{P}_m(k\Delta,\varphi) + f_4^{\mathrm{R}}\boldsymbol{B}_m(k\Delta,\varphi) + f_2^{\mathrm{L}}\boldsymbol{C}_m(k\Delta,\varphi)\right]k\mathrm{d}k\right\}\delta(z - z_0) \tag{6.66}$$

按正交关系，式中

$$\left.\begin{aligned} f_2^{\mathrm{R}} &= \boldsymbol{F}_0\boldsymbol{P}_m^*(k\Delta_0,\varphi_0) \\ f_4^{\mathrm{R}} &= \boldsymbol{F}_0\boldsymbol{B}_m^*(k\Delta_0,\varphi_0) \\ f_2^{\mathrm{L}} &= \boldsymbol{F}_0\boldsymbol{C}_m^*(k\Delta_0,\varphi_0) \end{aligned}\right\} \tag{6.67}$$

可得一阶微分方程组为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\begin{pmatrix} y_1^{\mathrm{L}} \\ y_2^{\mathrm{L}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mu^{-1} \\ \mu k^2 - \rho\omega^2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1^{\mathrm{L}} \\ y_2^{\mathrm{L}} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ f_2^{\mathrm{L}} \end{pmatrix}\delta(z - z_0) \tag{6.68}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\begin{pmatrix} y_1^{\mathrm{R}} \\ y_2^{\mathrm{R}} \\ y_3^{\mathrm{R}} \\ y_4^{\mathrm{R}} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & (\lambda + 2\mu)^{-1} & k\lambda(\lambda + 2\mu)^{-1} & 0 \\ -\rho\omega^2 & 0 & 0 & k \\ -k & 0 & 0 & \mu^{-1} \\ 0 & -k\lambda(\lambda + 2\mu)^{-1} & -\rho\omega^2 + \dfrac{4\mu k^2(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1^{\mathrm{R}} \\ y_2^{\mathrm{R}} \\ y_3^{\mathrm{R}} \\ y_4^{\mathrm{R}} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ f_2^{\mathrm{R}} \\ 0 \\ f_4^{\mathrm{R}} \end{pmatrix}\delta(z - z_0) \tag{6.69}$$

在 $z=0$ 处符合的条件为

$$y_2^{\mathrm{L}} = y_2^{\mathrm{R}} = y_4^{\mathrm{R}} = 0 \tag{6.70}$$

上面两个一阶微分方程组的一般形式为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}z} = \mathrm{A}(z)\boldsymbol{y} - \boldsymbol{f}\delta(z - z_0) \tag{6.71}$$

式中 $\mathbf{A}(z)$是 2×2 或 4×4 阶矩阵,$\boldsymbol{y}$ 与 $\boldsymbol{f}$ 是 2×1 或 4×1 阶列矩阵。取初始值$z=z_1(z_1<z_0)$,用$\mathbf{A}(z)$的传播矩阵值$\mathbf{P}(z,z_0)$来表示$\mathbf{y}(z)$,即

$$
\begin{aligned}
y(z) &= \mathbf{P}(z,z_1)y(z_1) - \int_{z_1}^{z} \mathbf{P}(z,\zeta)f\delta(\zeta - z_0)\mathrm{d}\zeta \\
&= \mathbf{P}(z,z_1)y(z_1) - \mathbf{P}(z,z_0)fH(z - z_0)
\end{aligned} \tag{6.72}
$$

这里 $H(z)$为单位阶梯函数,并注意到震源条件为

$$
\mathbf{y}(z_0 + 0) - \mathbf{y}(z_0 - 0) = -\boldsymbol{f} \tag{6.73}
$$

我们不直接解方程式(6.71),而是解其对应的齐次方程($f=0$),并运用相应的源条件及边条件得到结果。这样可回避直接求传播矩阵值。

仍先从 SH 波位移来处理勒夫面波。令 $y^+(z)$为 $f=0$ 时的方程式(6.71)的解,其另一个解为 $\tilde{y}(z)$,作它们的线性组合解

$$
y(z) = Ay^+(z) + \tilde{y}(z)H(z - z_0) \tag{6.74}
$$

且符合条件

$$
\tilde{y}(z_0) = -f,\quad Ay_2^+(0) + \tilde{y}_2(0) = 0 \tag{6.75}
$$

式中 A 是积分常数。那么,式(6.74)的解为

$$
y_j(z) = -\frac{\tilde{y}_2(0)}{y_2^+(0)}y_j^+(z) + \tilde{y}_j(z)H(z - z_0) \quad (j = 1,2) \tag{6.76}
$$

将它代入运动方程式(6.65)中,得到解的积分表达式,再在 $z=z_0$ 处作剪切位错处理,取极点留数值,最终得到任意取向的剪切位错点源产生的勒夫面波位移公式为

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{u} = (U_0\mathrm{d}S)\frac{\mathrm{i}}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{2}\sum_{\sigma=c,s}\frac{1}{I_2^2}[\mu_s k_n \bar{C}_m^{\sigma} y_1^+(z_0) - C_m^{\sigma} y_2^+(z_0)] \times \\
y_1^+(z)[\hat{e}_\Delta \frac{1}{k_n\Delta}\frac{\partial}{\partial\varphi} - \hat{e}_\varphi \frac{\partial}{\partial(k_n\Delta)}]H_m^{(2)}(k_n\Delta)(\cos m\varphi, \sin m\varphi)
\end{aligned} \tag{6.77}
$$

式中 $\sigma=c=\cos m\varphi$,或 $\sigma=s=\sin m\varphi$,C_m^{σ} 及 $\bar{C}_m^{\sigma}$ 为与位错源取向有关

的系数。

对于远场，用其渐近表达式，得到

$$u_\varphi^L = -(U_0 \mathrm{d}S)\frac{\mathrm{i}}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{2}\sum_{\sigma=c,s}\frac{1}{I_2^2}(\mu_s k_n C_m^\sigma y_1^+(z_0) - C_m^\sigma y_2^+(z_0)\cdot$$

$$y_1^+(z)(\cos m\varphi, \sin m\varphi)\sqrt{2/\pi k_n \Delta}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi(\frac{m}{2}-\frac{1}{4})}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - k_n \Delta)} \qquad (6.78)$$

引入谱传输函数

$$\left.\begin{aligned} P_L &= \frac{1}{4\pi a}(k_L a)^{3/2}\sqrt{8\pi}\left(\frac{\mu_s \bar{A}_L}{k_L}\right)\left(\frac{y_1^+(z_0)}{y_1^+(0)}\right)\left(\frac{y_1^+(z)}{y_1^+(0)}\right) \\ Q_L &= \left(\frac{y_2^+(z_0)}{\mu_s k_L y_1^+(z_0)}\right)P_L \end{aligned}\right\} \qquad (6.79)$$

式中

$$\frac{1}{\bar{A}_L} = 2\int_{-\infty}^{\infty}\mu(z)\left(\frac{y_1^+(z)}{y_1^+(0)}\right)^2\mathrm{d}z = 2C_L U_L\int_{-\infty}^{\infty}\rho(z)\left(\frac{y_1^+(z)}{y_1^+(0)}\right)^2\mathrm{d}z \qquad (6.80)$$

将式(6.78)按 n 项相叠加，并将 C_m^σ 与 $\bar{C}_m^\sigma$ 代入，也可得到用 P_L，Q_L 表示的远场勒夫波位移。

用类似的步骤来作瑞利面波分析，可得单位脉冲点源的位移表达式为

$$u = \frac{\mathrm{i}}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{C_R U_R I_1^R}[(f_1^R y_2^+ - f_2^R y_1^+) + (f_3^R y_4^+ - f_4^R y_3^+)]_{z_0}\cdot$$

$$[y_1^+(z)\boldsymbol{P}_m^{(2)}(k_n\Delta,\varphi) + y_3^+(z)\boldsymbol{B}_m^{(2)}(k_n\Delta,\varphi)],(\mathrm{Re}\,\omega > 0) \qquad (6.81)$$

且符合震源条件

$$-f_j^R = y_j^R(z_0+0) - y_j^R(z_0-0),(j=1,2,3,4) \qquad (6.82)$$

式中 $\boldsymbol{P}_m^{(2)}$ 及 $\boldsymbol{B}_m^{(2)}$ 是第二类 Hankel 函数。$I_1^R = \int_{-\infty}^{\infty}\rho(z)[(y_1^+(z))^2 + (y_3^+(z))^2]\mathrm{d}z$ 为能量积分。

同理，对于位于 z_0 处的任意剪切位错点源的瑞利面波的位移表达式为

$$u = (U_0 \mathrm{d}S)\frac{\mathrm{i}}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{2}\sum_{\sigma=c,s}\frac{1}{C_R U_R I_1^R}[\mu_2 k_n(\bar{p}_m^\sigma y_1^+ + \bar{b}_m^\sigma y_3^+) - (p_m^\sigma y_2^+ + b_m^\sigma y_4^+)]_{z_0}[y_1^+(z)\boldsymbol{p}_m^{\sigma(2)}(k_n\Delta,\varphi) + y_3^+(z)\boldsymbol{B}_m^{\sigma(2)}(k_n\Delta,\varphi)] \tag{6.83}$$

式中 $b_m^\sigma, p_m^\sigma, \bar{b}_m^\sigma, \bar{p}_m^\sigma$ 为与震源取向有关的系数。

对于远场，可有

$$\left.\begin{aligned} u_z^R &= (U_0\mathrm{d}S)\frac{\mathrm{i}}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{2}\sum_{\sigma=c,s}\frac{1}{C_R U_R I_1^R}\cdot \\ &\quad [\mu_s k_n(\bar{p}_m^\sigma y_1^+ - \bar{b}_m^\sigma y_3^+) - (p_m y_2^+ + b_m^\sigma y_4^+)]_{z_0}\cdot \\ &\quad y_1^+(z)(\cos m\varphi, \sin m\varphi)\sqrt{2/\pi k_n\Delta}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi(\frac{m}{2}+\frac{1}{4})} \\ u_\Delta^R &= \left(\frac{y_3^+(z)}{y_1^+(z)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}\right)u_z^R \end{aligned}\right\} \tag{6.84}$$

也可用谱振幅传输函数 P_R、Q_R、S_R 来表示位移 u_z^R 及 u_Δ^R，其中

$$\left.\begin{aligned} P_R &= \frac{1}{4\pi a^2}(k_R a)^{3/2}\sqrt{8\pi}\left(\frac{\mu_s \bar{A}_R}{k_R}\right)\left(\frac{y_3^+(z_0)}{y_1^+(0)}\right)\left(\frac{y_1^+(z)}{y_1^+(0)}\right) \\ Q_R &= \frac{1}{\mu_s k_R}\left(\frac{y_4^+(z_0)}{y_3^+(z_0)}\right)P_R \\ S_R &= \left[\frac{1+\sigma_s}{1-\sigma_s} + \frac{1-2\sigma_s}{1-\sigma_s}\frac{1}{\mu_s k_R}\left(\frac{y_2^+(z_0)}{y_3^+(z_0)}\right)\right]P_R \\ \frac{1}{\bar{A}_R} &= 2C_R U_R\int_{-\infty}^{\infty}\rho(z)\left[\left(\frac{y_1^+(z)}{y_1^+(0)}\right)^2 + \left(\frac{y_3^+(z)}{y_1^+(0)}\right)^2\right]\mathrm{d}z \end{aligned}\right\} \tag{6.85}$$

式中 σ_s 为源处的泊松比。

从式(6.77)至式(6.85)，给出了用位错点源激发的面波位移公式及谱振幅传输函数。这些传输函数都是用一阶常微分方程组的振幅比来表示。它们是：

$$
\left.\begin{array}{l}
\left(\dfrac{y_1^+(z)}{y_1^+(0)}\right)_{k_L},\left(\dfrac{y_1^+(z_0)}{y_1^+(0)}\right)_{k_L},\left(\dfrac{y_2^+(z_0)}{y_1^+(z_0)}\right)_{k_L},\left(\dfrac{y_1^+(z)}{y_1^+(0)}\right)_{k_R} \\
\left(\dfrac{y_3^+(z)}{y_1^+(0)}\right)_{k_R},\left(\dfrac{y_3^+(z_0)}{y_1^+(0)}\right)_{k_R},\left(\dfrac{y_2^+(z_0)}{y_3^+(z_0)}\right)_{k_R},\left(\dfrac{y_4^+(z_0)}{y_3^+(z_0)}\right)_{k_R}
\end{array}\right\} \tag{6.86}
$$

它们都为齐次运动方程的解，而与源的参数无关，因而可认为是平面波振幅函数。利用它们且扩展矩阵方法可为计算振幅传输函数提供一种有效而方便的算法。观察式(6.79)与式(6.85)可看出，由地表位移表示的谱振幅传输函数 P_L、Q_L、P_R、Q_R 及 S_R 是震源、波的振型、频率与地球结构模型的复合函数。当源的类型、取向及深度确定后，在给定观测点的面波位移特征可由这些传输函数表示出来，因而也可称它们为介质的传输函数(The medium transfer functions)，即线性系统的响应。传输函数(或位移)随方位角 φ 的变化图形称为波的辐射图案。又由于 $u_z^R(\varphi)$ 与 $u_\varphi^L(\varphi)$ 是复数，因而存在着振幅辐射图案与初始相位图案，显然有

$$
\left.\begin{array}{l}
u_z^R \text{ 的初始空间相位} = -\dfrac{\pi}{4} + \arctan\left[\dfrac{q_R Q_R}{s_R S_R + p_R P_R}\right] \\
u_\varphi^L \text{ 的初始空间相位} = -\dfrac{3\pi}{4} + \arctan\left[\dfrac{q_L Q_L}{p_L P_L}\right]
\end{array}\right\} \tag{6.87}
$$

令 $U(\lambda,\delta,\varphi)=\chi(\varphi)e^{i\Lambda(\varphi)}$ 为复辐射函数，则有

$$
\left.\begin{array}{l}
U^L = p_L P_L + i q_L Q_L \\
U^R = s_R S_R + p_R P_R + i q_R Q_R \\
U(\lambda,\delta;\varphi+\pi) = U^*(\lambda,\delta;\varphi) \\
U(\lambda+\pi,\delta;\varphi) = -U(\lambda,\delta;\varphi) \\
U(-\delta) = -U^*(\delta) \\
U^L(\pi-\lambda,\delta;\pi-\varphi) = -U^L(\lambda,\delta;\varphi) \\
\chi(2\pi-\lambda,\delta;2\pi-\varphi) = \chi(\lambda,\delta;\varphi)
\end{array}\right\} \tag{6.88}
$$

这样，能方便快速地定出振幅与相位图案。图 6.3 为 5 个振幅传输函数的辐射图案。从图中可看出，P_R 为 $\varphi=45°$ 的瑞利面波垂直分量的振幅。图 6.4 为两个不同的地球模型的一阶瑞利面波的振幅辐射图

案与初始相位图案。在反演问题中，这些图案是测定震源参数与类型的有力工具。

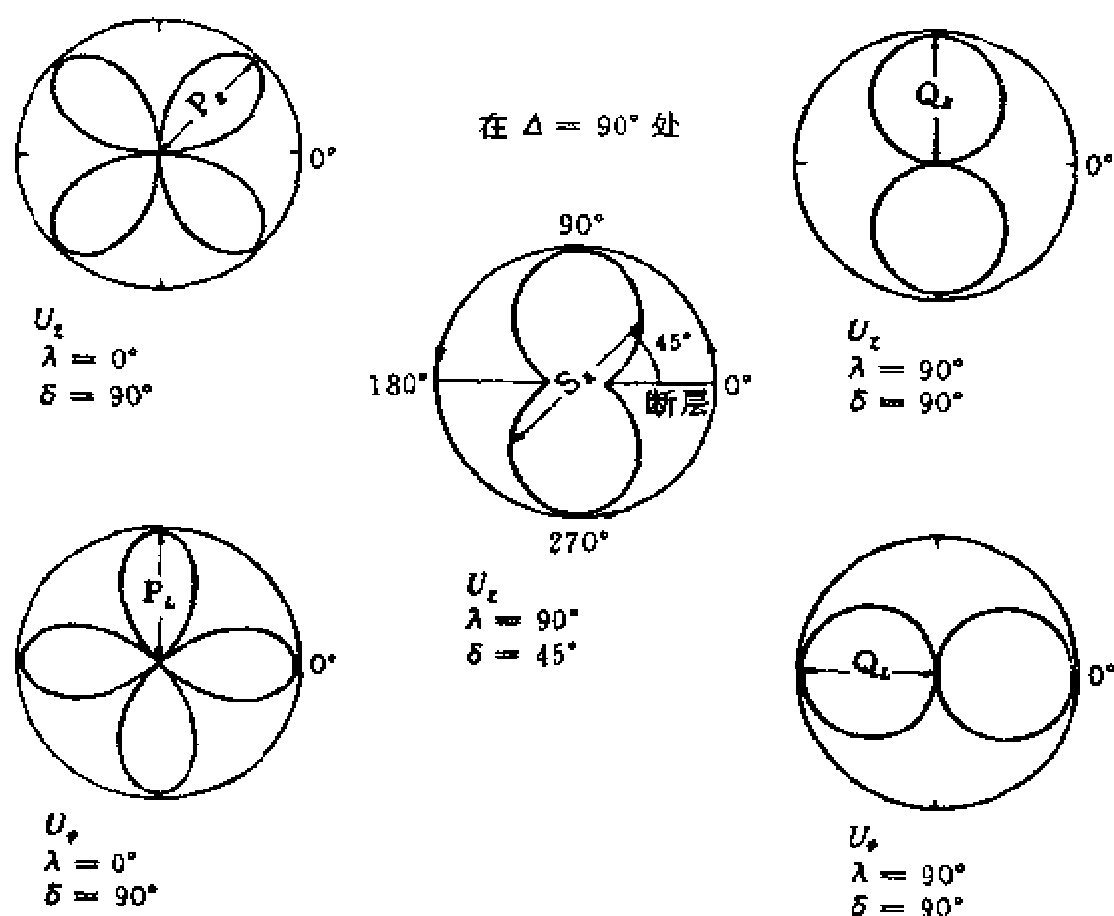


图 6.3　面波振幅辐射图案

§4　有限移动源产生的面波辐射

在第四章§2已讲过，强震的断层面长度可达800km。而远场面波的周期范围为50～300s，相应的波长为250～1500km。可见断层面长度与远场面波波长之比趋近于1。因而，这种情况下，不能再将强震剪切位错源看作点源，而应看作为以非零速度破裂的有限源。其谱位移场必须以时间延迟并遍及整个断层面面积作积分来求值。

从式(6.44)可看出，对于点位错源，无论是瑞利面波的垂直分量

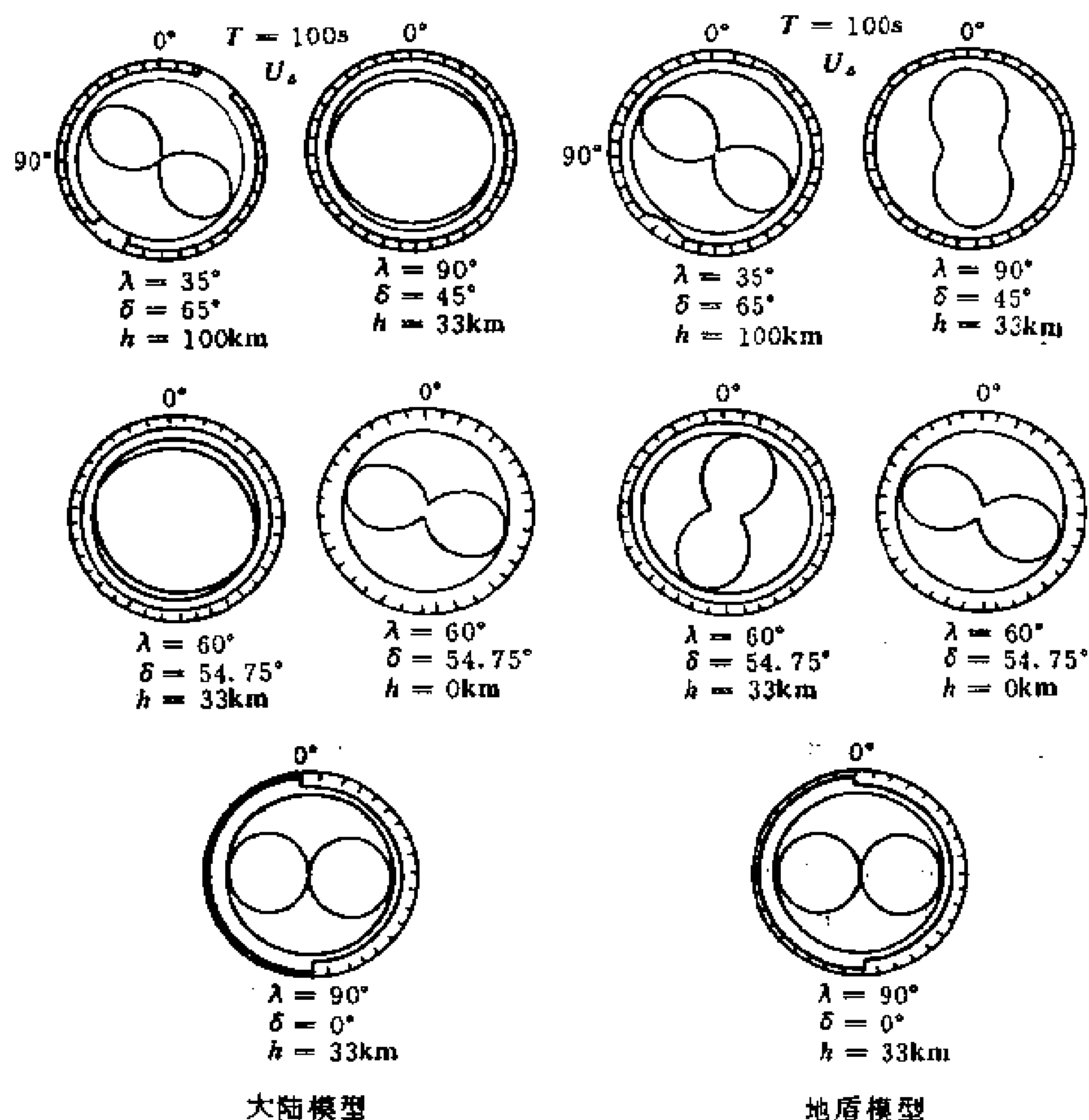


图 6.4　一阶瑞利面波振幅辐射与初始相位图案

u_z^R，还是勒夫面波的方位分量 u_φ^L，都可表示为

$$u = (U_0 \mathrm{d}S) F(\lambda, \delta, h; \varphi; \omega) \left[\frac{e^{-\gamma\Delta} e^{i(\omega t - k\Delta)}}{\sqrt{\sin \frac{\Delta}{a}}} \right] \tag{6.89}$$

式中与震中距 Δ 有关的量放在方括号中。

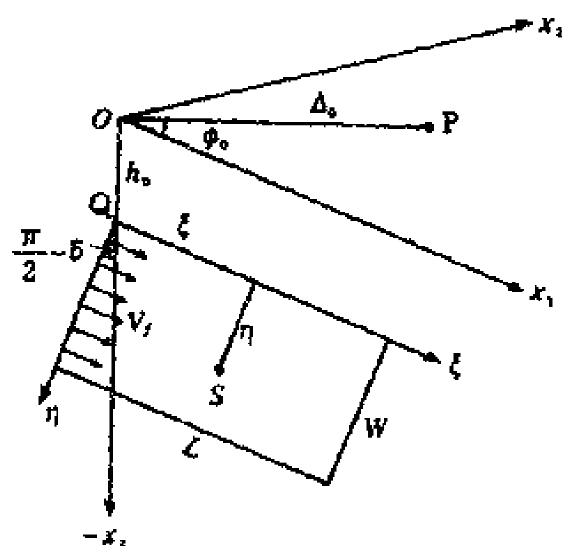


图 6.5 有限移动源的几何布局

考虑长为 L 宽为 W 的长方形断层(图 6.5),源以有限速度 v_f 从 Q 点沿走向方向破裂,此方向标为$\overline{Q\xi}$。取位错幅度 U_0 为常量。在 (x_1,x_2,x_3) 坐标中,断层面上任一点 $S(\xi,\eta)$ 的坐标为 $(\xi,-\eta\cos\delta,-h_0-\eta\sin\delta)$。$\Delta_0$ 是从观测点 P 到破裂初始点的水平距离,φ_0 为观测点相对于断层面走向的方位角,h_0 为震源深度。

假设 $\Delta_0\gg\xi$ 和 $\Delta_0\gg\eta$,那么从观测点 P 到 S 点的距离为

$$\Delta=\left[(\Delta_0\cos\varphi_0-\xi)^2+(\Delta_0\sin\varphi_0+\eta\cos\delta)^2\right]^{1/2}$$
$$\approx\Delta_0-\xi\cos\varphi_0+\eta\cos\delta\sin\varphi_0 \tag{6.90}$$

令 $ds=d\xi d\eta(0\leqslant\xi\leqslant L,0\leqslant\eta\leqslant W)$ 时间延迟为 ξ/v_f,则可求得远场位移近似值(令 $g(w)=1$)为

$$u=P_0F(\lambda,\delta,h_0+\frac{1}{2}W\sin\delta;\varphi_0;w)\left[\frac{e^{-\gamma\Delta_0+i(wt-k\Delta_0)}}{\sqrt{\sin\frac{\Delta_0}{a}}}\right]\times$$
$$\left[\frac{1}{L}\int_0^L e^{-ik\xi(\frac{c}{v_f}-\cos\varphi_0)}d\xi\right] \tag{6.91}$$

式中 $P_0=U_0LW$ 为源位函数值。位移表示式的第 2 个方括号中表示的就是断层面的有限尺度及其运动的影响,即 Doppler 移位效应。可

将这部分写成位移的调制因子$\frac{\sin X}{X}e^{-iX}$的形式（参看式(4.34)等），这里$X=\frac{\omega L}{2v_f}(1-\frac{v_f}{c}\cos\varphi_0)=\frac{2\pi L}{\Lambda}(\frac{c}{v_f}-\cos\varphi_0)=\frac{\pi t_f}{T}(1-\frac{v_f}{c}\cos\varphi_0)$，$\Lambda$为波长，$t_f=\frac{L}{v_f}$称为破裂时间。应该注意到，调制因子中的面波相速度$c$是频率$\omega$的函数，这就增加了Doppler移位效应的复杂性。当$\left(\frac{L}{v_f}\right)c(\omega)-L\cos\varphi_0=N\Lambda(N=0,1,2,\cdots)$时，观测点观测到的移位效应极小（相消干涉）。因此，对于给定的方位角φ_0，一系列的"相消点(holes)"可由方程（频域）

$$N=\frac{\nu L}{c(\nu)}\left[\frac{c(\nu)}{v_f}-\cos\varphi\right],(\nu=\frac{\omega}{2\pi}) \tag{6.92}$$

来确定。

若给定波长Λ，则位移的辐射图案上的"相消点"由

$$\varphi_N=\arccos\left(\frac{c}{v_f}-\frac{N\Lambda}{L}\right) \tag{6.93}$$

来确定。图6.6是有限移动源引起的勒夫面波的辐射图案，可看出明显的调制效应。

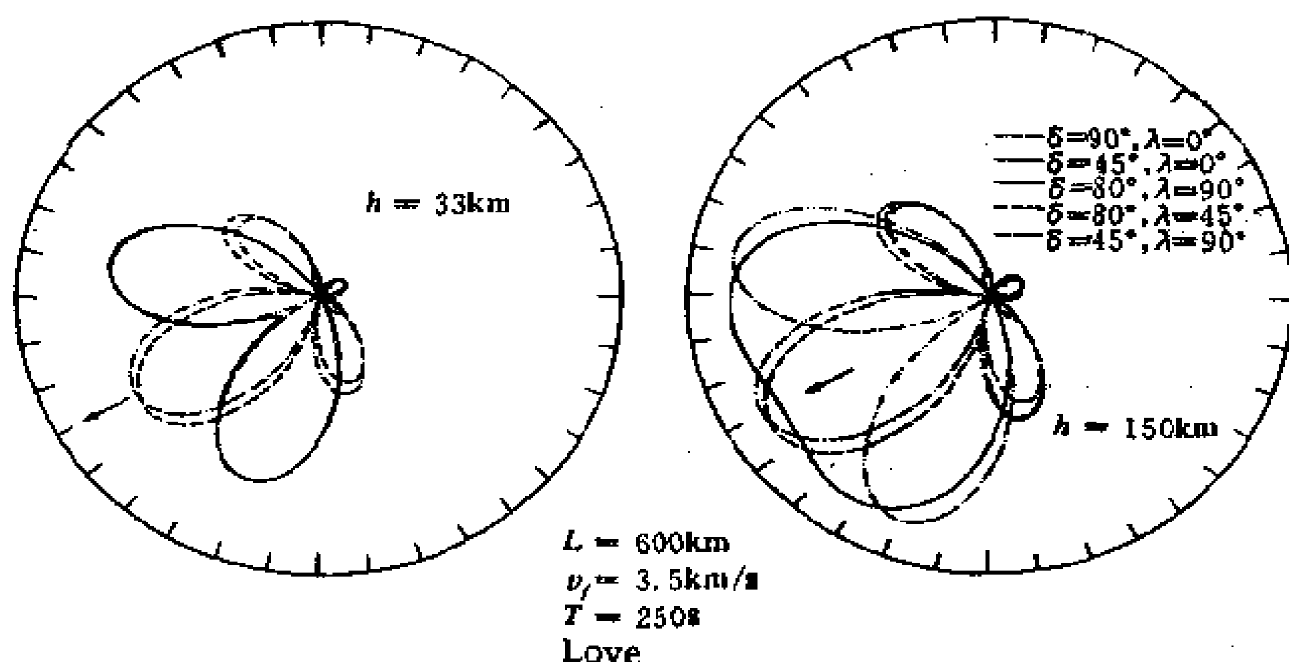


图6.6　源的尺度与运动对谱振幅辐射的调制

§ 5　球地球模型的简正振型

假设实际的球地球模型为径向非均匀介质(或说球对称)。它是一个有限体,在这个有限球体中的任意扰动所引起的固有振荡可表示为简正振型的叠加。

我们从相互联系着的 N 个质点系统的振动入手。设 N 个质点处于平衡状态中,一组外力 $f_\alpha(t)$ 作用在第 α 个质点上($\alpha=1,2,\cdots N$),使全部质点随之都运动起来。此质点的质量为 m_α,位移为 $\boldsymbol{u}_\alpha$ 由于质点之间应力变化而导致的小位移是单个质点位移的叠加。其运动方程可写成

$$m_\alpha \frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{u}_\alpha(t)}{\mathrm{d}t^2} + \sum_{\beta=1}^{N} c_{\alpha\beta}\boldsymbol{u}_\beta(t) = \boldsymbol{f}_\alpha(t) \qquad (t > 0) \qquad (6.94)$$

式中 $c_{\alpha\beta}$为对称算子。方程适合的初始条件为

$$\boldsymbol{u}_\alpha(0) = 0 \text{ 和 } \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{u}_\alpha(0) = 0$$

当 $\boldsymbol{f}_\alpha(t)=0$ 时,式(6.94)的解为简正振型系统(The normal modes)。第一个质点有三个方程,即存在有 $3N$ 个固有频率(本征频率)ω_i 和 $3N$ 个固有矢量(本征矢量)。每个固有矢量的形式为${}_i\boldsymbol{u}_\alpha \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_i t}$,表示第 α 个质点在第 i 个振型中的位移。它们所符合的运动方程为

$$-\omega_i^2 m_\alpha({}_i\boldsymbol{u}_\alpha) + \sum_{\beta} c_{\alpha\beta}({}_i\boldsymbol{u}_\beta) = 0,(\alpha = 1,2,\cdots,N) \quad (6.95)$$

这些固有矢量${}_i\boldsymbol{u}_\alpha$是正交的,即

$$\sum_{\alpha} m_\alpha({}_i\boldsymbol{u}_\alpha^*)({}_i\boldsymbol{u}_\alpha) = 0 \quad (i \neq j)$$

或写成

$$\sum_{\alpha} m_\alpha({}_j\boldsymbol{u}_\alpha^*)({}_i\boldsymbol{u}_\alpha) = \delta_{ij} \qquad (6.96)$$

用${}_j\boldsymbol{u}_\alpha^*$ 乘式(6.95)的各项,并对所有的 α 相加,得

$$-\omega_i^2\sum_{\alpha} m_\alpha({}_i\boldsymbol{u}_\alpha)({}_j\boldsymbol{u}_\alpha^*) + \sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha\beta}({}_i\boldsymbol{u}_\beta)({}_j\boldsymbol{u}_\alpha^*) = 0(\alpha = 1,2,\cdots,N) \tag{6.97}$$

利用正交条件式(6.96)，式(6.97)变为

$$\omega_i^2\delta_{ij} = \sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha\beta}({}_j\boldsymbol{u}_\alpha^*)({}_i\boldsymbol{u}_\beta) \tag{6.98}$$

当 $\boldsymbol{f}_\alpha(t)\neq 0$ 时，其解仍为简正振型的叠加，假设为

$$\boldsymbol{u}_\alpha(t) = \sum_i a_i({}_i\boldsymbol{u}_\alpha)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_i t} \tag{6.99}$$

式中 α_i 为待定系数。作拉普拉斯变换，$\boldsymbol{u}_\alpha(t)\approx\boldsymbol{u}_\alpha(s)$，那么，式(6.99)的拉普拉斯变换式为

$$\boldsymbol{u}_\alpha(s) = \sum_i\left(\frac{a_i}{s+\mathrm{i}\omega}\right)({}_i\boldsymbol{u}_\alpha) \tag{6.100}$$

它适合的运动方程为

$$m_\alpha s^2\boldsymbol{u}_\alpha(s) + \sum_\beta c_{\alpha\beta}\boldsymbol{u}_\beta(t) = \boldsymbol{f}_\alpha(s) \tag{6.101}$$

将 $\boldsymbol{u}_\alpha(s)$ 代入，得

$$m_\alpha s^2\sum_i\left(\frac{a_i}{s+\mathrm{i}\omega_i}\right)({}_i\boldsymbol{u}_\alpha) + \sum_\beta c_{\alpha\beta}\sum_i\left(\frac{a_i}{s+\mathrm{i}\omega_i}\right)({}_i\boldsymbol{u}_\beta) = \boldsymbol{f}_\alpha(s) \tag{6.102}$$

用 $\sum_\alpha({}_j\boldsymbol{u}_\alpha^*)$ 乘方程的各项，并利用正交关系式(6.96)与(6.98)，得到

$$\sum_i\left[s^2\left(\frac{a_i}{s+\mathrm{i}\omega_i}\right)\delta_{ij} + \frac{a_i}{s+\mathrm{i}\omega_i}\omega_i^2\delta_{ij}\right] = \sum_\alpha({}_j\boldsymbol{u}_\alpha^*)(\boldsymbol{f}_\alpha(s)) \tag{6.103}$$

当 $i=j$ 时，得

$$\frac{a_j}{s+\mathrm{i}\omega_j} = \frac{\sum_\alpha({}_j\boldsymbol{u}_\alpha^*)\boldsymbol{f}_\alpha(s)}{s^2+\omega_j^2}$$

将它代入式(6.100)中，可得

$$\boldsymbol{u}_\alpha(s) = \sum_i\left[\frac{\sum_\beta({}_i\boldsymbol{u}_\beta^*)\boldsymbol{f}_\beta(s)}{s^2+\omega_i^2}\right]({}_i\boldsymbol{u}_\alpha) \tag{6.104}$$

设 $\boldsymbol{f}_\alpha(t)=\boldsymbol{F}_\alpha H(t)$，则 $f_\beta(s)=s^{-1}F_\beta$，对式(6.104)作拉普拉斯逆变

换，得到

$$u_a(t) = \sum_i \left(\sum_\beta ({}_iu_\beta^*) \cdot F_\beta \right) ({}_iu_a) \frac{1 - \cos\omega_i t}{\omega_i^2} \tag{6.105}$$

对于滞弹性介质，用瞬时 Q 值，同理可得

$$u_a(t) = \sum_i \left(\sum_\beta ({}_iu_\beta^*) F_\beta \right) ({}_iu_a) \frac{1 - \exp[-\omega_i t/2Q_i]\cos\omega_i t}{\omega_i^2} \tag{6.106}$$

式(6.106)表示有限体的固有振荡位移为简正振型的线性叠加，每一个振型是在一个新的水平上的衰减运动(图 6.7)。运动从 $t=0$ 开始，当 $t\to\infty$ 时有有限的静态位移值。每个位移分量分为三部分：与 F_β 有关的源的激发系数、简正振型 ${}_iu_a$ 及指数衰减部分。

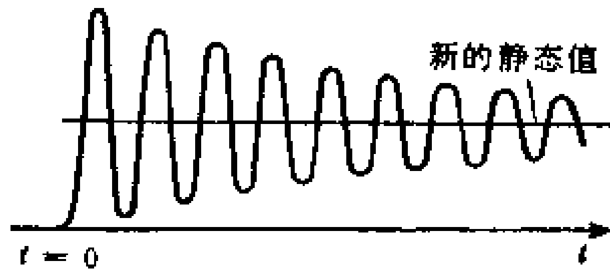


图 6.7　阶梯函数 $H(t)$ 点源产生的简正振型位移

对于连续介质，令质点数 $N\to\infty$，且用体积分 $\int_V [{}_iu^*(\xi)] f(\xi) \cdot \mathrm{d}V(\xi)$ 代替 $\sum_{\beta=1}^{N} ({}_iu_\beta^*) F_\beta$，则位移公式可写为

$$u(x,t) = \sum_i \left(\int_V [{}_iu^*(\xi)] f(\xi) \mathrm{d}V \right) [{}_i u(x)] \frac{1 - \exp(-\omega_i t/2Q_i)\cos\omega_i t}{\omega_i^2} \tag{6.107}$$

这种情况下每个位移分量的正交关系为

$$\int_V \rho(\xi) [{}_ju^*(\xi)][{}_iu(\xi)] \mathrm{d}V = \delta_{ij} \tag{6.108}$$

对于偶极点源，设其矩 $M_{pq}(t) = M_{pq}H(t)$，则等效体力为

$$f_p(\xi,t) = -M_{pq}(t)\frac{\partial}{\partial \xi_q}\delta(\xi - x_s) \tag{6.109}$$

那么，激发函数

$$\int_V [{}_i u^*(\xi)] f(\xi) \mathrm{d}V = [{}_i e^*_{pq}(x_s)] M_{pq}$$

这里${}_i e^*_{pq}(x_s) = {}_i u^*_{p,q}(x_s)$为第 i 个简正振型中的应变分量的共轭值。这样，位移公式又可写为

$$u(x,t) = \sum_i [{}_i e^*_{pq}(x_s) M_{pq}][{}_i u(x)] \frac{1 - \exp(-\omega_i t/2Q_i)\cos\omega_i t}{\omega_i^2} \tag{6.110}$$

在非旋转的球对称地球介质中，介质参数是径向坐标 r 的函数，如 $\rho(r)$、$\lambda(r)$及 $\mu(r)$，那么，我们可以在球极坐标(r,Δ,φ)中，将简正振型的位移与应力用矢量球调和函数 $\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$(式 2.67)表示

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{u} = [&{}_nU_l(r)\boldsymbol{P}_l^m(\Delta,\varphi) + {}_nV_l(r)\boldsymbol{B}_l^m(\Delta,\varphi) + \\ &{}_nW_l(r)\boldsymbol{C}_l^m(\Delta,\varphi)]\exp[-\mathrm{i}({}_n\omega_i)t] \\ \boldsymbol{T} = [&{}_nR_l(r)\boldsymbol{P}_l^m(\Delta,\varphi) + {}_nS_l(r)\boldsymbol{B}_l^m(\Delta,\varphi) + \\ &{}_nT_l(r)\ \boldsymbol{C}_l^m(\Delta,\varphi)]\exp[-\mathrm{i}({}_n\omega_i)t] \end{aligned}\right\} \tag{6.111}$$

式中的径向函数${}_nU_l(r)$，${}_nV_l(r)$，${}_nW_l(r)$，${}_nR_l(r)$，${}_nS_l(r)$及${}_nT_l(r)$是正交的，可用两个一阶微分方程组表示为：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\begin{pmatrix} V \\ U \\ S \\ R \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{r} & \frac{-l(l+1)^{\frac{1}{2}}}{r} & \frac{1}{\mu} & 0 \\ \frac{\lambda(l(l+1))^{\frac{1}{2}}}{r(\lambda+2\mu)} & -\frac{2\lambda}{r(\lambda+2\mu)} & 0 & \frac{1}{\lambda+2\mu} \\ \frac{4l(l+1)\mu(\lambda+\mu)}{r^2(\lambda+2\mu)} - \rho\omega^2 - \frac{2\mu}{r^2} & -\frac{2\mu(3\lambda+3\mu)(l(l+1))^{\frac{1}{2}}}{r^2(\lambda+2\mu)} & -\frac{3}{r} & -\frac{\lambda(l(l+1))^{\frac{1}{2}}}{r(\lambda+2\mu)} \\ \frac{-2\mu(3\lambda+2\mu)(l(l+1))^{\frac{1}{2}}}{r^2(\lambda+2\mu)} & -\rho\omega^2 + \frac{4\mu(3\lambda+2\mu)}{r^2(\lambda+3\mu)} & \frac{(l(l+1))^{\frac{1}{2}}}{r} & \frac{-4\mu}{r(\lambda+3\mu)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V \\ U \\ S \\ R \end{pmatrix} \tag{6.112}$$

及

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\begin{pmatrix} W \\ T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} & \frac{1}{\mu} \\ \frac{\mu(l-1)(l+2)}{r^2} - \rho\omega^2 & -\frac{3}{r} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} W \\ T \end{pmatrix} \tag{6.113}$$

它们代表两类振动模式，一类称为球型振荡(Spheroidal oscillations)，其水平波函数为 P_l^m 与 B_l^m，径向波函数由式(6.112)确定。另一类称为扭转振荡(Toroidal oscillations)，其水平波函数为 C_l^m，径向波函数由式(6.113)确定。球型振型包含了瑞利面波，扭转振型中包含了勒夫面波。与垂直非均匀介质中的面波相比，球体固有振荡的水平波数 $k=\frac{(l(l+1))^{1/2}}{r}$。

作为例子，对于单位点爆炸源，$M_{rr}=M_{\Delta\Delta}=M_{\varphi\varphi}=1$，$M_{\Delta\varphi}=M_{\varphi r}=M_{r\Delta}=0$，位移公式(6.110)中的各项为：

$$\left.\begin{aligned} &\sum_l e_{pq}^*(x_s)M_{pq} = \sum_l e_{pq}(x_s)M_{pq} = \sum_l (e_{rr}+e_{\Delta\Delta}+e_{\varphi\varphi})\big|_{r=r_s} \\ &= \sum_l \left(\frac{2l+1}{4\pi}\right)^{1/2}\left(\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}+\frac{2U}{r}-\frac{(l(l+1))^{1/2}}{r}V\right)\Big|_{r=r_s} \\ &\sum_n {}_l u(x) = \sum_n {}_nU_l(r)\left(\frac{2l+1}{4\pi}\right)^{1/2}P_l(\cos\Delta) \end{aligned}\right\} \tag{6.114}$$

最终得到径向位移为

$$\left.\begin{aligned} u_r(r,\Delta,t) &= \sum_n\sum_l {}_nA_l(r)P_l(\cos\Delta)\times \\ &\quad \left(1-\mathrm{e}^{-\frac{{}_n\omega_l t}{2({}_nQ_l)}}\cos({}_n\omega_l)t\right) \\ {}_nA_l(r) &= \frac{2l+1}{4\pi({}_n\omega_l)^2}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}({}_nU_l)+\frac{2({}_nU_l)}{r}-\right. \\ &\quad \left.\frac{(l(l+1))^{1/2}}{r}({}_nV_l)\right|_{r=r_s}({}_nU_l(r)) \end{aligned}\right\} \tag{6.115}$$

可看出，位移仅为对正整数 n 与 l 的叠加。从谐波分析中知，此为带状谐波振荡，它是由 $P_l(\cos\Delta)$测定的。由于 $P_l(\cos\Delta)$在 $0<\Delta<\pi$ 内正好有 l 个节点，故振荡波为围绕大圆转 l 周的驻波。

§ 6 球形地球上的面波

点爆炸源引起的球体固有振荡为绕大圆转 l 圈的波，一圈的周长为 $2\pi r$（r 为球的半径），此波是相长干涉的结果，故周长应是波长 Λ 的整数倍，即 $2\pi r=l\Lambda$。另一方面，当 l 很大时，水平波数 $k\approx\frac{1}{r}(l-\frac{1}{2})$，有 $\Lambda=\frac{2\pi}{k}=2\pi r/(l+\frac{1}{2})$，即 $2\pi r=\Lambda l+\frac{1}{2}\Lambda$。这时 $2\pi r$ 不是 Λ 的整数倍，额外加上了半个波长，与相长干涉的结果不符。这是由于大圆路径的波具有极点相移（The polar phase shift）的结果。我们称震中（$\Delta=0$）及对震中（$\Delta=\pi$）为极点，当 l 很大时，除 $\Delta=0,\pi$（极点）外，由渐近式 $P_l(\cos\Delta)\approx\left(\frac{2}{l\pi\sin\Delta}\right)^{1/2}\cos\left[\left(l+\frac{1}{2}\right)\Delta-\frac{\pi}{4}\right]$所确定的行波有视相位$\frac{\pi}{4}$。波绕大圆一周，若按行波处理，波在此两极点各跑出及进入一次，此两次共有超前的视相位 $2\times\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$，那么，在整个大圆路径上，两个极点的超前视相位为 $2\times\frac{\pi}{2}=\pi$，相应的波长正好为$\frac{\Lambda}{2}$。所以，除去这种过极点时波的相位超前（或落后）的极点相移，振荡波是符合相长干涉原理的。由于极点相移的存在，在相速度测量中，波经劣弧、优弧及大圆弧（图 6.8）的极点数不同，其视相位值也不一样，因此测出的相速度值也不同。对于经大圆弧路径的波，在极点处所测的相速度高于其他点所测的值，好象波在这些特殊点传播得快些。

为定量地对比球体固有振荡与面波，我们对式（6.115）的每一项作求和处理。Poisson 求和公式告诉我们，给定一个函数 $g(\nu)$，可以证明：

$$\sum_{l=0}^{\infty}g(l+\frac{1}{2})=\sum_{s=-\infty}^{\infty}(-1)^s\int_0^{\infty}g(\nu)e^{i2\pi s\nu}d\nu \qquad (6.116)$$

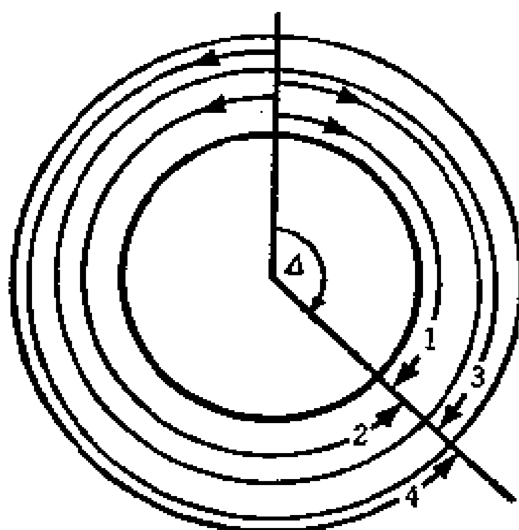


图 6.8 大圆路径波的编号

这里 l、s 为整数，$\mathrm{Re}\nu = l + \dfrac{1}{2} = kr$。

将位移公式(6.115)写成

$$
\begin{aligned}
u_r(\boldsymbol{x}, t) &= \sum_n \sum_{\nu-\frac{1}{2}} {}_nA_{\nu-\frac{1}{2}} P_{\nu-\frac{1}{2}}(\cos\Delta)\left[1 - \exp(-{}_n\alpha_{\nu-\frac{1}{2}} t)\cos({}_n\omega_{\nu-\frac{1}{2}} t)\right] \\
&= \sum_n \sum_{\nu-\frac{1}{2}} {}_nA_{\nu-\frac{1}{2}} C(\nu, t) P_{\nu-\frac{1}{2}}(\cos\Delta)
\end{aligned}
\tag{6.117}
$$

式中 $C(\nu, t) = H(t)\left[1 - \exp(-{}_n\alpha_{\nu-\frac{1}{2}} t)\cos({}_n\omega_{\nu-\frac{1}{2}} t)\right]$，${}_n\alpha_{\nu-\frac{1}{2}}$ 为衰减系数。运用求和公式(6.116)，上式变成

$$
\begin{aligned}
u_r(\boldsymbol{x}, t) &= \sum_n \sum_{s=-\infty}^{\infty} (-1)^s \int_0^{\infty} {}_nA_{\nu-\frac{1}{2}} C(\nu, t) P_{\nu-\frac{1}{2}}(\cos\Delta)\mathrm{d}\nu \\
&= \sum_n \int_0^{\infty} {}_nA_{\nu-\frac{1}{2}} C(\nu, t)\left[\sum_{s=-\infty}^{\infty} (-1)^s P_{\nu-\frac{1}{2}}(\cos\Delta) \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi s\nu}\right]\mathrm{d}\nu \\
&= \sum_n \int_0^{\infty} {}_nA_{\nu-\frac{1}{2}} C(\nu, t)\left[\sum_{N=1}^{\infty} R_N(\nu, \Delta)\right]\mathrm{d}\nu
\end{aligned}
\tag{6.118}
$$

这里引入

$$\sum_{N=1}^{\infty} R_N(\nu,\Delta) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} (-1)^s P_{\nu-\frac{1}{2}}(\cos\Delta)e^{i2\pi s\nu} \tag{6.119}$$

令 $P_l=Q_l^{(1)}+Q_l^{(2)}$，$Q_l^{(1),(2)}=\frac{1}{2}(P_l\pm\frac{2i}{\pi}Q_l)$，$Q_l$ 为第二类勒让德函数。将波解释为行波的叠加，从式(6.119)可看出，当 $N=$奇数 $\left(s=\frac{N-1}{2}\right)$ 时有

$$\begin{aligned}R_N &= (-1)^{\frac{N-1}{2}}[Q_{\nu-\frac{1}{2}}^{(1)}(\cos\Delta)e^{-i(N-1)\pi\nu} + Q_{\nu-\frac{1}{2}}^{(2)}(\cos\Delta)e^{i(N-1)\pi\nu}] \\ &= (-1)^{\frac{N-1}{2}}[P_{\nu-\frac{1}{2}}(\cos\Delta)\cos(N-1)\pi\nu + \\ &\quad \frac{2}{\pi}Q_{\nu-\frac{1}{2}}(\cos\Delta)\sin(N-1)\pi\nu]\end{aligned} \tag{6.120}$$

当 $N=$偶数$\left(s=\frac{N}{2}\right)$时有

$$\begin{aligned}R_N &=(-1)^{N/2}[Q_{\nu-\frac{1}{2}}^{(2)}(\cos\Delta)e^{-iN\pi\nu}+Q_{\nu-\frac{1}{2}}^{(1)}(\cos\Delta)e^{iN\pi\nu}] \\ &=(-1)^{N/2}\left[P_{\nu-\frac{1}{2}}(\cos\Delta)\cos N\pi\nu-\frac{2}{\pi}Q_{\nu-\frac{1}{2}}(\cos\Delta)\sin N\pi\nu\right]\end{aligned} \tag{6.121}$$

则
$$\begin{aligned}\sum_{N=1}^{\infty} R_N &=R_1+R_2+\cdots+R_N \\ &=P_{\nu-\frac{1}{2}}(\cos\Delta)[1-\cos2\pi\nu-\cos2\pi\nu+\cos4\pi\nu+\cos4\pi\nu-\cdots] \\ &=\sum_{s=-\infty}^{\infty}(-1)^s P_{\nu-\frac{1}{2}}(\cos\Delta)e^{i2\pi s\nu}\end{aligned}$$

此即为式(6.119)。

R_N 为水平波函数，每一个 N(正整数)代表一个沿球体表面行进的面波，其序号如图 6.8 所示。那么，$\sum_{N=1}^{\infty} R_N$ 表示球体的固有振荡位移为 N 个相向而行的面波位移的叠加。

当 $N=1$ 时，由 $R_1(\nu,\Delta)$ 表示的面波位移为

$$u_r(X,t) = \sum_n \int_0^{\infty} {}_nA_{\nu-\frac{1}{2}}R_1(\nu,\Delta)C(\nu,t)d\nu \tag{6.122}$$

式中 $\nu=kr=l+\dfrac{1}{2}$， $d\nu=r dk$， $X=r\Delta$， $kX=\nu\Delta$。当 $|\nu|\gg 1$ 时，取 $P_{\nu-\frac{1}{2}}(\cos\Delta)$ 的渐近式，则

$$R_1(\nu,\Delta)=P_{\nu-\frac{1}{2}}(\cos\Delta)\approx\left(\frac{\Delta}{\sin\Delta}\right)^{\frac{1}{2}}J_0(kX) \qquad (6.123)$$

那么

$$u_r(X,t)=\left(\frac{\Delta}{\sin\Delta}\right)^{\frac{1}{2}}\sum_n\int_0^\infty {}_nA(k)J_0(kX)C(kr,t)r\mathrm{d}k$$

(6.124)

忽略 $C(kr,t)$ 中的静态位移项，求频率域的位移值 $u_r(X,\omega)$。因

$$-\mathrm{e}^{-({}_n\alpha_{\nu-\frac{1}{2}})t}\cos({}_n\omega_{\nu-\frac{1}{2}})t=-\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-({}_n\alpha_{\nu-\frac{1}{2}})t+\mathrm{i}({}_n\omega_{\nu-\frac{1}{2}})t}+\mathrm{e}^{-({}_n\alpha_{\nu-\frac{1}{2}})t-\mathrm{i}({}_n\omega_{\nu-\frac{1}{2}})t}\right),$$

对其作 Fourier 变换得到谱值为

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\mathrm{i}[\omega+{}_n\omega(k)]-{}_n\alpha(k)}+\frac{1}{\mathrm{i}[(\omega-{}_n\omega(k)]-{}_n\alpha(k)}\right]$$

${}_n\omega(k)$ 按 k_n(第 n 个振型的本征值)作 Taylor 展开，取一级项，得

$$_n\omega(k)=\omega+(k-k_n)\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k_n}=\omega+(k-k_n)U_n(\omega) \qquad (6.125)$$

式中 $U_n(\omega)$ 为群速度，取正值。则位移作复 k 半平面的回路积分(见图 6.9)，有

$$u_r(X,\omega)=\frac{1}{4}\left(\frac{\Delta}{\sin\Delta}\right)^{\frac{1}{2}}\sum_n\int_0^\infty {}_nA(k)H_0^{(1)}(kX)\frac{1}{\mathrm{i}[\omega-{}_n\omega(k)]-{}_n\alpha(k)}r\mathrm{d}$$

(6.126)

积分中的极点项

$$\begin{aligned}\mathrm{i}[\omega-{}_n\omega(k)]-{}_n\alpha(k)&=\mathrm{i}[\omega-(\omega-(k-k_n)U_n(\omega)]-{}_n\alpha(h)\\&=-\mathrm{i}(k-k_n)U_n(\omega)-{}_n\alpha(k)\\&=-\mathrm{i}U_n(\omega)\left[(k-k_n)-\mathrm{i}\frac{{}_n\alpha(k)}{U_n(\omega)}\right]\end{aligned}$$

则 $$\frac{1}{\mathrm{i}[\omega-{}_n\omega(k)]-{}_n\alpha(k)}=\frac{\mathrm{i}}{U_n(\omega)}\frac{1}{k-\left(k_n+\mathrm{i}\dfrac{{}_n\alpha(k)}{U_n(\omega)}\right)}$$

$$\frac{{}_n\alpha(k)}{U_n(\omega)} = \frac{{}_n\omega}{2Q_n^t U_n(\omega)} = \frac{k_n}{2Q_n^s}$$

式中 Q_n^t 为瞬时 Q 值，Q_n^s 为空间 Q 值。

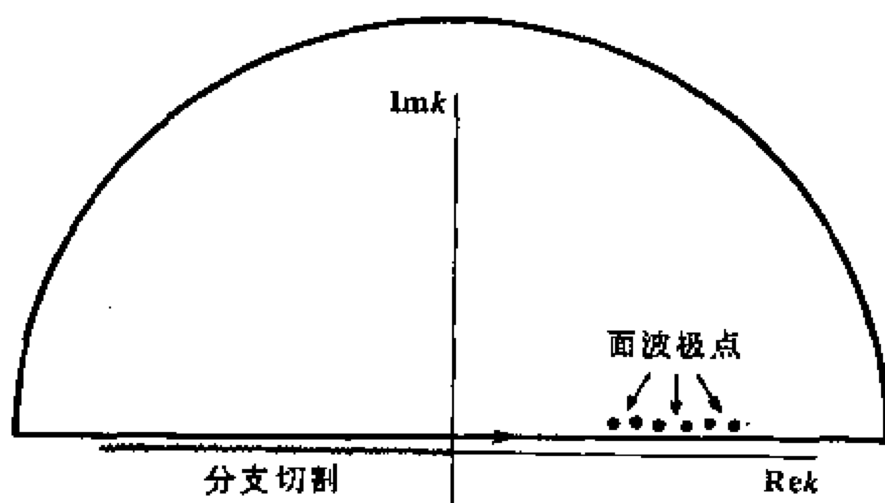


图 6.9 复 k 平面上的回路与极点

当水平距离 $X \gg \Delta$ 时，利用

$$J_0(kX) = \frac{1}{2}\left[H_0^{(1)}(kX) + H_0^{(2)}(kX)\right]$$

$$H_0^{(2)}(kX) = -H_0^{(1)}(kX)$$

$$H_0^{(1)}(kX) \approx \left(\frac{2}{\pi k_n X}\right)^{1/2} e^{i\left(k_n + i\frac{k_n}{2Q_n}\right)X - i\frac{\pi}{4}}$$

并运用留数定理，得到

$$u_r(X,\omega) = i\,\frac{\pi}{2}\left(\frac{\Delta}{\sin\Delta}\right)^{1/2} \sum_n \frac{rA(k_n)}{U_n}\left(\frac{2}{\pi k_n X}\right)^{1/2} e^{-\frac{k_n X}{2Q_n}} e^{i\left(k_n X + \frac{\pi}{4}\right)} \tag{6.127}$$

式(6.127)为具有单位阶梯函数的爆炸源在球状地球表面产生的面波位移公式，也可称为频域的面波格林公式。它是几个简正振型的叠加，每个振型的振幅与群速度 U_n 有关，相位移仍为 $\frac{\pi}{4}$。

习题与思考题

1. 什么是瑞利原理？试按瑞利原理求出群速度 U 的表达式。

2. 试从图 6.3 和图 6.4 来概述垂直非均匀介质中用振幅传输函数表示的瑞利面波在勒夫面波的远场位移特征。

3. 试述面波的 Doppler 移位效应特征。

4. 为什么会发生大圆路径面波的极点相移现象？由于极点相移，偶数路径面波与奇数路径面波在测量相速度上有何区别？

5. 用图 6.9 回路，按留数定理具体计算爆炸源激发的频域面波位移式(6.126)，并简述其特征。

第七章　地球的自由振荡与广义射线

7级以上强震的发生，能够激发作为弹性体的地球介质的固有振荡，这称为地球的自由振荡。它以驻波形式绕地球传播，研究这类波的特征，可较仔细地探测地球内部深处的结构与运动。

非旋转的径向非均匀介质的自由振荡波的一般特征，已在第六章§5、§6作过讨论，还可参看地震学教程（傅淑芳等，1991）第四章的有关内容。这类波可区分为两种类型，球形振荡及扭转振荡。本章在前述基础上，讲述自由振荡波的激发、特征以及波动描述与射线描述的一致性等问题。

§1　径向非均匀自重力球地球介质中的剪切位错点源激发的自由振荡

初始应力处于流体静压状态、径向非均匀、各向同性、非旋转的弹性球地球介质，在自重力作用下，频域的运动方程可写成

$$\mu(\nabla^2\boldsymbol{u}+\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{u})+\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}r}\left(2\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial r}+\hat{e}_r\times\operatorname{curl}\boldsymbol{u}\right)+\operatorname{grad}(\lambda\operatorname{div}\boldsymbol{u})$$
$$+\rho_0[\operatorname{grad}(\psi-g_0u_r)+g_0\hat{e}_r\operatorname{div}\boldsymbol{u}]+\omega^2\rho_0\boldsymbol{u}=0 \qquad (7.1)$$

式中 ρ_0、g_0 为初始密度值及重力加速度值。若初始流体静压为 p_0，则有

$$\left.\begin{aligned}&\operatorname{grad}p_0=-g_0\rho_0\hat{e}_r\\&g_0(r)=\frac{4\pi G}{r}\int_0^r\rho_0(x)x^2\mathrm{d}x\end{aligned}\right\}\qquad(7.2)$$

重力位符合 Poisson 方程，即：

$$\nabla^2 \Psi = -4\pi G\rho \tag{7.3}$$

重力位 Ψ 及扰动重力位 ψ 的关系为

$$\Psi = \Psi_0 + \psi$$

扰动重力位也符合 Poisson 方程，即

$$\left.\begin{aligned} \nabla^2\psi &= -4\pi G\Delta\rho = 4\pi G \mathrm{div}(\rho_0 \boldsymbol{u}) \\ \Delta\rho &= \rho - \rho_0 = -\mathrm{div}(\rho_0 \boldsymbol{u}) \end{aligned}\right\} \tag{7.4}$$

问题所适合的边界条件为

(1) 在地球表面应力为零。内外重力位及径向梯度连续。

(2) 在地球内部的界面上，位移与应力连续。重力位及其径向梯度连续。

(3) 方程组的解在 $r=0$ 处解析。

式(7.1)与式(7.4)是关于位移 $\boldsymbol{u}(u_r, u_\theta, u_\varphi)$ 及重力位扰动 ψ 的微分方程，对它们求解，可得到两类振荡振型的位移。

1. 扭转振荡(Toroidal Oscillations)

u_r 及 $\mathrm{div}\boldsymbol{u}$ 为零的纯扭转振荡，且无重力位扰动，故运动方程取简单形式，有

$$\mu\nabla^2\boldsymbol{u} + \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}r}\left[2\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}r} + \hat{e}_r \times \mathrm{curl}\,\boldsymbol{u}\right] + \omega^2\rho_0\boldsymbol{u} = 0 \tag{7.5}$$

位移矢量用基本矢量波函数 $\boldsymbol{C}_{ml}^\sigma(\theta,\varphi)$ 表示为：

$$\boldsymbol{u} = \sum_{\sigma,m,l} y_1(r)\sqrt{l(l+1)}\boldsymbol{C}_{ml}^\sigma(\theta,\varphi)$$

($\sigma = \cos m\varphi$ 或 $\sin m\varphi$)

代入运动方程式(7.5)可知其径向函数 $y_1(r)$ 满足下述方程

$$\mu\left(\frac{\mathrm{d}^2 y_1}{\mathrm{d}r^2} + \frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}r}\right) + \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}r}\left(\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}r} - \frac{y_1}{r}\right) + \left(\omega^2\rho_0 - \frac{l(l+1)}{r^2}\mu\right)y_1 = 0 \tag{7.6}$$

且附加的扰动应力符合

$$\hat{e}_r \cdot \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}) = \sum_{\sigma,m,l} y_2(r)\sqrt{l(l+1)}\boldsymbol{C}_{ml}^\sigma(\theta,\varphi) \tag{7.7}$$

这里，
$$y_2 = \mu\left(\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}r} - \frac{y_1}{r}\right) \tag{7.8}$$

由于实际地球介质的地核为液体，故边条件为在 $r=a$（地表）及 $r=b$（地核表面）上，

$$y_2 = 0 \tag{7.9}$$

可看出，运动方程(7.6)等效于

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}r} &= \frac{y_1}{r} + \frac{y_2}{\mu} \\ \frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}r} &= \left(\frac{l^2+l-2}{r^2}\mu - \omega^2\rho_0\right)y_1 - \frac{3}{r}y_2 \end{aligned}\right\} \tag{7.10}$$

y_1 与 y_2 在 $b<r<a$ 的球壳内连续。

关于自由振荡波的激发，则应考虑源（外体力）的作用。设在球壳内 $r=r_0$、$\theta=0$ 处有一剪切位错点源，即 y_1 与 y_2 在此处间断，则震源条件为

$$y_i(r_0+0) - y_i(r_0-0) = -f_i, \quad i = 1,2 \tag{7.11}$$

用类似于第三章§2的方法，可得剪切位错点源的 f_i 值为

$$\left.\begin{aligned} f_1 &= \frac{-U_0\mathrm{d}S}{4\pi r_0^2}(2l+1)C_{ml}^{c} \\ f_2 &= \frac{-\mu(r_0)U_0\mathrm{d}S}{4\pi r_0^3}(2l+1)\bar{C}_{ml}^{c} \end{aligned}\right\} \tag{7.12}$$

式中 C_{ml}^{c} 与 $\bar{C}_{ml}^{c}$ 为与源的取向有关的系数。

给定扭转振荡的本征频率 ${}_n\omega_l$，可得到符合震源条件(7.12)的谱位移振幅 $y_1(r)$ 及应力振幅 $y_2(r)$。下面来讨论这个问题。

将位移用 Hansen 矢量表示为：

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \boldsymbol{M}_n(\boldsymbol{r}) \\ a_n &= \frac{1}{\Lambda_n}\int_V \boldsymbol{u}\cdot\overset{*}{\boldsymbol{M}}_n\rho_0\mathrm{d}V \end{aligned}\right\} \tag{7.13}$$

$\boldsymbol{M}_n(\boldsymbol{r})$ 的正交性表示为

$$\int_v \boldsymbol{M}_n(\boldsymbol{r})\overset{*}{\boldsymbol{M}}_k(\boldsymbol{r})\rho_0(r)\mathrm{d}r = \delta_{nk}\Lambda_n \tag{7.14}$$

式中 Λ_n 为正交系数。

现在 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})$所符合的运动方程为

$$\mathrm{div}\boldsymbol{\sigma} + \rho_0\boldsymbol{F} + \rho_0\omega^2\boldsymbol{u} = 0 \tag{7.15}$$

设

$$\rho_0\boldsymbol{F} = \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)\hat{\boldsymbol{a}}g(\omega) \tag{7.16}$$

$\hat{\boldsymbol{a}}$ 为力 $\boldsymbol{F}$ 方向的单位矢量。类似于第六章§5的运算方法，可得

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g(\omega)}{(\omega_n^2 - \omega^2)\Lambda_n}\boldsymbol{M}_n(\boldsymbol{r})\ (\overset{*}{\boldsymbol{M}}_n(r_0)\cdot\hat{\boldsymbol{a}}) \tag{7.17}$$

表示频域扭转振荡的格林函数为

$$\mathbf{G}(\boldsymbol{r}|\boldsymbol{r}_0;\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\boldsymbol{M}_n(\boldsymbol{r})\overset{*}{\boldsymbol{M}}_n(\boldsymbol{r})}{(\omega_n^2 - \omega^2)\Lambda_n}g(\omega) \tag{7.18}$$

作 Fourier 逆变换，得到时域单位阶梯函数 $H(t)$产生的格林函数为

$$\mathbf{G}(\boldsymbol{r}|\boldsymbol{r}_0;t) = \sum_{n=0}^{\infty}\boldsymbol{M}_n(\boldsymbol{r})\overset{*}{\boldsymbol{M}}_n(r_0)\ \frac{1 - \cos\omega_n t}{\omega_n^2\Lambda_n}H(t) \tag{7.19}$$

当 $t\to\infty$时的静态格林函数为

$$\begin{aligned}\mathbf{G}(\boldsymbol{r}|\boldsymbol{r}_0;st) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\omega_n^2\Lambda_n}\boldsymbol{M}_n(\boldsymbol{r})\overset{*}{\boldsymbol{M}}_n(\boldsymbol{r}_0) \\ &= \mathbf{G}(\boldsymbol{r}|\boldsymbol{r}_0;\omega = 0)\end{aligned} \tag{7.20}$$

将 $\boldsymbol{M}_n$ 用球谐函数展开，即

$${}_n\boldsymbol{M}_{ml}(\boldsymbol{r}) = y_{1n}(r)\sqrt{l(l+1)}\boldsymbol{C}_{ml}(\theta,\varphi)$$

按其正交性，可使正交系数

$${}_n\Lambda_{ml} = l(l + 1)\Omega_{ml}I_n^T \tag{7.21}$$

这里

$$\Omega_{ml} = \frac{4\pi}{2l + 1}\cdot\frac{(l - m)!}{(l - m)!} \tag{7.22}$$

$$I_n^T = \int_0^a y_{1n}^2\rho_0 r^2\mathrm{d}r \tag{7.23}$$

$$\int_0^a y_{1n}y_{1k}\rho_0 r^2\mathrm{d}r = 0 \qquad (n \neq k) \tag{7.24}$$

因 ω_n、y_{1n}及 I_n^T 是 n 和 l 的函数，而与 m 无关，故格林函数取形式为

$$\mathrm{G} = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \mathrm{G}_{ml} \tag{7.25}$$

这里

$$\mathrm{G}_{ml}(\boldsymbol{r}|\boldsymbol{r}_0;\omega) = \frac{1}{l(l+1)\Omega_{ml}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{{}_n\boldsymbol{M}_{ml}(\boldsymbol{r})\,{}_n\overset{*}{\boldsymbol{M}}_{ml}(\boldsymbol{r}_0)}{(\omega_n^2-\omega^2)I_n^T} g(\omega) \tag{7.26}$$

$$\mathrm{G}_{ml}(\boldsymbol{r}|\boldsymbol{r}_0;t) = \frac{1}{l(l+1)\Omega_{ml}} \sum_{n=0}^{\infty} {}_n\boldsymbol{M}_{ml}(\boldsymbol{r})\,{}_n\overset{*}{\boldsymbol{M}}_{ml}(\boldsymbol{r}_0)\, \frac{1-\cos\omega_n t}{\omega_n^2 I_n^T} H(t) \tag{7.27}$$

$$\mathrm{G}_{ml}(\boldsymbol{r}|\boldsymbol{r}_0;st) = \frac{1}{l(l+1)\Omega_{ml}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\omega_n^2 I_n^T}\, {}_n\boldsymbol{M}_{ml}(\boldsymbol{r})\,{}_n\overset{*}{\boldsymbol{M}}_{ml}(\boldsymbol{r}_0) \tag{7.28}$$

当格林函数已知后，用 Volterra 关系式(3.54)，可直接得到剪切位错点源产生的位移公式为

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r};t) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \sum_{n=0}^{\infty} {}_n\boldsymbol{u}_{ml}(\boldsymbol{r},t) \tag{7.29}$$

而

$$\begin{aligned}
{}_n\boldsymbol{u}_{ml}(\boldsymbol{r},t) = {} & \frac{P_0(1-\cos\omega_n t)H(t)}{l(l+1)\omega_n^2 I_n^T \Omega_{ml}} \Bigg\{ \frac{\mu(r_0)y_{1n}(r_0)}{r_0} \times \\
& \left[p_1\left(2\frac{\partial^2}{\partial\theta_0^2} + l^2 - l\right) - p_2 \frac{2}{\sin\theta_0}\left(\frac{\partial}{\partial\theta_0} - \cot\theta_0\right)\frac{\partial}{\partial\varphi_0} \right] \times \\
& \overset{*}{Y}_{ml}(\theta_0,\varphi_0) + y_{2n}(r_0)\left(p_3 \frac{\partial}{\partial\theta_0} - p_4 \frac{1}{\sin\theta_0}\frac{\partial}{\partial\varphi_0} \right) \times \\
& \overset{*}{Y}_{ml}(\theta_0,\varphi_0) \Bigg\} y_{1n}(r)\, \sqrt{l(l+1)}\, \boldsymbol{C}_{ml}(\theta,\varphi)
\end{aligned} \tag{7.30}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}
p_1 &= (\cos\lambda\sin\delta)\cos2\varphi_s + (\sin\lambda\sin\delta\cos\delta)\sin2\varphi_s \\
p_2 &= (\cos\lambda\sin\delta)\sin2\varphi_s - (\sin\lambda\sin\delta\cos\delta)\cos2\varphi_s \\
p_3 &= (\sin\lambda\cos2\delta)\cos\varphi_s - (\cos\lambda\cos\delta)\sin\varphi_s \\
p_4 &= (\sin\lambda\cos2\delta)\sin\varphi_s + (\cos\lambda\cos\delta)\cos\varphi_s \\
p_5 &= \sin\lambda\sin\delta\cos\delta
\end{aligned}\right\} \tag{7.31}$$

利用 $P_l^{-m}(\cos\theta)=(-1)^m\dfrac{(l-m)!}{(l+m)!}P_l^m(\cos\theta)$，可证明

$$_n u_{(-m)l} = {}_n u^*_{ml} \tag{7.32}$$

这表示位移(式 7.29)是实值。

在实际工作中，为便于理论地震图与实际观测值的对比，可引入用地心坐标表示的震中距 ε(图 7.1)。从图 7.1 可看出：

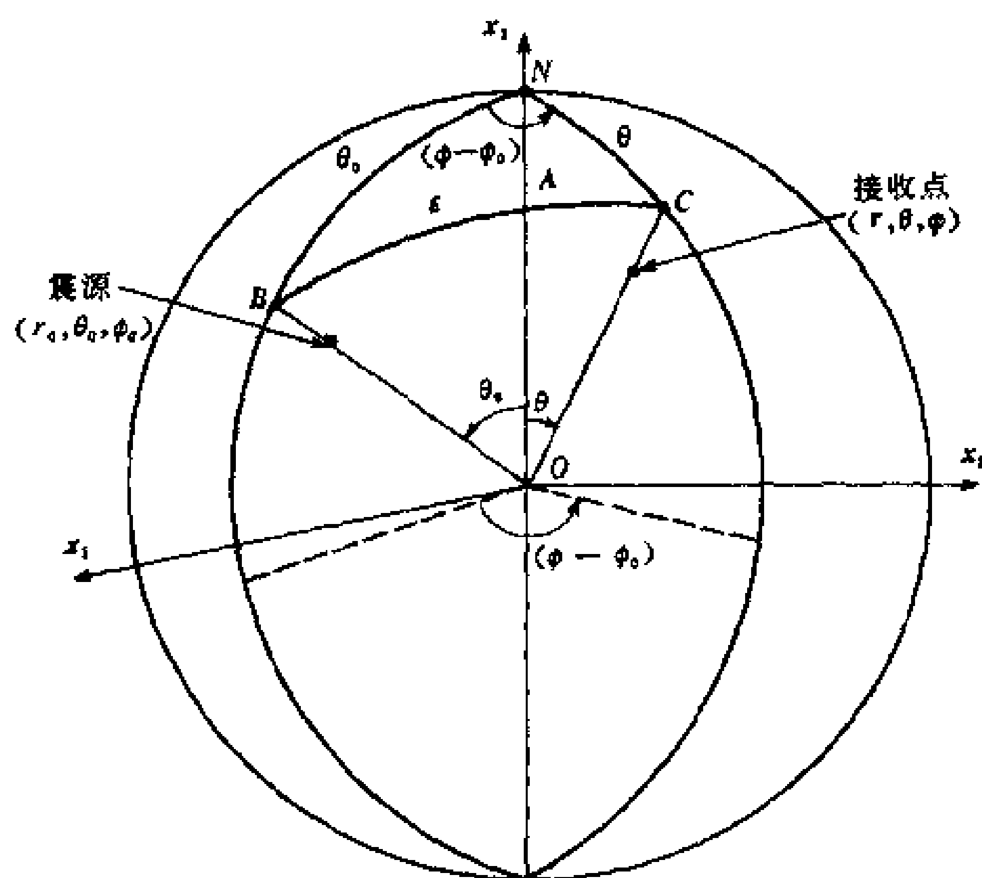


图 7.1　地心坐标系中的震中距 ε

$$\cos\varepsilon = \cos\theta\cos\theta_0 + \sin\theta\sin\theta_0\cos(\varphi-\varphi_0) \tag{7.33}$$

其 Legendre 函数

$$P_l(\cos\varepsilon) = \sum_{m=-l}^{l}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}Y_{ml}(\theta,\varphi)Y^*_{ml}(\theta_0,\varphi_0) \tag{7.34}$$

将它们代入式(7.29)及(7.30)中，得到

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},t) = {} & \frac{P_0}{4\pi}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{2l+1}{l(l+1)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-\cos\omega_n t)H(t)}{\omega_n^2 I_n^T}\times \\
& y_{1n}(r)\left(\hat{\boldsymbol{e}}_\theta\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}-\hat{\boldsymbol{e}}_\varphi\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\times \\
& \left\{\frac{\mu(r_0)y_{1n}(r_0)}{r_0}\left[p_1\left(2\frac{\partial^2}{\partial\theta_0^2}+l^2+l\right)-\right.\right. \\
& \left.p_2\frac{2}{\sin\theta_0}\left(\frac{\partial}{\partial\theta_0}-\cot\theta_0\right)\frac{\partial}{\partial\varphi_0}\right]+ \\
& \left.y_{2n}(r_0)\left(p_3\frac{\partial}{\partial\theta_0}-p_4\frac{1}{\sin\theta_0}\frac{\partial}{\partial\varphi_0}\right)\right\}P_l(\cos\varepsilon)
\end{aligned}
\tag{7.35}
$$

由图7.1可看出，引入角 $A=\varphi-\varphi_0$ 及球面角 B 和 C，则从球面三角形的边与角的关系得出

$$
\left.
\begin{aligned}
&\frac{\partial\varepsilon}{\partial\theta}=\cos C, &&\frac{\partial\varepsilon}{\partial\theta_0}=\cos B, &&\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\varphi}=\sin C; \\
&\frac{\partial B}{\partial\theta}=\frac{\sin C}{\sin\varepsilon}, &&\frac{\partial B}{\partial\theta_0}=-\sin B\cot\varepsilon, &&\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial B}{\partial\varphi}=-\frac{\cos C}{\sin\varepsilon} \\
&\frac{\partial C}{\partial\theta}=-\sin C\cot\varepsilon, &&\frac{\partial C}{\partial\theta_0}=\frac{\sin B}{\sin\varepsilon}, &&\frac{1}{\sin\theta_0}\frac{\partial C}{\partial\varphi}=-\frac{\cos B}{\sin\varepsilon}
\end{aligned}
\right\}
\tag{7.36}
$$

$$
\frac{\sin B}{\sin\theta}=\frac{\sin C}{\sin\theta_0}=\frac{\sin(\varphi-\varphi_0)}{\sin\varepsilon}
\tag{7.37}
$$

及

$$
\left.
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial\theta_0}P_l(\cos\varepsilon)=-(\cos B)P_l^1(\cos\varepsilon) \\
&\frac{1}{\sin\theta_0}\frac{\partial}{\partial\varphi_0}P_l(\cos\varepsilon)=(\sin B)P_l^1(\cos\varepsilon) \\
&\left[2\frac{\partial^2}{\partial\theta_0^2}+l(l+1)\right]P_l(\cos\varepsilon)=(\cos 2B)P_l^2(\cos\varepsilon) \\
&\frac{1}{\sin\theta_0}\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta_0\partial\varphi_0}-\cot\theta_0\frac{\partial}{\partial\varphi_0}\right)P_l(\cos\varepsilon)=-\frac{1}{2}(\sin 2B)P_l^2(\cos\varepsilon)
\end{aligned}
\right\}
\tag{7.38}
$$

将它们代入式(7.35)中，可得到下述的比较方便的位移公式

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},t) = {} & \frac{P_0}{4\pi}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{2l+1}{l(l+1)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-\cos\omega_n t)H(t)}{\omega_n^2 I_n^T}y_{1n}(r)\times \\
& \left\{\left[\frac{\mu(r_0)y_{1n}(r_0)}{r_0}\left(q_1\sin C\frac{\partial}{\partial\varepsilon}P_l^2(\cos\varepsilon)-2q_2\frac{\cos C}{\sin\varepsilon}P_l^2(\cos\varepsilon)\right)-\right.\right. \\
& \left. y_{2n}(r_0)\left(q_3\sin C\frac{\partial}{\partial\varepsilon}P_l^1(\cos\varepsilon)-q_4\frac{\cos C}{\sin\varepsilon}P_l^1(\cos\varepsilon)\right)\right]\hat{e}_\theta - \\
& \left[\frac{\mu(r_0)y_{1n}(r_0)}{(r_0)}\left(q_1\cos C\frac{\partial}{\partial\varepsilon}P_l^2(\cos\varepsilon)+2q_2\frac{\sin C}{\sin\varepsilon}P_l^2(\cos\varepsilon)\right)-\right. \\
& \left.\left. y_{2n}(r_0)\left(q_3\cos C\frac{\partial}{\partial\varepsilon}P_l^1(\cos\varepsilon)+q_4\frac{\sin C}{\sin\varepsilon}P_l^1(\cos\varepsilon)\right)\right]\hat{e}_\varphi\right\}
\end{aligned}
\tag{7.39}
$$

式中

$$
q_i(\lambda,\delta,\varphi_s) = p_i(\lambda,\delta,\varphi_s - B),\ i = 1,2,3,4 \tag{7.40}
$$

给出(θ,φ)及(θ_0,φ_0)及ε，就可从式(7.39)计算出位于(r_0,θ_0,φ_0)处的任意剪切位错点源在接收点(r,θ,φ)的扭转型自由振荡波位移。

当点源位于x_3轴上$(\theta_0=\varphi_0=0)$时，$B=\pi-\varphi, C=0, \varepsilon=\theta$，则位移公式为

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},t) = {} & \frac{P_0}{4\pi}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{2l+1}{l(l+1)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-\cos\omega_n t)H(t)}{\omega_n^2 I_n^T}y_{1n}(r)\times \\
& \left\{\left[y_{2n}(r_0)p_4^0P_l^1(\cos\theta)-\frac{2\mu(r_0)y_{1n}(r_0)}{r_0}p_2^0P_l^2(\cos\theta)\right]\frac{\hat{e}_\theta}{\sin\theta}+\right. \\
& \left.\left[y_{2n}(r_0)p_3^0\frac{\partial}{\partial\theta}P_l^1(\cos\theta)-\frac{\mu(r_0)y_{1n}(r_0)}{r_0}p_1^0\frac{\partial}{\partial\theta}P_l^2(\cos\theta)\right]\hat{e}_\varphi\right\}
\end{aligned}
\tag{7.41}
$$

式中$p_i^0(i=1,2,3,4)$即式(7.31)中的p_i，但这里φ^0是接收点相对于断层面走向的方位角，$\varphi^0=\varphi+\varphi_s-\pi$，即$p_i^0$是$p_i$中用$\varphi^0$替代其中的$\varphi_s$。对于三个基本的剪切位错点源，可以给出：情况Ⅰ(垂直走滑断层)：$p_1^0=\cos2\varphi^0, p_2^0=\sin2\varphi^0, p_3^0=p_4^0=p_5=0$；情况Ⅱ(倾滑断层)：$p_3^0=-\cos\varphi^0, p_4^0=-\sin\varphi^0, p_1^0=p_2^0=p_5=0$；情况Ⅲ(45°倾滑断层)：$p_1^0=$

$\frac{1}{2}\sin 2\varphi^0, p_2^0 = -\frac{1}{2}\cos 2\varphi^0, p_3^0 = p_4^0 = 0, p_5 = \frac{1}{2}$。

2. 球型振荡(Spheroidal Oscillations)

此情况取位移形式为

$$\boldsymbol{u} = \sum_{\sigma,m,l} \left[y_1(r)\boldsymbol{P}_{ml}^{\sigma}(\theta,\varphi) + y_3(r)\sqrt{l(l+1)}\boldsymbol{B}_{ml}^{\sigma}(\theta,\varphi) \right] \tag{7.42}$$

且有

$$\left.\begin{aligned} \text{div}\boldsymbol{u} &= \sum_{\sigma,m,l} X(r) Y_{ml}^{\sigma}(\theta,\varphi) \\ \text{curl}\boldsymbol{u} &= \sum_{\sigma,m,l} Z(r)\sqrt{l(l+1)}\boldsymbol{C}_{ml}^{\sigma}(\theta,\varphi) \end{aligned}\right\} \tag{7.43}$$

式中

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}r} + \frac{2}{r}y_1 - \frac{l(l+1)}{r}y_3 \\ Z &= \frac{1}{r}(y_1 - y_3) - \frac{\mathrm{d}y_3}{\mathrm{d}r} \end{aligned}\right\} \tag{7.44}$$

并设扰动重力位

$$\psi = \sum_{\sigma,m,l} y_5(r) Y_{ml}^{\sigma}(\theta,\varphi) \tag{7.45}$$

且

$$\frac{\mathrm{d}g_0}{\mathrm{d}r} + \frac{2}{r}g_0 = 4\pi G\rho_0 \tag{7.46}$$

将位移(7.42)及相关的关系式(7.43)~(7.46)代入运动方程(7.1)中,令方程中的 $\boldsymbol{P}_{ml}$ 与 $\boldsymbol{B}_{ml}$ 的系数为零,可得

$$\left.\begin{aligned} &\mu\left(2\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}r} - \frac{l(l+1)}{r}Z\right) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(\lambda X) + 2\mu\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}r} + \\ &\rho_0\left[\frac{\mathrm{d}y_5}{\mathrm{d}r} - 4\pi G\rho_0 y_1 + g_0\left(X - \frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}r} + \frac{2}{r}y_1\right) + \omega^2 y_1\right] = 0 \\ &(\lambda + 2\mu)\frac{X}{r} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(\mu Z) - \mu\frac{Z}{r} + 2\mu\left(\frac{\mathrm{d}y_3}{\mathrm{d}r} + Z\right) + \\ &\rho_0\left[\frac{1}{r}(y_5 - g_0 y_1) + \omega^2 y_3\right] = 0 \end{aligned}\right\} \tag{7.47}$$

由于$\nabla^2\psi=4\pi G\mathrm{div}(\rho_0\boldsymbol{u})$，可有

$$\frac{\mathrm{d}^2 y_5}{\mathrm{d}r^2}+\frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}y_5}{\mathrm{d}r}-\frac{l(l+1)}{r^2}y_5=4\pi G(\rho_0 X+\dot{\rho}_0 y_1) \tag{7.48}$$

且附加扰动应力矢量为

$$\boldsymbol{e}_r\cdot\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u})=\sum_{\sigma,m,l}[y_2(r)P^{\sigma}_{ml}(\theta,\varphi)+y_4(r)\sqrt{l(l+1)}B^{\sigma}_{ml}(\theta,\varphi)] \tag{7.49}$$

这里

$$\left.\begin{aligned}y_2&=\lambda X+2\mu\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}r}=(\lambda+2\mu)\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}r}+\frac{2\lambda}{r}y_1-\lambda\frac{l(l+1)}{r}y_3\\ y_4&=\mu\left(Z+2\frac{\mathrm{d}y_3}{\mathrm{d}r}\right)=\mu\left[\frac{1}{r}(y_1-y_3)+\frac{\mathrm{d}y_3}{\mathrm{d}r}\right]\end{aligned}\right\} \tag{7.50}$$

在自由表面$(r=a)$上，扰动重力位符合的边条件为

$$\psi=\psi_e,\qquad \dot{\psi}-4\pi G\rho_0 u_r=\dot{\psi}_e \tag{7.51}$$

这里ψ_e是地球外的ψ值。

令

$$\psi_e=\sum_{\sigma,m,l}\psi_{\sigma ml},\quad \psi_{\sigma ml}\propto\frac{1}{r^{l+1}}Y^{\sigma}_{ml}(\theta,\varphi) \tag{7.52}$$

则有

$$\frac{\partial\psi_{\sigma ml}}{\partial r}=-\frac{l+1}{r}\psi_{\sigma ml} \tag{7.53}$$

那么，边条件式(7.51)变为

$$\frac{\mathrm{d}y_5}{\mathrm{d}r}-4\pi G\rho_0 y_1=-\frac{l+1}{r}y_5\qquad(r=a) \tag{7.54}$$

现引入

$$y_6=\frac{\mathrm{d}y_5}{\mathrm{d}r}-4\pi G\rho_0 y_1 \tag{7.55}$$

则在地表所有的边条件为

$$y_2=0,\quad y_4=0,\quad y_6+\frac{l+1}{r}y_5=0\quad(r=a) \tag{7.56}$$

为避免运动方程的运算显含$\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}r}$、$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}r}$及$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}r}$等量，可将式(7.46)至

(7.48)变换成关于 y_1、y_2、y_3、y_4、y_5、y_6 的六个一阶齐次微分方程，即

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}r}=-\frac{2\lambda}{(\lambda+2\mu)r}y_1+\frac{1}{\lambda+2\mu}y_2+\frac{l(l+1)\lambda}{(\lambda+2\mu)r}y_3\\
&\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}r}=\left[-\omega^2\rho_0-4\frac{g_0\rho_0}{r}+\frac{2\mu(3\lambda+2\mu)}{(\lambda+2\mu)r^2}\right]y_1-\\
&\frac{4\mu}{(\lambda+2\mu)r}y_2-\frac{l(l+1)}{r}\left[g_0\rho_0-\frac{2\mu(3\lambda+2\mu)}{(\lambda+2\mu)r}\right]y_3+\\
&\frac{l(l+1)}{r}y_4-\rho_0y_6\\
&\frac{\mathrm{d}y_3}{\mathrm{d}r}=-\frac{1}{r}y_1+\frac{1}{r}y_3+\frac{1}{\mu}y_4\\
&\frac{\mathrm{d}y_4}{\mathrm{d}r}=\left[\frac{g_0\rho_0}{r}-\frac{2\mu(3\lambda+2\mu)}{(\lambda+2\mu)r^2}\right]y_1-\frac{\lambda}{(\lambda+2\mu)r}y_2+\\
&\Big\{-\omega^2\rho_0+[(2l^2+2l-1)\lambda+2(l^2+l-1)\mu]\times\\
&\frac{2\mu}{(\lambda+2\mu)r^2}\Big\}y_3-\frac{3}{r}y_4-\frac{\rho_0}{r}y_5\\
&\frac{\mathrm{d}y_5}{\mathrm{d}r}=4\pi G\rho_0y_1+y_6\\
&\frac{\mathrm{d}y_6}{\mathrm{d}r}=-4\pi\frac{l(l+1)}{r}G\rho_0y_3+\frac{l(l+1)}{r^2}y_5-\frac{2}{r}y_6
\end{aligned}\right\}\tag{7.57}$$

对于液体核，$\mu=0$，$y_2=\lambda X$，$y_4=0$ 及 $y_3=\frac{1}{\omega^2r}\left(g_0y_1-\frac{1}{\rho_0}y_2-y_5\right)$，此时的一阶方程组为

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}r}=-\frac{2}{r}y_1+\frac{1}{\lambda}y_2+\frac{l(l+1)}{r}y_3\\
&\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}r}=-\left(\omega^2\rho_0+\frac{4g_0\rho_0}{r}\right)y_1+\frac{l(l+1)}{r}g_0\rho_0y_3-\rho_0y_6\\
&\frac{\mathrm{d}y_5}{\mathrm{d}r}=4\pi G\rho_0y_1+y_6\\
&\frac{\mathrm{d}y_6}{\mathrm{d}r}=-4\pi\frac{l(l+1)}{r}G\rho_0y_3+\frac{l(l+1)}{r^2}y_5-\frac{2}{r}y_6
\end{aligned}\right\}\tag{7.58}$$

为激发球型振荡并确定振荡的本征频率，与激发扭转振荡情况一样，设在 $r=r_0$，$\theta=0$ 处有一剪切位错源，即在 $r=r_0$ 的球表面上有位移和应力间断，或说震源条件为

$$y_i(r_0+0)-y_i(r_0-0)=-f_i \qquad (i=1,2,3,4) \tag{7.59}$$

但 y_5 与 y_6 通过 r_0 的表面是连续的。经分析可得到

$$\left.\begin{aligned} f_1&=\frac{-U_0\mathrm{d}S}{4\pi r_0^2}(2l+1)p_{ml}^{\sigma} \quad f_3=\frac{-U_0\mathrm{d}S}{4\pi r_0^2}(2l+1)b_{ml}^{\sigma} \\ f_2&=\frac{-\mu U_0\mathrm{d}S}{4\pi r_0^3}(2l+1)p_{ml}^{\sigma} \quad f_4=\frac{-\mu U_0\mathrm{d}S}{4\pi r_0^3}(2l+1)b_{ml}^{\sigma} \end{aligned}\right\} \tag{7.60}$$

设震源时间函数为单位阶梯函数 $H(t)$，求解符合边界条件(7.56)及震源条件(7.59)的方程组(7.57)，可得到任意取向的剪切位错点源(λ,δ,φ_s)产生的位移公式为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},t)&=P_0\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{\infty}\frac{1}{\Omega_{ml}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\cos\omega_n t-1)H(t)}{\omega_n^2 I_n^S}\times \\ &\left\{\frac{1}{2}y_{8n}(r_0)\left[p_2\left(2\frac{\partial^2}{\partial\theta_0^2}+l^2+l\right)+2p_1\frac{1}{\sin\theta_0}\left(\frac{\partial}{\partial\theta_0}-\cot\theta_0\right)\frac{\partial}{\partial\varphi_0}\right]\times\right. \\ &\overset{*}{Y}_{ml}(\theta_0,\varphi_0)+y_{4n}(r_0)\left(p_4\frac{\partial}{\partial\theta_0}+p_3\frac{1}{\sin\theta_0}\frac{\partial}{\partial\varphi_0}\right)\overset{*}{Y}_{ml}(\theta_0,\varphi_0)- \\ &\left.\frac{1}{2}y_{9n}(r_0)p_5\overset{*}{Y}_{ml}(\theta_0,\varphi_0)\right\}\{{}_n\boldsymbol{Q}_{ml}(r)\} \end{aligned} \tag{7.61}$$

这里

$$\left.\begin{aligned} y_{8n}(r_0)&=2\mu(r_0)\frac{y_{3n}(r_0)}{r_0} \\ y_{9n}(r_0)&=2\mu(r_0)\left[2\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r_0}-\frac{1}{r_0}\right)y_{1n}(r_0)+l(l+1)\frac{y_{3n}(r_0)}{r_0}\right] \\ {}_n\boldsymbol{Q}_{ml}(r)&=y_{1n}(r)\boldsymbol{P}_{ml}(\theta,\varphi)+y_{3n}(r)\sqrt{l(l+1)}\boldsymbol{B}_{ml}(\theta,\varphi) \\ I_n^S&=\int_0^a[y_{1n}^2+l(l+1)y_{3n}^2]\rho_0 r^2\mathrm{d}r \end{aligned}\right\} \tag{7.62}$$

$p_i(i=1,2,3,4,5)$见式(7.31)。

引入震中距 ε 及 $P_l(\cos\varepsilon)$ 可得

$$
\left.
\begin{aligned}
u_r(r,t) &= \frac{P_0}{8\pi}(-q_2Q_1 + 2q_4Q_5 + p_5Q_4) \\
u_\theta(r,t) &= \frac{P_0}{8\pi}[2(q_1Q_3 - q_3Q_8)\sin C + \\
&\quad (-q_2Q_2 + 2q_4Q_7 + p_5Q_5)\cos C] \\
u_\varphi(r,t) &= \frac{P_0}{8\pi}[(-q_2Q_2 + 2q_4Q_7 + p_5Q_5)\sin C - \\
&\quad 2(q_1Q_3 - q_3Q_8)\cos C]
\end{aligned}
\right\} \tag{7.63}
$$

式中

$$
\left.
\begin{aligned}
Q_1 &= \sum_{l=2}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(2l+1)\left[\frac{(1-\cos\omega t)H(t)}{\omega^2 I^S}y_8(r_0)y_1(r)\right]_{\omega_n}P_l^2(\cos\varepsilon) \\
Q_2 &= \sum_{l=2}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(2l+1)\left[\frac{(1-\cos\omega t)H(t)}{\omega^2 I^S}y_8(r_0)y_3(r)\right]_{\omega_n}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}P_l^2(\cos\varepsilon) \\
Q_3 &= \sum_{l=2}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(2l+1)\left[\frac{(1-\cos\omega t)H(t)}{\omega^2 I^S}y_8(r_0)y_3(r)\right]_{\omega_n}\frac{1}{\sin\varepsilon}P_l^2(\cos\varepsilon) \\
Q_4 &= \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(2l+1)\left[\frac{(1-\cos\omega t)H(t)}{\omega^2 I^S}y_9(r_0)y_1(r)\right]_{\omega_n}P_l(\cos\varepsilon) \\
Q_5 &= \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(2l+1)\left[\frac{(1-\cos\omega t)H(t)}{\omega^2 I^S}y_9(r_0)y_3(r)\right]_{\omega_n}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}P_l(\cos\varepsilon) \\
Q_6 &= \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(2l+1)\left[\frac{(1-\cos\omega t)H(t)}{\omega^2 I^S}y_4(r_0)y_1(r)\right]_{\omega_n}P_l^1(\cos\varepsilon) \\
Q_7 &= \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(2l+1)\left[\frac{(1-\cos\omega t)H(t)}{\omega^2 I^S}y_4(r_0)y_3(r)\right]_{\omega_n}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}P_l^1(\cos\varepsilon) \\
Q_8 &= \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(2l+1)\left[\frac{(1-\cos\omega t)H(t)}{\omega^2 I^S}y_4(r_0)y_3(r)\right]_{\omega_n}\frac{1}{\sin\varepsilon}P_l^1(\cos\varepsilon) \\
Q_9 &= \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(2l+1)\left[\frac{(1-\cos\omega t)H(t)}{\omega^2 I^S}y_2(r_0)y_3(r)\right]_{\omega_n}P_l(\cos\varepsilon)
\end{aligned}
\right\} \tag{7.64}
$$

$q_i(i=1,2,3,4)$见式(7.40)。

当源位于 x_3 轴时，$C=0$ 及 $\varepsilon=\theta$，则有

$$\left.\begin{aligned}u_r(\boldsymbol{r},t) &= \frac{P_0}{8\pi}(-p_2^0Q_1+2p_4^0Q_6+p_5Q_4)\\u_\theta(\boldsymbol{r},t) &= \frac{P_0}{8\pi}(\quad p_2^0Q_2+2p_4^0Q_7+p_5Q_5)\\u_\varphi(\boldsymbol{r},t) &= \frac{P_0}{4\pi}(-p_1^0Q_3+p_3^0Q_8)\end{aligned}\right\}\tag{7.65}$$

应该注意到，当考虑到地球的自转时，给定的本征频率${}_n\omega_l$分裂成$(2l+1)$条线谱，称为自由振荡波的分裂。这是由于在这种情况下，出现离心力及科里奥利力(Coriolis force)，要求运动方程还应加上这两个外力的作用。此时本征频率${}_n\omega_l$与m有关，写成${}_n\omega_l^m$，由$\Delta\omega={}_n\omega_l^m-{}_n\omega_l$可看出谱分裂状况。对于扭转振荡，它依赖于$m$及$[l(l+1)]^{-1}$，而与地球模型结构无关。对于球型振荡，则还与模型结构有关。另外，由于地球的缓慢自转，不仅使谱线分裂，还会改变质点的振荡方式，导致扭转振荡与球型振荡耦合。同时，地球的椭率及粘滞性也会引起谱线分裂。这类研究统称为地球光谱学(The terrestrial spectroscopy)。

§2 能量积分与偏微商值

令自由振荡波的位移为

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{q}(\boldsymbol{r})\cos\omega t\tag{7.66}$$

则其在时刻t的动能为

$$K(t)=\frac{1}{2}\omega^2\sin^2\omega t\int_V\rho_0(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{q}^*)\mathrm{d}V\tag{7.67}$$

一个周期内的动能平均值为

$$K=\frac{1}{T}\int_0^T K(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{4}\omega^2\int_V\rho_0(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{q}^*)\mathrm{d}V\tag{7.68}$$

对于扭转振荡

$$\boldsymbol{q}(\boldsymbol{r})={}_nW_l(r)\sqrt{l(l+1)}\boldsymbol{C}_{ml}(\vartheta,\varphi)\tag{7.69}$$

则平均动能为

$$K = \pi \frac{l(l+1)}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} ({}_nW_l^m)^2 ({}_nI_l^T) \tag{7.70}$$

对于球型振荡

$$\boldsymbol{q}(\boldsymbol{r}) = {}_nU_l(r)\boldsymbol{P}_{lm}(\theta,\varphi) + {}_nV_l(r)\sqrt{l(l+1)}\boldsymbol{B}_{ml}(\theta,\varphi) \tag{7.71}$$

则平均动能为

$$K = \frac{\pi}{2l+1} \frac{(l-m)!}{(l-m)!} ({}_nW_l^m)^2 ({}_nI_l^S) \tag{7.72}$$

这里${}_nI_l^T$与${}_nI_l^S$是能量积分值,分别为

$$\left.\begin{aligned} {}_nI_l^T &= \int_0^a \rho_0(r)\, {}_nW_l^2 r^2 \mathrm{d}r \\ {}_nI_l^S &= \int_0^a \rho_0(r)[{}_nU_l^2 + l(l+1)\, {}_nV_l^2] r^2 \mathrm{d}r \end{aligned}\right\} \tag{7.73}$$

在时刻t的形变引起的位能为

$$W(t) = \frac{1}{2}\cos^2\omega t \int_V [\lambda|\mathrm{div}\boldsymbol{q}|^2 + 2\mu(\boldsymbol{\sigma}\cdot\dot{\boldsymbol{\sigma}})]\mathrm{d}V \tag{7.74}$$

一个周期内的位能平均值为

$$W = \frac{1}{T}\int_0^T W(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\int_V [\lambda|\mathrm{div}\boldsymbol{q}|^2 + 2\mu(\boldsymbol{\sigma}\cdot\dot{\boldsymbol{\sigma}})]\mathrm{d}V \tag{7.75}$$

经过计算可得出,对于扭转振荡,平均位能为

$$W = \pi \frac{l(l+1)}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \int_0^a \mu(r)\left[r^2\left(\frac{\mathrm{d}\,{}_nW_l}{\mathrm{d}r}\right)^2 - 2r({}_nW_l)\frac{\mathrm{d}\,{}_nW_l}{\mathrm{d}r} + (l^2+l-1)({}_nW_l^2)\right]\mathrm{d}r \tag{7.76}$$

对于球型振荡,平均位能为

$$W = \frac{\pi}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \int_0^a \Big\{(\lambda+2\mu)\left[r\frac{\mathrm{d}\,{}_nV_l}{\mathrm{d}r} + 2({}_nU_l) - l(l+1)({}_nV_l)\right]^2 + l(l+1)\mu\left[\left(r\frac{\mathrm{d}\,{}_nV_l}{\mathrm{d}r} - {}_nV_l + {}_nU_l\right)^2 + 4({}_nV_l)\left({}_nU_l + r\frac{\mathrm{d}\,{}_nU_l}{\mathrm{d}r}\right) - 2({}_nV_l^2)\right] - 4\mu({}_nV_l)\left({}_nU_l + 2r\frac{\mathrm{d}\,{}_nU_l}{\mathrm{d}r}\right)\Big\}\mathrm{d}r \tag{7.77}$$

当然，对于球型振荡，还有重力位的影响，但通过计算可知，对于 $l>7$ 的球型振荡，重力位能值可忽略不计。

运用 Hamilton 原理，对平均 Lagrange 能量密度取稳定值可得到能量守恒关系。对于扭转振荡，有

$$\omega^2 I_1^T = I_2^T + l(l-1)I_3^T \tag{7.78}$$

式中

$$\left.\begin{aligned} I_1^T &= \int_0^a \rho W_l^2 r^2 \mathrm{d}r \\ I_2^T &= \int_0^a \mu\left[-W_l^2 - 2rW_l\frac{\mathrm{d}W_l}{\mathrm{d}r} + r^2\left(\frac{\mathrm{d}W_l}{\mathrm{d}r}\right)^2\right]\mathrm{d}r \\ I_3^T &= \int_0^a \mu W_l^2 \mathrm{d}r \end{aligned}\right\} \tag{7.79}$$

对式(7.78)运用瑞利原理(第六章§1)，可得

$$2\omega(\delta\omega)I_1^T + \omega^2(\delta I_1^T) = \delta I_2^T + l(l+1)(\delta I_3^T) \tag{7.80}$$

当密度 ρ 在区间$(r-\varepsilon, r+\varepsilon)$($\varepsilon$ 为小数)中扰动时，运用式(7.78)及(7.80)可得到相速度的偏微商值：

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{c}\left(\frac{\partial c}{\partial \rho}\right)_\mu = -\frac{1}{2I_1^T}\int_{r-\varepsilon}^{r+\varepsilon} r^2 W_l^2 \mathrm{d}r \\ \text{或}\quad &-\frac{\rho}{c}\left(\frac{\partial c}{\partial \rho}\right)_\mu = \frac{1}{2I_1^T}\int_{r-\varepsilon}^{r-\varepsilon} \rho r^2 W_l^2 \mathrm{d}r \end{aligned}\right\} \tag{7.81}$$

等式右边表示密度扰动引起的动能与整个系统的总动能之比值。同理可得

$$\frac{\mu}{c}\left(\frac{\partial c}{\partial \mu}\right)_\rho = \frac{1}{2\omega^2 I_1^T}\int_{r-\varepsilon}^{r+\varepsilon}\mu\left[-W_l^2 - 2rW_l\frac{\mathrm{d}W_l}{\mathrm{d}r} + r^2\left(\frac{\mathrm{d}W_l}{\mathrm{d}r}\right)^2 - l(l+1)W_l^2\right]\mathrm{d}r \tag{7.82}$$

这是扰动位能在总能量中的分配公式。

对于球型振荡，在略去重力扰动位能的情况下，能量守恒关系有

$$\omega^2[I_1^S + l(l+1)]I_2^S = I_3^S + I_5^S + l(l+1)(I_7^S - 2I_4^S) + [l(l+1)]^2(I_5^S + 2I_8^S) \tag{7.83}$$

式中

$$
\left.\begin{aligned}
&I_1^S = \int_0^a \rho U_l^2 r^2 \mathrm{d}r, \quad I_2^S = \int_0^a \rho V_l^2 r^2 \mathrm{d}r \\
&I_3^S = \int_0^a \lambda\left(2U_l + r\frac{\mathrm{d}U_l}{\mathrm{d}r}\right)^2 \mathrm{d}r, \quad I_4^S = \int_0^a \lambda\left(2U_l - \frac{\mathrm{d}U_l}{\mathrm{d}r}\right) V_l \mathrm{d}r \\
&I_5^S = \int_0^a \lambda V_l^2 \mathrm{d}r, \quad I_6^S = 2\int_0^a \mu\left[2U_l^2 + r^2\left(\frac{\mathrm{d}U_l}{\mathrm{d}r}\right)^2\right]\mathrm{d}r \\
&I_7^S = \int_0^a \mu\left[U_l^2 - V_l^2 - 6U_lV_l + 2r(U_l - V_l)\frac{\mathrm{d}V_l}{\mathrm{d}r} + \right. \\
&\qquad \left. r^2\left(\frac{\mathrm{d}V_l}{\mathrm{d}r}\right)^2\right]\mathrm{d}r, \quad I_8^S = \int_0^a \mu V_l^2 r^2 \mathrm{d}r
\end{aligned}\right\} \tag{7.84}
$$

运用瑞利原理可得

$$
-\frac{\rho}{c}\left(\frac{\partial c}{\partial \rho}\right)_{\lambda,\mu} = \frac{\int_{r-\varepsilon}^{r-\varepsilon} \rho[U_l^2 + l(l+1)V_l^2]r^2 \mathrm{d}r}{2[I_1^S + l(l+1)I_2^S]} \tag{7.85}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\mu}{c}\left(\frac{\partial c}{\partial \mu}\right)_{\rho,\lambda} = \int_{r-\varepsilon}^{r+\varepsilon} \mu\Big\{ & 2\left[2U_l^2 + r^2\left(\frac{\mathrm{d}U_l}{\mathrm{d}r}\right)^2\right] + l(l+1)\Big[U_l^2 - \\
& V_l^2 - 6U_lV_l + 2r(U_l - V_l)\frac{\mathrm{d}V_l}{\mathrm{d}r} + r^2\left(\frac{\mathrm{d}V_l}{\mathrm{d}r}\right)^2\Big] + \\
& 2[l(l-1)]^2 V_l^2 \Big\}\mathrm{d}r / \{2\omega^2[I_1^S + l(l+1)I_2^S]\}
\end{aligned} \tag{7.86}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\lambda}{c}\left(\frac{\partial c}{\partial \lambda}\right)_{\mu,\rho} = \int_{r-\varepsilon}^{r+\varepsilon} \lambda\Big\{ & \left[2U_l + r\left(\frac{\mathrm{d}U_l}{\mathrm{d}r}\right)^2\right]^2 - 2l(l+1)\left(2U_l + r\frac{\mathrm{d}U_l}{\mathrm{d}r}\right)V_l \\
& + [l(l+1)]^2 V_l^2 \Big\}\{2\omega^2[I_1^S - l(l+1)I_2^S]\}^{-1}\mathrm{d}r
\end{aligned} \tag{7.87}
$$

已知当 l 很大时，$l(l+1) \approx a^2k^2$（见第六章 § 5），这里 a 为地球平均半径，k 为波数。再运用瑞利原理，可得到用能量积分表示的群速度值

$$
\left.\begin{aligned}
c_L U_L &= c_L\left(\frac{d\omega}{dk}\right)_L = a^2\left(\frac{I_3^T}{I_1^T}\right) \\
c_R U_R &= \frac{a^2[I_7^S - 2I_4^S + 2l(l+1)(I_5^S + 2I_8^S) - \omega^2 I_2^S]}{I_1^S + l(l+1)I_2^S}
\end{aligned}\right\}
\tag{7.88}
$$

§3 震源时间函数的影响

自由振荡的谱振幅依赖于震源的时间函数，前面我们是假设它为单位阶跃函数，因而在位移表达式中有因子 $(1-\cos\omega_n t)/\omega_n^2$，例如式(7.30)。一般情况下，设震源时间函数为 $g(t)$，则相应的因子应为

$$\bar{g}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(\omega)}{\omega_n^2-\omega^2}e^{i\omega t}d\omega \tag{7.89}$$

式中 $g(\omega)$ 是 $g(t)$ 的 Fourier 变换：

$$g(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-i\omega t}d\omega \tag{7.90}$$

$\bar{g}(t)$ 称为震源函数的影响因子。又由于 $(\omega_n^2-\omega^2)^{-1}$ 是 $\omega_n^{-1}\sin(\omega_n t)\ddot{H}(t)$ 的 Fourier 变换值，故 $\bar{g}(t)$ 可写成卷积形式：

$$
\begin{aligned}
\bar{g}(t) &= \frac{1}{\omega_n}\int_0^t \sin(\omega_n T)g(t-T)dT \\
&= \frac{1}{\omega_n}\int_0^t \sin\omega_n(t-T)g(T)dT
\end{aligned}
\tag{7.91}
$$

式中，当 $t<0$ 时，$g(t)=0$。

表 7.1 给出 6 种震源时间函数所相应的 $\bar{g}(t)$。

§4 简正振型——射线二重性

在非旋转的球地球介质中，震源激发的自由振荡波的位移为关于 l（余纬振型数）和 n（径向数）的驻波的无穷项的双重和，称为简正

表 7.1　6 种震源时间函数及相应的 $g(t)$

函数名称	$g(t)$	$g(\omega)$	$\tilde{g}(t)$
阶跃函数 (Step function)	$H(t)$	$\frac{1}{i\omega}$	$\frac{1-\cos\omega_n t}{\omega_n^2}\quad(t>0)$
门函数 (Gate function)	$\frac{1}{2t_1}[H(t+t_1)-H(t-t_1)]$	$\frac{\sin\omega t_1}{\omega t_1}$	$\left(\frac{\sin\omega_n t_1}{\omega t_1}\right)\frac{1}{\omega_n}\sin\omega_n t$
δ 函数 (Detla function)	$\delta(t)$	1	$\frac{1}{\omega_n}\sin\omega_n t$
指数上升函数 (Exponential buildup function)	$H(t)(1-e^{-t/\tau}),\tau>0$	$\frac{1}{i\omega(1+i\omega\tau)}$	$\frac{1}{\omega_n^2}[1-\cos\varepsilon\cos(\omega_n t-\varepsilon)(\sin^2\varepsilon)\, e^{-t/\tau}], t>0, \tan\varepsilon=\omega_n\tau$
斜坡函数 Ramp function	$R(t,\tau)=\begin{cases}0 & t<0\\ \frac{t}{\tau} & 0\leqslant t\leqslant\tau\\ 1 & t>\tau\end{cases}$	$\frac{1}{i\omega}f(\omega)e^{-\frac{i\omega\tau}{2}}$ $\left[f(\omega)=\frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2}\right]$	$\frac{1}{\omega_n^2}\left(\frac{t}{\tau}\right)\left(1-\frac{\sin\omega_n t}{\omega_n t}\right), 0<t<\tau$ $\frac{1}{\omega_n^2}\left[1-f(\omega_n)\cos\omega_n\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right], t>\tau$
半 sine 函数 (Half-sine function)	$H_s(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ \frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{\pi t}{\tau}\right) & 0\leqslant t\leqslant\tau\\ 1 & t>\tau\end{cases}$	$\frac{1}{i\omega}f(\omega)e^{-\frac{i\omega\tau}{2}}$ $\left[f(\omega)=\frac{\cos(\omega\tau/2)}{1-(\omega\tau/\pi)^2}\right]$	$\frac{1}{\omega_n^2}\times\left[1-\frac{\cos^2(\omega_n t/2)-(\omega_n t/\pi)^2\cos^2(\pi t/2\tau)}{1-(\omega_n t/\pi^2)}\right]$ $0<t<\tau$ $\frac{1}{\omega_n^2}\left[1-f(\omega_n)\cos\omega_n\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right], t>\tau$

振型解。当 l 和 n 很大时，位移的简正振型可以用波沿射线的走时来描述。

径向非均匀介质中，波沿射线的走时为

$$T = p\theta + 2\int_{r_m}^{r_a}\left(\frac{r^2}{v^2} - p^2\right)^{1/2}\frac{\mathrm{d}r}{r} \qquad (7.92)$$

式中，θ 为震中距，r_m 为射线顶点半径，p 为射线参数，有

$$p = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}\theta} = \frac{r\sin i}{v} = \frac{r_m}{v_m} = \frac{a\sin i_0}{v_0} = \frac{a}{c_a} \qquad (7.93)$$

这里 $c_a = \dfrac{v_0}{\sin i_0}$ 是视速度，i_0 为射线在地表的入射角。

当 l 很大时（$l>7$），可用琼斯公式（Jean's formula）将 p（所谓射线描述）与 l（所谓简正振型）联系起来，即

$$p = \frac{a}{c} = \left(l + \frac{1}{2}\right) / {}_n\omega_l \qquad (7.94)$$

这里 $c = c_a = c({}_n\omega_l)$

显然有 $l + \dfrac{1}{2} = \left(\dfrac{{}_n\omega_l a}{v_0}\right)\sin i_0$ 及 $l \gg m$，那么，要使射线描述与振型描述相一致，必须满足条件：

$$\frac{{}_n\omega_l a}{v_0} > l + \frac{1}{2} \gg m \qquad (7.95)$$

公式(7.94)及条件(7.95)可将球地球介质中位移的射线描述与振型描述统一起来，这称为自由振荡波的二重性(Mode－Ray Duality)。推广之，在高频情况下，地震波都具有这种二重性。研究它，更便于我们将理论地震图与观测的实际位移资料的对比分析，从而更深入理解波的运动学特征与动力学特征的内在联系。

我们已熟知，径向非均匀球地球介质的扭转振荡的运动方程为

$$\mu\left(\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}r^2} + \frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\right) + \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}r}\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} - \frac{V}{r}\right) + \left({}_n\omega_l^2\rho - \frac{l(l+1)\mu}{r^2}\right)V = 0 \qquad (7.96)$$

令 $y_1 = V$，$y_2 = \mu\left(\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} - \dfrac{V}{r}\right)$，则式(7.96)可变换为关于 y_1、y_2 的一阶

方程组

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}r} &= \frac{y_1}{r} + \frac{y_2}{\mu}\\ \frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}r} &= \left[(l-1)(l+2)\frac{\mu}{r^2} - {}_n\omega_l^2\rho\right]y_1 - \frac{3y_2}{r}\end{aligned}\right\} \tag{7.97}$$

它所符合的边界条件为：在地表($r=a$)及核幔边界面($r=b$)上，

$$y_2 = 0 \tag{7.98}$$

作参数变换，令 $V(r)=y_1-rK(r)$，$y_2=r^{-3}L(r)$，$h_l^2=(l-1)(l+2)=\left(l+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}$，则式(7.96)可变为 Sturm-Liouville 形式：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\mu r^4\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}r}\right) + ({}_n\omega_l^2\rho r^4 - h_l^2\mu r^2)K = 0 \tag{7.99}$$

或等效为

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}r} &= \frac{L}{\mu r^4}\\ \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}r} &= (h_l^2\mu r^2 - {}_n\omega_l^2\rho r^4)K\end{aligned}\right\} \tag{7.100}$$

为方便，再引入量纲为一的参数

$$\left.\begin{aligned}&x = \frac{r}{a},\ \rho(r) = \rho_0\varepsilon(x),\ \mu(r) = \mu_0\tau(x)\\ &\beta(r) = \beta_0c(x),\ c^2(x) = \tau(x)/\varepsilon(x)\\ &L(r) = a^3\mu_0M(x),\ {}_ns_l = \frac{{}_n\omega_l a}{\beta_0},\ \beta_0^2 = \frac{\mu_0}{\rho_0}\end{aligned}\right\} \tag{7.101}$$

则方程(7.99)与(7.100)又可分别变为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\tau x^4\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}x}\right) + ({}_ns_l^2\varepsilon x^4 - h_l^2\tau x^2)K = 0 \tag{7.102}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}x} &= \frac{M}{\tau x^4}\\ \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x} &= (h_l^2\tau x^2 - {}_ns_l^2\varepsilon x^4)K\end{aligned}\right\} \tag{7.103}$$

边界条件(7.98)变为在 $x=b/a$ 及 $x=1$ 处有

$$M = 0 \tag{7.104}$$

为了用射线描述，令

$$
\left.
\begin{aligned}
{}_np_l &= \frac{h_l}{{}_ns_l} \\
\text{及}\quad y(x) &= \int_{x_m}^{x} \frac{\mathrm{d}x}{x^4\tau(x)}
\end{aligned}
\right\}
\tag{7.105}
$$

式中 $x_m = {}_mp_l c(x_m)$，这样，式(7.102)变为

$$
\frac{\mathrm{d}^2K}{\mathrm{d}y^2} \pm Q^2K = 0 \tag{7.106}
$$

式中

$$
Q = {}_ns_\lambda \varepsilon c x^3
\begin{cases}
(x^2 - {}_np_l^2c^2)^{1/2} & \dfrac{x}{c} > {}_np_l \quad (7.107) \\
({}_np_l^2c^2 - x^2)^{1/2} & \dfrac{x}{c} < {}_np_l \quad (7.108)
\end{cases}
$$

当 $\frac{x}{c} > {}_np_l$ 时，式(7.106)用“+”；当 $\frac{x}{c} < {}_np_l$ 时，式(7.106)用“－”。为明确，再引入

$$
z = \int_{y_m}^{y} Q\mathrm{d}y = \int_{x_m}^{x} Q\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = {}_ns_l\int_{x_m}^{x} \frac{1}{xc}(x^2 - {}_np_l^2c^2)^{1/2}\mathrm{d}x \tag{7.109}
$$

则方程(7.106)变为

$$
\frac{\mathrm{d}^2G(z)}{\mathrm{d}z^2} + \left(1 + \frac{5}{36z^2}\right)G(z) = \frac{AG(z)}{{}_ns_l^{4/3}\,z^{2/3}} + O(G(z)\,{}_ns_l^{-2}) \tag{7.110}
$$

式中

$$
G(z) = K(x)\sqrt{Q(x)} \tag{7.111}
$$

A 是与 ${}_ns_l$ 无关的常数。

当 ${}_ns_l \gg 1$ 时，方程右边的项可略去，故方程可写成

$$
\frac{\mathrm{d}^2G(z)}{\mathrm{d}z^2} + \left(1 + \frac{5}{36z^2}\right)G(z) = 0 \tag{7.112}
$$

其解为

$$G=\begin{cases}\sqrt{z}\,(J_{1/3}(z)+J_{-1/3}(z)) & \dfrac{x}{c}>{}_n p_l \quad (7.113)\\ \sqrt{\dfrac{3v}{\pi}}K_{1/3}(v) & \dfrac{x}{c}<{}_n p_l \quad (7.114)\end{cases}$$

这里

$$v={}_n s_l\int_x^{x_m}\frac{1}{xc}({}_n p_l^2c^2-x^2)^{1/2}\mathrm{d}x \tag{7.115}$$

可看出,$x>x_m$ 为振荡解,$x<x_m$ 为指数衰减解。

现在要写出近似方程(7.112)所符合的边界条件。当 v 很大时,在式(7.114)中有 $G=\left(\dfrac{3}{2\pi}\right)^{1/2}\mathrm{e}^{-v}$,则在 $x=\dfrac{b}{a}$ 处边条件(7.104)可满足。而当 $x=1$ 时,此边条件化为

$$\frac{1}{K}\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{G}\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}z}({}_n s_l)(1-{}_n p_l^2)^{1/2}-\frac{1}{2Q}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x}=0 \tag{7.116}$$

设在地表的 μ 与 β 为常量,则从式(7.107)可得

$$\frac{1}{Q}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x}=3+\frac{1}{1-{}_n p_l^2}\quad(x=1) \tag{7.117}$$

而当${}_n s_l$ 很大时,式(7.116)的根接近于方程

$$\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}z}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\{\sqrt{z}[(J_{1/3}(z)+J_{-1/3}(z)]\}=0 \tag{7.118}$$

的根。利用式(7.118),作

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{1}{G}\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}z}\right)=\frac{1}{G}\left(\frac{\mathrm{d}^2G}{\mathrm{d}z^2}\right)-\left(\frac{1}{G}\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}z}\right)^2\approx\frac{1}{G}\frac{\mathrm{d}^2G}{\mathrm{d}z^2}$$

并代入式(7.112),可有

$$\frac{1}{G}\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}z}\approx-\left(1+\frac{5}{36z_n^2}\right)(z-z_n) \tag{7.119}$$

将式(7.117)与(7.119)代入式(7.116),并利用式(7.109),可得

$${}_n z_l={}_n s_l\int_{x_m}^1\frac{1}{xc}(x^2-{}_n p_l^2c^2)^{1/2}\mathrm{d}x=z_n-{}_n\delta_l \tag{7.120}$$

这里

$$ {}_n\delta_l = \frac{3(1 - {}_n p_l^2)^{1/2} + (1 - {}_n p_l^2)^{-3/2}}{2({}_n s_l)\left(1 + \frac{5}{36 z_n^2}\right)} \tag{7.121} $$

再用式(7.101),可知式(7.120)式表示

$$ {}_n\omega_l \int_{r_m}^{a} \left[\frac{r^2}{\beta^2(r)} - \frac{(l-1)(l+2)}{{}_n\omega_l^2}\right]^{1/2} \frac{\mathrm{d}r}{r} = z_n - {}_n\delta_l \tag{7.122} $$

式中,$r_m = a x_m = \beta(r_m) h_l / {}_n\omega_l = \beta(r_m)[(l-1)(l+2)]^{1/2}({}_n\omega_l^{-1})$。式(7.122)称为相积分关系式(The Phase integral relation)。它还可以简化,因当${}_n s_l \gg 1$ 时 $z \gg 1$,故方程(7.112)变成$\frac{\mathrm{d}^2 G}{\mathrm{d}z^2} + G = 0$,其解 $G \propto \sin\left(\frac{\pi}{4} + z\right)$。此时的边条件$\left(\frac{1}{G}\right)\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}z} = 0$ 导致 $\cot\left(\frac{\pi}{4} + z\right) = 0$,因而 $z_n \approx \frac{\pi}{4} + n\pi, n = 0,1,2,\cdots$ 及${}_n\delta_l \approx 0$。所以式(7.122)可写成

$$ \int_{r_m}^{a} \frac{\mathrm{d}r}{r} \sqrt{\frac{r^2}{\beta^2(r)} - \frac{(l-1)(l+2)}{{}_n\omega_l^2}} = \frac{\pi\left(n + \frac{1}{4}\right)}{{}_n\omega_l} \tag{7.123} $$

将式(7.123)代入式(7.92),并注意到当 l 很大时,$(l-1)(l+2) \approx \left(l + \frac{1}{2}\right)^2$ 及式(7.94)成立,可将式(7.123)写成

$$ t_S - \Delta \frac{\mathrm{d}t_S}{\mathrm{d}\Delta} = \left(n + \frac{1}{4}\right)({}_n T_l) \tag{7.124} $$

式中,t_S 是直达 S 波沿射线的走时,${}_n T_l$ 是扭转振荡的本征周期。式(7.124)为体现波动-射线二重性的直观而实用的式子。

举个例子。在均匀球体中,简正振型解的基本项为球谐本征函数

$$ \Phi_{ml} = h_l^{(2)}({}_n k_l a) P_l^m(\cos\theta) \mathrm{e}^{\mathrm{i}({}_n\omega_l)t}, \qquad {}_n k_l = \frac{{}_n\omega_l}{v_0} \tag{7.125} $$

若用行波解释,则有 $\Phi_{ml} = \Phi_{ml}^{(1)} + \Phi_{ml}^{(2)}$,这里

$$ \Phi_{ml}^{(1,2)} = h_l^{(2)}({}_n k_l a)\left[P_l^m(\cos\theta) \pm \frac{2\mathrm{i}}{\pi} Q_l^m(\cos\theta)\right] \mathrm{e}^{\mathrm{i}({}_n\omega_l)t} \tag{7.126} $$

对于${}_n k_l a > l + \frac{1}{2} \gg m > 1$,用 $h_l^{(2)}$ 及 $P_l^m + \frac{2\mathrm{i}}{\pi} Q_l^m$ 的渐近值,可知 $\Phi_{ml}^{(1)}$的

近似值为

$$\Phi_{ml}^{(1)}=\left(\frac{2}{\pi\sin\theta\cos\tau}\right)^{1/2}\frac{l^{m-1/2}}{{}_nk_la}\exp\left[\mathrm{i}\left({}_n\omega_lt-{}_nk_lD-\frac{(m+1)\pi}{2}\right)\right] \tag{7.127}$$

式中，$D=a[\cos\tau-(\alpha-\theta)\sin\tau]$，$\sin\tau=\left(l+\frac{1}{2}\right)/({}_nk_la)$，$\alpha=\frac{\pi}{2}-\tau$。式中的 D 及 τ 有一个几何射线解释，如图 7.2 所示。

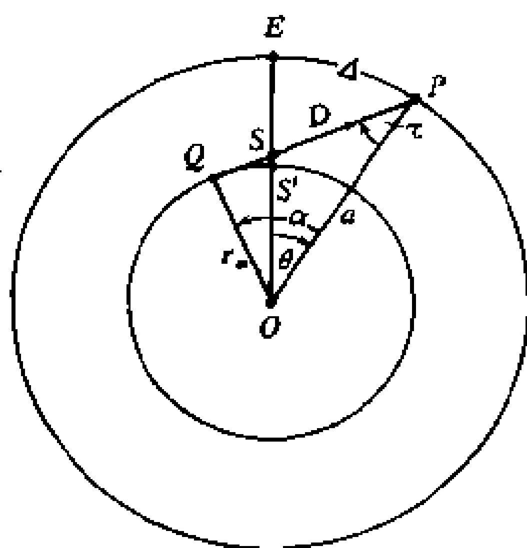


图 7.2　球形波的射线解释

图 7.2 中 D 为射线路径（震源距），τ 为射线入射角 i_0，图中的球心为 O 点，联 $\overline{OP}=a$，作 $\overline{OQ}\perp\overline{QP}$，$Q$ 在 $\overline{SP}$ 延长线上，$\overline{OQ}=r_m$，S 为震源，P 点为观测点。从图上可看出，$r_m=a\sin\tau$，$\overline{SP}=\overline{QP}-\overline{QS}\approx\overline{QP}-\overline{QS'}=\overline{QP}-(\alpha-\theta)r_m=a[\cos\tau-(\alpha-\theta)\sin\tau]=D$，因而式(7.127)中 ${}_nk_lD$ 为行波相位。同时，按琼斯公式 $r_m=\left(l+\frac{1}{2}\right)/{}_nk_l$，给定 l 及 ${}_nk_l$ $\left({}_nk_l=\frac{{}_n\omega_l}{v_0}\right)$，在球表面可出现三种可能的情况：

(1) $l+\frac{1}{2}<{}_nk_la$，此时 $r_m<a$，存在实射线，如图 7.2 示。

(2) $l+\frac{1}{2}>{}_nk_la$，此时，$r_m>a$，无实射线。

(3) $l+\frac{1}{2}={}_nk_la$，此时，$r_m=a$，射线的包络为球面（焦散情况）。

§5 谱位移场的 Watson 变换积分式与二阶常微分方程的 WKBJ 渐近解

当 l 很大时，按振型-射线二重性，使波动方程及本征函数都有射线近似值，称为简正振型的渐近解。为得到渐近解，本节讨论两个有关的运算方法及相应方程的解。

在径向非均匀介质中，自由振荡的谱位移表达式中都含有一个无穷级数

$$\sum_{l=m}^{\infty}(2l+1)f_lP_l^m(\cos\theta) \tag{7.128}$$

这里 $P_l^m(\cos\theta)$是缔合 legendre 函数。一般说来，它收敛很慢。将它变换为复平面上的积分，借助于留数定理，可将它改变为急速收敛的另一级数形式，从而便于位移场的直观解释。

考虑沿复平面上回路 C_1 的积分（图 7.3a）

$$\int_{C_1}f_{s-1/2}P_{s-1/2}^m(-\cos\theta)\frac{s\mathrm{d}s}{\mathrm{i}\cos s\pi} \tag{7.129}$$

其中 $s=l+\frac{1}{2}\ (l=0,1,2,\cdots)$。回路 C_1（从 $+\infty$ 转至 $+\infty$）包含 $\cos s\pi$ 的 s 个零点，这些零点在实轴上。被积函数在这些零极点 s 的留数为

$$-\frac{(-1)^m}{2\pi\mathrm{i}}(2l+1)f_lP_l^m(\cos\theta) \tag{7.130}$$

运算过程中运用了关系

$$P_l^m(-\cos\theta)=(-1)^{l-m}P_l^m(\cos\theta) \tag{7.131}$$

设 $f_{s-1/2}=\frac{g(s)}{\Delta(s)}$在回路 C_1 内也有实极点 s_j，被积函数在 s_j 处的留数为

$$P_{s_j-1/2}^m(-\cos\theta)\left(\frac{g(s)}{\partial\Delta(s)/\partial s}\right)_{s_j}\frac{s_j}{\mathrm{i}\cos s_j\pi} \tag{7.132}$$

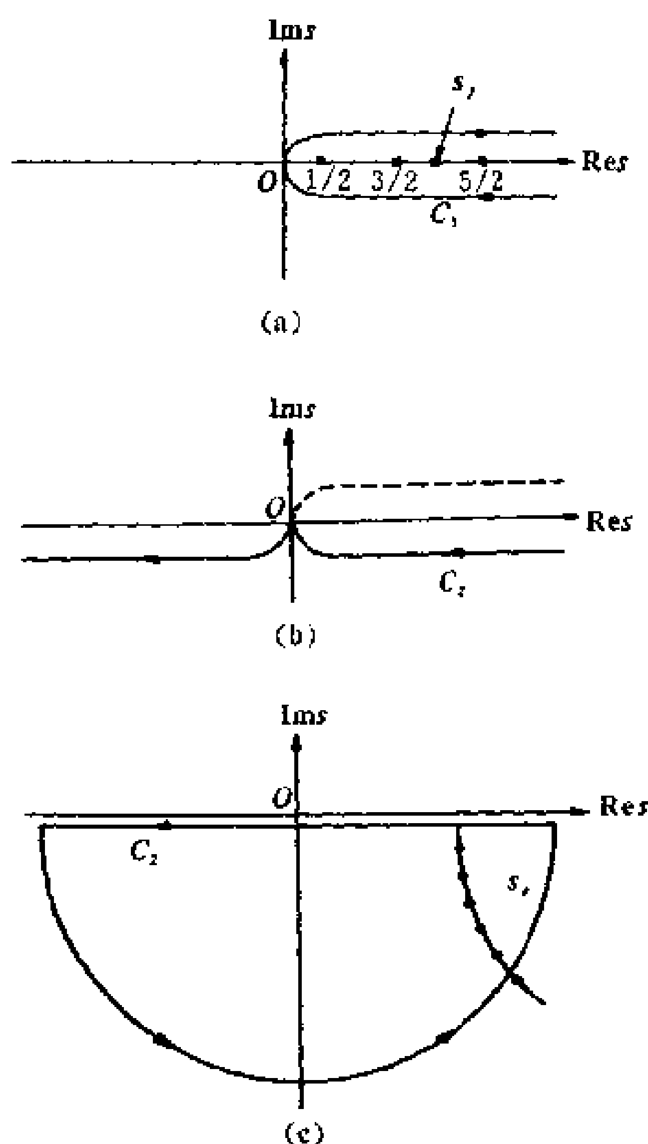


图 7.3　Watson 变换积分回路

对积分式(7.129)运用留数定理，可得

$$\int_{C_1} f_{s-1/2} P^m_{s-1/2}(-\cos\theta)\frac{s\mathrm{d}s}{\mathrm{i}\cos s\pi} = (-1)^m \sum_{l=m}^{\infty}(2l+1)\times$$
$$f_l P_l^m(\cos\theta) - 2\pi\sum_{j=1}^{\infty} P^m_{s_j-1/2}(-\cos\theta)\left(\frac{g(s)}{\partial\Delta(s)/\partial s}\right)_{s_j}\frac{s_j}{\cos s_j\pi} \tag{7.133}$$

由于 $P^m_{s-1/2}=P^m_{-s-1/2}$，并设 $f_{s-1/2}$ 为 s 的偶函数，则被积函数为 s 的奇函数。积为式(7.133)可重写为

$$\sum_{l=m}^{\infty}(2l+1)f_l P_l^m(\cos\theta)=(-1)^m\pi\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(2\nu_j+1)}{\cos\left(\nu_j+\frac{1}{2}\right)\pi}\cdot$$

$$\left(\frac{g(s)}{\partial\Delta(s)/\partial s}\right)_{s_j=\nu_j+1/2}P_{\nu_j}^m(-\cos\theta)+$$

$$(-1)^m\int_{C_1}f_{s-1/2}P_{s-1/2}^m(-\cos\theta)\frac{s\mathrm{d}s}{\mathrm{i}\cos s\pi}\qquad(7.134)$$

式中，$\nu_j=s_j-\frac{1}{2}$，并认为 $\cos s\pi$ 的零点与 s_j 不重合。式(7.134)称为 Watson 变换积分式。

若用 $-s$ 代替 s，则复平面上回路 C_1 的上半部转入实轴的下半部，组成路径 C_2（图 7.3b）。用半圆连下半平面作闭合回路（图 7.3c），可将 Watson 变换式改写为

$$\sum_{l=m}^{\infty}(2l+1)f_l P_l^m(\cos\theta)=(-1)^m\pi\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(2\nu_j+1)}{\cos\left(\nu_j+\frac{1}{2}\right)\pi}\times$$

$$\left(\frac{g(s)}{\partial\Delta(s)/\partial s}\right)_{s=\nu_j+1/2}P_{\nu_j}^m(-\cos\theta)-(-1)^m\times$$

$$\pi\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2\nu_n+1)}{\cos\left(\nu_n+\frac{1}{2}\right)\pi}\left(\frac{g(s)}{\partial\Delta(s)/\partial s}\right)_{s=\nu_n+1/2}P_{\nu_n}^m(-\cos\theta)\ (7.135)$$

式中 $s_n=\nu_n+1/2$ 为 $f_{s-1/2}$ 在下半平面的复数极点（图 7.3c）。可以这样来解释：谱位移表达式(7.128)分为两部分，第一部分是 $f_{s-1/2}$ 的实极点的贡献，它表现为面波；第二部分是 $f_{s-1/2}$ 作为偶函数在 C_2 回路内的复极点的贡献，它表现为散射波，若用鞍点法求位移值，它们就是体波。所以，Watson 变换不仅改善了无穷级数的收敛性，而且还能分析出有明确物理意义的两部分位移场。

Watson 变换式还可扩展。若 $s+m$ 不是整数，但 $f_{s-1/2}$ 仍为 s 的偶函数，将

$$P_s^m(-\cos\theta)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi(s-m)}P_s^m(\cos\theta)+\mathrm{i}\sin(s+m)\pi\cdot$$

$$\left(P_s^m(\cos\theta)+\frac{2\mathrm{i}}{\pi}Q_s^m(\cos\theta)\right)$$

(7.136)

代入式(7.134)积分项中，可得

$$\frac{(-1)^m}{\mathrm{i}}\int_{C_1} s f_{s-1/2} P_{s-1/2}^m(-\cos\theta)\sec(\pi s)\mathrm{d}s = \int_{C_2} s f_{s-1/2} \cdot$$

$$P_{s-1/2}^m(\cos\theta)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}s\pi}\sec(\pi s)\mathrm{d}s - 2\int_{C_2} s f_{s-1/2} E_{s-1/2,m}^{(1)}(\cos\theta)\mathrm{d}s$$

$$(7.137)$$

式中 $E_{s-1/2,m}^{(1,2)}(\cos\theta)=\frac{1}{2}\left[P_{s-1/2}^m(\cos\theta)\pm\frac{2\mathrm{i}}{\pi}Q_{s-1/2}^m(\cos\theta)\right]$。

式(7.137)右边的第一个积分可计算被积函数在下半平面的极点留数值。第二个积分表达为一系列传播的体波，由于 $E_{s-1/2,m}^{(1,2)}$对于负半整数有极点，因而此处被积函数的极点已变至负 s 轴，这在后面的体波位移计算中十分有用。

对于位于 $r=r_h,\theta=0$ 处的垂直走滑断层的位错点源，扭转振荡位移的方位分量为

$$u_\varphi = \frac{U_c\mathrm{d}S}{4\pi a}\cos 2\varphi\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\frac{\partial}{\partial\theta}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)f_l P_l^2(\cos\theta) \qquad (7.138)$$

这里

$$f_l = \frac{1}{l(l+1)}\left[\frac{y_1(l_j r_h)/r_h}{y_2(l_j a)/\mu_h}\right] \qquad (\mu_h = \mu(r_h))$$

径向函数 y_1 符合方程(7.96)，$y_2=\mu\left(\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}r}-\frac{y_1}{r}\right)$。

令

$$y_1 = \left(\frac{\mu_h}{\mu}\right)^{1/2}\frac{F_l(r)}{r} \qquad (7.139)$$

并设 $\mu'/\mu\ll 1,\mu''/\mu\ll 1$，可得关于 $F_l(r)$的方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2F_l(r)}{\mathrm{d}r^2}+\omega^2\left[\frac{1}{v^2}-\frac{l(l+1)}{\omega^2 r^2}\right]F_l(r)=0 \qquad (7.140)$$

式中 $v=\beta(r)$，方程(7.140)的 WKBJ 渐近解为

$$
\left.\begin{aligned}
F_l(r) &= \left[\frac{1}{v^2} - \frac{\left(l+\frac{1}{2}\right)^2}{\omega^2 r^2}\right]^{-1/4} \cdot \\
&\exp\left[\pm \mathrm{i}\omega\int^r \left[1 - \frac{v^2\left(l+\frac{1}{2}\right)^2}{\omega^2 r^2}\right]^{1/2} \frac{\mathrm{d}r}{v}\right], r > r_m \\
F_l(r) &= \left[\frac{\left(l+\frac{1}{2}\right)^2}{\omega^2 r^2} - \frac{1}{v^2}\right]^{-1/4} \cdot \\
&\exp\left[-\omega\int^r \left[\frac{v^2\left(l+\frac{1}{2}\right)^2}{\omega^2 r^2} - 1\right]^{1/2} \frac{\mathrm{d}r}{v}\right], r < r_m
\end{aligned}\right\} \tag{7.141}
$$

r_m 是方程(7.140)的变换点，$r>r_m$ 用于上行波，$r<r_m$ 用于下行波，

$$
r_m = \left(l+\frac{1}{2}\right)\frac{v(r_m)}{\omega}
$$

因

$$
\frac{1}{\mu}y_2(r) \approx \frac{1}{r}\left(\frac{\mu_h}{\mu}\right)^{1/2}\frac{\mathrm{d}F_l}{\mathrm{d}r} \tag{7.142}
$$

可得

$$
\begin{aligned}
f_l(a,r_h;\omega) \approx{}& \frac{1}{l(l+1)(k_0 a)}\left(\frac{\mu_h}{\mu_0}\right)^{1/2}\left(\frac{a}{r_h}\right)^{3/2}\left[1-\frac{\left(l+\frac{1}{2}\right)^2}{k_0^2 a^2}\right]^{-1/4} \cdot \\
&\left[\frac{v_0^2 r_h^2}{v_h^2 a^2} - \frac{\left(l+\frac{1}{2}\right)^2}{k_0^2 a^2}\right]^{-1/4} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau - \mathrm{i}\frac{\pi}{2}}
\end{aligned} \tag{7.143}
$$

式中 $v_0=v(a)$，$\mu_0=\mu(a)$，$k_0=\omega/v_0$，

$$
\tau = \left[\mp\int_{r_m}^{r_h} + \int_{r_m}^{a}\right]\left[\frac{r^2}{v^2} - \frac{\left(l+\frac{1}{2}\right)^2}{\omega^2}\right]^{1/2}\frac{\mathrm{d}r}{r} \tag{7.144}
$$

当 $k_0 a > \left(l+\frac{1}{2}\right)$ 时，运用 Watson 变换式(7.134)，不计算实轴极点贡献，则位移 u_ϵ(式(7.138))中的级数可写成积分形式

$$\sum_{l=1}^{\infty}(2l+1)f_l P_l^2(\cos\theta)=\int_{C_2} f_{s-1/2} P_{s-1/2}^2(\cos\theta)\frac{s\mathrm{d}s}{\mathrm{i}\cos s\pi}$$

(7.145)

积分路径 C_2 如图 7.3b 所示，且 $f_{-s-1/2}=f_{s-1/2}$。

又已知

$$\sec\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\pi\frac{\partial}{\partial\theta}P_\nu^2(-\cos\theta)=\mathrm{i}\left(\frac{2}{\pi\sin\theta}\right)^{1/2}\nu^{5/2}\times$$

$$\sum_{N=0}^{\infty}(-1)^N(-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Lambda_1}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Lambda_2}) \tag{7.146}$$

式中，$\Lambda_1=\left(\nu+\frac{1}{2}\right)(\theta+2\pi N)-\frac{3\pi}{4}$，$\Lambda_2=\left(\nu+\frac{1}{2}\right)[(2\pi-\theta)+2N\pi]+\frac{3}{4}\pi$，($\mathrm{Im}\nu<0,\varepsilon<\theta<\pi-\varepsilon,\varepsilon>0$)。为简单，令 $N=0$（即仅用 $\Lambda_1=\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\theta-\frac{3}{4}\pi$）。将式(7.143)～(7.146)代入式(7.138)(路径 C_2 从 $-\infty$ 到 $+\infty$)可得到

$$u_\varphi(a,r_h;\omega)=-\frac{U_0\mathrm{d}S}{2\pi r_h^2}\left(\frac{\mu_h}{\mu_0}\right)^{1/2}\frac{\cos2\varphi}{(k_0a)(2\pi\sin\theta)^{1/2}}\times$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp\left\{\mathrm{i}\left[\omega(t-\tau)-\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\theta\right]+\frac{\pi}{4}\right\}\nu^{3/2}\mathrm{d}\nu}{[1-\nu(\nu+1)/(k_0a)^2]^{1/4}[(v_0/v_h)^2-\nu(\nu+1)/(k_0r_h)^2]^{1/4}}$$

(7.147)

引入 $\sqrt{\nu(\nu+1)}\approx\nu+\frac{1}{2}=(k_0a)\sin i_0=(k_0r_h)\frac{v_0}{v_h}\sin i_h$，

则又有

$$u_\varphi=-\frac{U_0\mathrm{d}S}{2\pi r_h^2}\left(\frac{\mu_h}{\mu_0}\frac{v_h}{v_0}\right)^{1/2}\frac{\cos2\varphi}{(k_0a)(2\pi\sin\theta)^{1/2}}\times$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp\left\{\mathrm{i}\left[\omega(t-\tau)-\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\theta\right]+\frac{\pi}{4}\right\}}{[\cos i_0(\nu)\cos i_h(\nu)]^{1/2}}\nu^{3/2}\mathrm{d}\nu \tag{7.148}$$

当 ω 很大时，用鞍点法求式中的积分值。已知有

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\chi(\nu)} A(\nu)\mathrm{d}\nu = \left[\frac{2\pi}{\chi''(\nu_0)}\right]^{1/2} A(\nu_0) \cdot$$

$$\exp\left[-i\chi(\nu_0) - \frac{\pi i}{4}\mathrm{sgn}\chi''(\nu_0)\right] \tag{7.149}$$

式(7.148)与式(7.149)比较可知，式(7.148)中 $\chi(\nu)=\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\theta+\omega\tau(\nu)$，鞍点值 ν_0 由 $\frac{\partial}{\partial\nu}\left[\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\theta+\omega\tau(\nu)\right]=0$ 求得。而由式(7.145)知

$$\theta(\nu_0) = p\left\{\int_{r_m}^{r_h} + \int_{r_m}^{a}\right\}\frac{\mathrm{d}r}{r\sqrt{r^2\nu^{-2}-p^2}} \tag{7.150}$$

这里 $p=\left(\nu_0+\frac{1}{2}\right)/\omega$，$\nu_0\approx(k_0a)\sin i_0$

且 $\frac{\partial^2\chi}{\partial\nu^2}\Big|_{\nu=\nu_0}=\frac{\partial^2}{\partial\nu^2}\left[\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\theta+\omega\tau\right]_{\nu=\nu_0}=\omega\frac{\partial^2\tau}{\partial\nu^2}\Big|_{\nu=\nu_0}=-\frac{\partial\theta(\nu_0)}{\partial\nu_0}=$

$-\frac{\partial\theta}{\partial i_h}\frac{\partial i_h}{\partial\nu_0}=\frac{-1}{k_hr_h\cos i_h\left(\frac{\partial i_h}{\partial\theta}\right)}$

故 $|\chi''(\nu_0)|^{-1/2}=\left[k_hr_h\cos i_h\left|\frac{\partial i_h}{\partial\theta}\right|\right]^{1/2}$

对于下行射线，$\cos i_h$ 是负的，$\frac{\partial i_h}{\partial\theta}>\theta$，故 $\chi''(\nu_0)>0$；而对于上行波，$\chi''(\nu_0)<0$。利用上述结果，最后得到在地表面的谱位移为

$$u_\varphi(a,r_h;\omega) = -\omega i\frac{U_0(\omega)\mathrm{d}S}{2\pi v_h}(\cos 2\varphi\sin i_h)\cdot$$

$$\left\{\frac{1}{a}\left[\frac{\rho_hv_h}{\rho_0v_0}\frac{\sin i_h}{\sin\theta\cos i_0}\left|\frac{\partial i_h}{\partial\theta}\right|\right]^{1/2}\right\}e^{i\omega(t-T_s)} \tag{7.151}$$

式中，$(\cos 2\varphi\sin i_h)$ 为位移辐射因子，大括号中的量为扩散系数。此位移形式与半空间中的 SH 波位移公式类似。从公式的运算过程可看出，应用 Watson 变换式易于计算出能较直观解释的位移表达式结果。

下面提出另一问题，即方程(7.140)的渐近解如何得来？适合于什么条件？有哪些特征？要回答这些问题，必须从求解二阶线性常微

分方程开始讨论。即问题为求如下二次方程的近似解

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\omega^2 s^2\varphi=0 \tag{7.152}$$

式中 ω 较大且是正值，$s=s(x)$ 使 s^2 随 x 单调增加，$s^2=0$ 是方程的转换点，或称为反转点(a turning point)。这种情况下，一般可解出$\varphi(x)$为二次曲线。令 $s^2=0$ 时，$x=x_p$，$s^2>0$ 时，$x>x_p$，$s^2<0$ 时 $x<x_p$，则当 $x>x_p$ 时 $\varphi(x)$为振荡解，$x<x_p$ 时 $\varphi(x)$为衰减解。由于 ω 和 s^2 的这些特性，使许多特殊函数的方程(如 Bessel 方程，Legendre 方程等)都可化为式(7.152)的形式，所以许多著者都研究过它，其解——WKBJ 解——就是用 4 位著者名字的第一个字母命名。

先讨论 $x>x_p$ 的情况。若 $s(x)=$常量，则方程的解为 $\varphi=e^{\pm i\omega sx}$。现在 $s=s(x)$，尝试令 $\varphi=e^{i\omega\tau(x)}$，将它代入方程(7.152)，得到

$$i\omega\tau''-\omega^2(\tau')^2+\omega^2s^2=0 \tag{7.153}$$

作为一级近似，略去 $\omega\tau''$，得 $\tau'\approx\pm s(x)$，即 $\tau(x)\approx\pm\int s(x)dx$ 或 $\tau''\approx\pm s'$。将此 τ'' 代入方程(7.153)作为二级近似，得 $(\tau')^2=s^2+\frac{i}{\omega}\tau''=s^2\pm\frac{i}{\omega}s'$，用 $|s^2|\gg|\frac{s'}{\omega}|$，得 $\tau'=\left[s^2\left(1\pm\frac{is'}{\omega s^2}\right)\right]^{1/2}\approx\pm s+\frac{1}{2}\frac{is'}{\omega s}$，从而得出 $\tau(x)\approx\pm\int s(x)dx+\frac{i}{2\omega}\ln s$，那么

$$\varphi(x)=e^{i\omega\tau(x)}\approx e^{i\omega[\pm\int s(x)dx+\frac{i}{2\omega}\ln s]}=e^{i\omega(\pm\int s(x)dx)}\frac{1}{s^{1/2}(x)}$$

或写成

$$\varphi(x)=\frac{A}{s^{1/2}(x)}\exp[i\omega\int_{x_p}^{x}s(x)dx]+\frac{B}{s^{1/2}(x)}\exp[-i\omega\int_{x_p}^{x}s(x)dx] \tag{7.154}$$

式中 A、B 为积分常数，$\varphi(x)$表现为振荡形式。

再讨论 $x<x_p$ 的情况，此时 $s^2<0$，s 为虚数。利用式(7.154)，使

$$\varphi(x)=\frac{C}{(-s^2)^{1/4}}\exp[\omega\int_{x}^{x_p}(-s^2)^{1/2}dx]+$$

$$\frac{D}{(-s^2)^{1/4}}\exp\left[-\omega\int_x^{x_p}(-s^2)^{1/2}dx\right]$$

为有明确的物理意义，必须令 $C=0$，故有

$$\varphi(x)=\frac{D}{(-s^2)^{1/4}}\exp\left[-\omega\int_x^{x_p}(-s^2)^{1/2}dx\right] \tag{7.155}$$

式中 D 为积分常数，$\varphi(x)$表现为波的衰减形式。

当 $x\to x_p$ 时，式(7.154)及(7.155)均不适用，可将 $s^2(x)$在 x_p 附近展开取一级项，即 $s^2(x)=s^2(x_p)+\frac{\partial s^2}{\partial x}(x-x_p)$，式中 $s^2(x_p)=0$，并设$\frac{\partial s^2}{\partial x}=\lambda$，则有

$$s^2(x)=\lambda(x-x_p) \tag{7.156}$$

此称为线性近似。

那么，当 $x_p-x<\xi$(ξ 为正的小数)时，有

$$\begin{aligned}\varphi(x)&=\frac{D}{\lambda^{1/4}(x_p-x)^{1/4}}\exp\left[-\frac{2}{3}\omega\lambda^{1/2}(x_p-x)^{3/2}\right]\\&=2D\pi^{1/2}\left(\frac{\omega}{\lambda}\right)^{1/6}A_i[-\omega^{2/3}\lambda^{1/3}(x-x_p)]\end{aligned} \tag{7.157}$$

式中 A_i 称为埃利(Airy)函数。这里 $\varphi(x)$表现为衰减形式。

同理，当 $x-x_p<\xi$ 时，有

$$\varphi(x)=\frac{2D}{\lambda^{1/4}(x-x_p)^{1/4}}\cos\left[\frac{2}{3}\omega\lambda^{1/2}(x-x_p)^{3/2}-\frac{\pi}{4}\right] \tag{7.158}$$

也可将 $s^2=\lambda(x-x_p)$代入式(7.154)，得

$$\begin{aligned}\varphi(x)=\frac{1}{\lambda^{1/4}(x-x_p)^{1/4}}\Big\{&A\exp\left[\mathrm{i}\frac{2}{3}\omega\lambda^{1/2}(x-x_p)^{3/2}\right]+\\&B\exp\left[-\mathrm{i}\frac{2}{3}\omega\lambda^{1/2}(x-x_p)^{3/2}\right]\Big\}\end{aligned} \tag{7.159}$$

与式(7.158)比较，得到

$$A=De^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}},\qquad B=De^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} \tag{7.160}$$

总结起来，式(7.154)、(7.155)、(7.157)、(7.158)及(7.159)都称为方程的 WKBJ 渐近解。现在利用它来求类似于式(7.140)的一

类方程的解。例如，有关于函数 $a(r,l)$ 的方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}(ra) + \left(\frac{\omega^2}{\alpha^2} - \frac{l(l+1)}{r^2}\right)(ra) = 0 \qquad (7.161)$$

方程在 $r=0$ 处奇异。

作参数变换 $r=r_0\mathrm{e}^{x/x_0}$（r_0，x_0 为常数），并令 $r^{1/2}a(r,l)=\varphi$，则方程(7.161)变为

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}x^2} + \frac{r_0^2}{x_0^2}\mathrm{e}^{2x/x_0}\left[\frac{\omega^2}{\alpha^2} - \left(\frac{l-\frac{1}{2}}{r_0\mathrm{e}^{x/x_0}}\right)^2\right]\varphi = 0 \qquad (7.162)$$

与式(7.152)比较，方程中对应于 $\omega\int_{x_p}^{x} s\mathrm{d}x$ 的项为

$$\omega\int_{x_p}^{x}\left[\frac{1}{\alpha^2} - \left(\frac{l+\frac{1}{2}}{\omega r^*}\right)^2\right]^{1/2}\mathrm{d}r^*$$

那么，当 $r<r_p$ 时，$a(r,l)$ 的指数衰减解为

$$ra(r,l) = r^{1/2}\varphi \approx D\left[\left(\frac{l+\frac{1}{2}}{\omega r}\right)^2 - \left(\frac{1}{\alpha^2}\right)\right]^{-1/4} \times$$

$$\exp\left\{-\omega\int_{r}^{r_p}\left[\left(\frac{l+\frac{1}{2}}{\omega r^*}\right)^2 - \frac{1}{\alpha^2}\right]^{1/2}\mathrm{d}r^*\right\} \qquad (7.163)$$

当 $r>r_p$ 时，$a(r,l)$ 的振荡解为

$$ra(r,l) = r^{1/2}\varphi \approx D\left[\frac{1}{\alpha^2} - \left(\frac{l+\frac{1}{2}}{\omega r}\right)^2\right]^{-\frac{1}{4}} \times$$

$$\left[\exp\left(\mathrm{i}\omega\tau - \frac{\pi}{4}\right) + \exp\left(-\mathrm{i}\omega\tau + \frac{\pi}{4}\right)\right] \qquad (7.164)$$

式中 $\tau = \int_{r_p}^{r}\left[\frac{1}{\alpha^2} - \left(\frac{l+\frac{1}{2}}{\omega r^*}\right)^2\right]^{1/2}\mathrm{d}r$。式(7.163)与(7.164)即为方程(7.161)式的 WKBJ 解。

用上述方法也可解出 Legendre 方程的 WKBJ 解

$$P_l(\cos\Delta) \approx \left(\frac{1}{2\pi l\sin\Delta}\right)^{1/2}\left\{\exp\left[-\mathrm{i}\left(l+\frac{1}{2}\right)\Delta+\frac{\mathrm{i}\pi}{4}\right]+\exp\left[+\mathrm{i}\left(l+\frac{1}{2}\right)\Delta-\frac{\mathrm{i}\pi}{4}\right]\right\} \tag{7.165}$$

§6 径向非均匀球地球介质中的广义射线

在求解方程(7.152)时，用到了近似条件$\left|\frac{s'}{\omega}\right| \ll |s^2|$，将 $\omega s=2\pi/\lambda$（λ 为波长）代入，则近似条件变为$|s'\lambda| \ll 2\pi|s|$，表示一个波长内的 $s(x)$随空间坐标的变化必须小于 $s(x)$本身。因为 $s(x)$是表征介质的参数，故可推广之，当介质参数(ρ,λ,μ)随径向坐标 r 的变化较小，即$\left|\frac{\mu'}{\mu}\right| \ll 1$，$\left|\frac{\lambda'}{\lambda}\right| \ll 1$、$\left|\frac{\rho'}{\rho}\right| \ll 1$ 时，称这种介质为缓变介质。在高频情况下缓变介质中波动方程的解可为 WKBJ 解，其表征的射线为具有反转点的曲线。从波动与射线描述的一致性条件出发，这类给出实 ω 频率的在复 p 平面上求积分的近似解，也可称为球对称介质中的广义射线解。它是解理论地震图的全波理论(The full-wave Theory)的基础内容之一。

在高频情况下，缓变介质的位移(频域)可写为

$$\boldsymbol{u}=\rho^{-1/2}[\nabla P+\nabla\times\nabla\times(rV,0,0)]+\mu^{-1/2}\nabla\times(rH,0,0) \tag{7.166}$$

标量势函数 P、V、H 满足的波动方程分别为

$$\left.\begin{aligned}\nabla^2P+\frac{\omega^2}{\alpha^2}P&=0\\ \nabla^2V+\frac{\omega^2}{\beta^2}V&=0\\ \nabla^2H+\frac{\omega^2}{\beta^2}H&=0\end{aligned}\right\} \tag{7.167}$$

它们分别代表 P 波、SV 波与 SH 波。

下面求解脉冲点源产生的径向位移 $u_r(r,\Delta_0,\omega)=\rho^{-1}(r)\frac{\partial P}{\partial r}$。

先从位函数 $P(\boldsymbol{r},\omega)$ 出发，求方程

$$\nabla^2 P + \frac{\omega^2}{\alpha^2(r)}P = K_s\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_s) \tag{7.168}$$

的解（K_s，$\boldsymbol{r}_s$ 为震源处的值）。

用分离变数法，设

$$P(\boldsymbol{r},\omega) = \sum_{l=0}^{\infty} a(r,l)P_l(\cos\Delta) \tag{7.169}$$

代入方程(7.168)，得到

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}[ra(r,l)] + \left(\frac{\omega^2}{\alpha^2(r)} - \frac{l(l+1)}{r^2}\right)[ra(r,l)] = K_s\delta(r-r_s)\frac{(2l+1)}{4\pi r} \tag{7.170}$$

当 r 很大时，方程(7.170)相应的齐次方程为 $\frac{\mathrm{d}^2 a}{\mathrm{d}r^2}+\frac{\omega^2 a}{\alpha^2}=0$。若 α 为常量，则 $a(r)=a_1 e^{i\frac{\omega}{\alpha}r}+a_2 e^{-i\frac{\omega}{\alpha}r}$；若 $\alpha=\alpha(r)$，则相应的齐次方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}[ra(r,l)] + \left(\frac{\omega^2}{\alpha^2(r)} - \frac{l(l+1)}{r^2}\right)[ra(r,l)] = 0 \tag{7.171}$$

预期有两个独立的解可供选择，一个解的相位随 r 增加，另一个解的相位随 r 减小，分别记为 $g_l^{(1)}(r)$ 和 $g_l^{(2)}(r)$。对于非齐次方程(7.170)，可作类似的分析，即得到解

$$a(r,l) = \begin{cases} c_1 g_l^{(1)}(r) & (r_s \leqslant r) \\ c_2 f_l(r) & (0 \leqslant r \leqslant r_s) \end{cases} \tag{7.172}$$

且 $f_l(r)=\frac{1}{2}[g_l^{(1)}(r)+g_l^{(2)}(r)]$。显然，系数 c_1、c_2 与震源有关。源的径向坐标为 r_s，$r>r_s$ 时标为 $r_>$，这种情况下的解 $g_l^{(1)}(r)$ 为与 c_1 有关的球 Hankel 函数。$r<r_s$ 时标为 $r_<$，其解 $f_l(r)$ 为与 c_2 有关的球 Bessel 函数。$f_l(r)$ 与 $g_l^{(1)(2)}(r)$ 都是正交函数。在震源处，当 r 增加至 r_s 时，$a(r,l)$ 连续且 $\frac{\mathrm{d}a(r,l)}{\mathrm{d}r}$ 的绝对值为 $K_s(2l+1)/4\pi r_s^2$，由此求得

$$\left.\begin{aligned} c_1 &= -\frac{K_s(2l+1)}{4\pi r_s^2}\frac{f_l(r_s)}{W(r_s)} \\ c_2 &= -\frac{K_s(2l+1)}{4\pi r_s^2}\frac{g_l^{(1)}(r_s)}{W(r_s)} \end{aligned}\right\} \tag{7.173}$$

式中 $W(r)$为 Wronskian 行列式，按 $f_l(r)$与 $g_l(r)$的正交性，可得 $W(r)=-\frac{i\alpha_s}{\omega r^2}$，那么 $W(r_s)=\frac{-i\alpha_s}{\omega r_s^2}$，代入式(7.173)得

$$\left.\begin{aligned} c_1 &= \frac{iK_s\omega(2l+1)}{4\pi\alpha_s}f_l(r_s) \\ c_2 &= \frac{iK_s\omega(2l+1)}{4\pi\alpha_s}g_l^{(1)}(r_s) \end{aligned}\right\} \tag{7.174}$$

代入式(7.172)得

$$a(r,l)=\left.\begin{cases} \dfrac{iK_s\omega(2l+1)}{4\pi\alpha_s}g_l^{(1)}(r)f_l(r_s) & (r_s\leqslant r,\text{即 } r_>) \\ \dfrac{iK_s\omega(2l+1)}{4\pi\alpha_s}f_l(r)g_l^{(1)}(r_s) & (0\leqslant r\leqslant r_s,\text{即 } r_<) \end{cases}\right\} \tag{7.175}$$

将它代入式(7.169)得

$$P(r,\Delta,\omega)=\frac{iK_s\omega}{4\pi\alpha_s}\sum_{l=0}^{\infty}\left(l+\frac{1}{2}\right)g_l^{(1)}(r_>)\cdot \left[g_l^{(1)}(r_<)+g_l^{(2)}(r_<)\right]P_l(\cos\Delta) \tag{7.176}$$

按解的归一化条件，式中的 $K_s^{(1,2)}=e^{\mp i\frac{\pi}{4}}\frac{\alpha_s^{1/2}}{\omega}$。

由于方程(7.171)就是式(7.161)，故当 ω 较大时，方程(7.171)的 WKBJ 渐近解 $g_l^{(1,2)}(r)$与 $f_l(r)$为：

当 $r>r_p$ 时

$$rg_l^{(1,2)}(r)\approx K_s^{(1,2)}\left[\frac{1}{\alpha^2(r)}-\left(\frac{l+\frac{1}{2}}{\omega r}\right)^2\right]^{-1/4}\cdot \exp\left\{\pm i\omega\int_{r_p}^{r}\left[\frac{1}{\alpha^2(r^*)}-\left(\frac{l+\frac{1}{2}}{\omega r^*}\right)^2\right]^{1/2}dr^*\right\} \tag{7.177}$$

按 $p=\frac{l+\frac{1}{2}}{\omega}=\frac{r_p}{\alpha(r_p)}=\frac{a\sin i_0}{v_0}, \xi=\frac{\cos i(r)}{\alpha(r)}=\left(\frac{1}{\alpha^2(r)}-\frac{p^2}{r^2}\right)^{1/2}$，可得

$$g_l^{(1,2)}(r) \approx e^{\mp i\frac{\pi}{4}} \frac{\alpha_s^{1/2}}{\omega r} \frac{1}{\xi^{1/2}(r)} \exp\left\{\pm i\omega \int_{r_p}^{r} \xi(r^*) dr^*\right\} \tag{7.178}$$

当 $r<r_p$ 时

$$f_l(r) \approx \frac{\alpha_s^{1/2}}{2\omega r}\left[\frac{p^2}{r^2}-\frac{1}{\alpha^2(r)}\right]^{-\frac{1}{4}} \cdot$$

$$\exp\left\{-\omega\int_r^{r_p}\left[\frac{p^2}{(r^*)^2}-\frac{1}{\alpha^2(r^*)}\right]^{1/2} dr^*\right\} \tag{7.179}$$

并将 Legendre 函数分离成行波，有

$$P_l(\cos\theta) = Q_l^{(1)}(\cos\theta) - Q_l^{(2)}\cos\theta$$

当 l 较大时，$Q_l^{(1,2)}(\cos\theta)$ 的渐近值为

$$Q_l^{(1,2)}(\cos\Delta) \approx \frac{\exp\left\{\mp i\left[\left(l+\frac{1}{2}\right)\Delta-\frac{\pi}{4}\right]\right\}}{(2\pi l\sin\Delta)^{1/2}}$$

$$=\frac{\exp\left\{\mp i\left(\omega p\Delta-\frac{\pi}{4}\right)\right\}}{(2\pi\omega p\sin\Delta)^{1/2}}, (\Delta \neq 0 \text{ 和 } \pi) \tag{7.180}$$

它所表示的行波与式(7.127)描述的射线有类似的直观意义。

表述 P 波势函数的式(7.176)为径向非均匀球地球介质中的 Sommerfeld 积分，它表示 4 个行波项 $g_l^{(1)}(r_>)\ g_l^{(1)}(r_<)\begin{Bmatrix}Q_l^{(1)}\\Q_l^{(2)}\end{Bmatrix}$ 及 $g_l^{(1)}(r_>)\ g_l^{(2)}(r_<)\begin{Bmatrix}Q_l^{(1)}\\Q_l^{(2)}\end{Bmatrix}$ 的叠加。行波中的前两项表示从点源出发至 $r_>$ (r，r_s 中较大的)及 $r_<$ (r，r_s 中较小的)的波；后两项表示从 $r_>$ 和 $r_<$ 反回点源的波。当 l 较大时 $\left(l>\frac{\omega r_<}{\alpha(r_<)}\right)$，若研究短周期(周期为 1 或 2s)体波，式(7.176)要对上千项求和。当然，它是收敛级数，但其每一子项收敛都很慢，有时甚至发散。由于每一个级数代表一个波型，因此式中的级数计算较为复杂且计算量繁重。但若用 Watson 积分替

代求和级数，消除那些无用的行波，再用适当方法（如鞍点法），就可比较容易地计算出所研究波的主要特征。

令 $\mathrm{Re}\nu = l + \frac{1}{2}$，且 $l + \frac{1}{2} = \omega p = kr$，略去实极点所表示的面波，则可得到类似于式(7.145)的 Watson 积分式

$$P(r,\omega) = -\frac{\mathrm{i}K_s\omega^3}{4\pi\alpha_s}\int_\Gamma p g_{\omega p-1/2}^{(1)}(r) g_{\omega p-1/2}^{(1)}(r_s) Q_{\omega p-1/2}^{(2)}(\cos\Delta)\mathrm{d}p \tag{7.181}$$

式中 $Q_{\omega p-1/2}^{(2)}$ 对于 ωp 为偶函数，仅在负实轴上有极点。积分路径 Γ 类似于图 7.3b 中的路径 C_2。式(7.181)代表有一个反转点的射线。图 7.4 上表示出射线及复 p 平面上的积分路径 Γ。

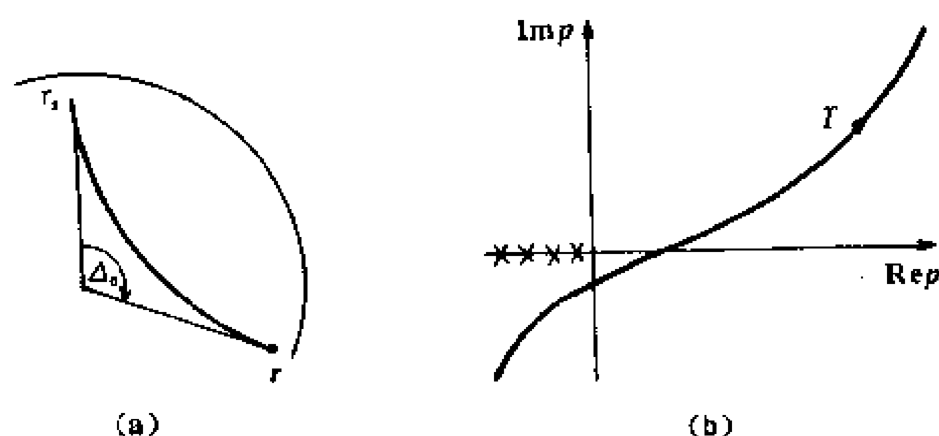


图 7.4 具有一个反转点的射线及相关的积分路径

最后，对于脉冲点源所激发的径向位移 $u_r = \rho^{-1}(r)\frac{\partial P}{\partial r}$，利用式(7.181)，并将 $g_l^{(1,2)}(r)$ 的表示式(7.178)及 $Q_l^{(1,2)}$ 的渐近式(7.180)代入，就可得到给定震中距 Δ_0 处的具有一个反转点的射线的径向位移

$$u_r(r,\Delta_0,\omega) = \frac{K_s \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}\omega^{3/2}}{(2\pi\rho(r)\sin\Delta)^{1/2}}\frac{1}{4\pi r r_s}\int_\Gamma\left(\frac{p\xi(r)}{\xi(r_s)}\right)^{1/2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega J}\mathrm{d}p \tag{7.182}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}
&J=J(p)=\int_{r_p}^{r_\xi}\xi\mathrm{d}r+\int_{r_p}^{r}\xi\mathrm{d}r+p\Delta_0=\tau(p)-p\Delta_0\\
&\tau(p)=\int\xi\mathrm{d}r=T-p\Delta \qquad (T\text{ 为波的走时})\\
&\frac{\partial\tau}{\partial p}=-\Delta(p)
\end{aligned}\right\}\tag{7.183}$$

因在 Δ_0 处有 $\Delta(p_0)=\Delta_0$，而 $\left.\frac{\partial J}{\partial p}\right|_{p_0}=\frac{\partial\tau}{\partial p}+\Delta_0=\Delta_0-\Delta(p_0)=0$，故 p_0 为复 p 平面上的鞍点，且 $J(p_0)=T(p_0)$，$\left.\frac{\partial^2 J}{\partial p^2}\right|_{p_0}=\frac{\partial}{\partial p}(\Delta_0-\Delta)|_{p_0}=-\left.\frac{\partial\Delta}{\partial p}\right|_{p_0}$，可知积分路径 Γ 是最速下降路径。按最速下降法(第五章§6 有关内容)求鞍点积分值，得到高频时的径向谱位移为

$$\begin{aligned}
u_r(r,\Delta_0,\omega)&\approx\frac{-\mathrm{i}K_s\omega}{4\pi}\left(\frac{\alpha_s}{\rho\alpha}\right)^{1/2}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega T}}{r\,r_s}\left[\frac{\cos i_s\sin\Delta_0}{p_0\cos i}\left(-\frac{\partial\Delta}{\partial p}\right)\right]^{1/2}\\
&=\frac{-\mathrm{i}K_s\omega\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega T}}{4\pi(\rho\alpha\alpha_s)^{1/2}\mathscr{R}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_s)}\cos i(r)
\end{aligned}\tag{7.184}$$

式中

$$\alpha_s\mathscr{R}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_s)=r\,r_s\left[\cos i\cos i_s\sin\Delta_0\left|\frac{\partial\Delta}{\partial p}\right|/p_0\right]^{1/2}\tag{7.185}$$

为几何扩散因子。

若用矩张量 $M_{ij}(t)=M_0(t)\delta_{ij}$，则外力 $f_i(\boldsymbol{r},t)=-M_0(t)\cdot\frac{\partial\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_s)}{\partial x_i}$，此时 $k_s=\frac{M_0(\omega)}{\rho_s^{1/2}\alpha_s^2}$，作式(7.185)的 Fourier 逆变换，得到时间域的径向位移为

$$u_r(r,\Delta_0,t)\approx\frac{\cos i(r)\dot{M}_0(t-T)}{4\pi(\rho(r)\rho_s\alpha(r)\alpha_s^5)^{1/2}\mathscr{R}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_s)}\tag{7.186}$$

这正是几何射线理论所预期得到的。

一个更复杂的介质速度结构可导致走时曲线重叠回折，如图 7.5a 所示。同一个震中矩 Δ_0 有 5 个波的到时。在复平面上，5 个波

的最速下降积分路径与 $\mathrm{Re}\,p$ 轴的夹角 χ 的符号取决于 $\frac{\partial^2 J}{\partial p^2}=-\frac{\partial\Delta}{\partial p}$，如图 7.5b 所示。$AB$、$CD$、$EF$ 段为正 χ 值，$\overset{\frown}{BC}$、$\overset{\frown}{DE}$ 段为负 χ 值，那么，第 1（$\overset{\frown}{AB}$段）、第 3（$\overset{\frown}{CD}$段）、第 5（$\overset{\frown}{EF}$段）个鞍点给出如式（7.184）表示的位移渐近式，相当于广义的直达波与层下首波的位移。而第 2（$\overset{\frown}{BC}$段）、第 4（$\overset{\frown}{DE}$段）个鞍点所对应的位移相当于层内反射波，其相位超前直达波 $\frac{\pi}{2}$，其值为以（$-\mathrm{i}$）乘以式（7.184）。变换到时间域，可知对应于偶序数的到时仍具有脉冲形状，它是对奇数鞍点位移值的 Hilbert 变换。

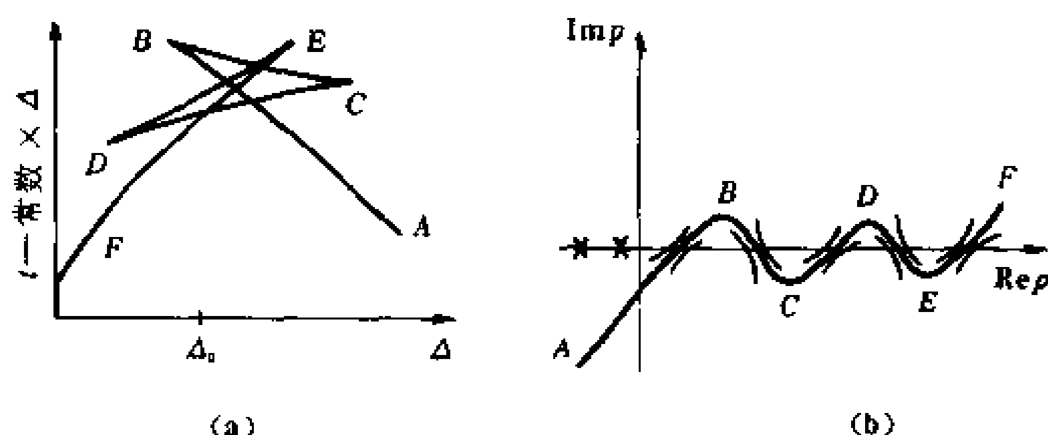


图 7.5　重叠的折合走时(a)及相关的鞍点路径(b)

这类复杂的介质速度结构，使射线在地球表面或内部汇聚或形成包络，称为射线的焦散现象。图 7.5b 中 B、C、D、E 点即为射线汇聚点。如在 C 点，$\Delta_c=\Delta(p)$，$\left.\frac{\partial\Delta}{\partial p}\right|_{p_c}=0$，此时要解出位移值更方便的方法是在时间域用 Cagniard 方法（又称为广义射线法，第八章 §6 详述）来处理。

重写式（7.182），对于剪切位错点源 $M_{ij}=M_0(\omega)\delta_{ij}$，$K_s=$

$\dfrac{M_0(\omega)}{\rho_s^{1/2}\alpha_s^2}$，可得

$$u_r(r,\Delta_0,\omega) = \frac{-\mathrm{i}\omega M_0(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\omega^{1/2}}{(2\pi\rho\rho_s\sin\Delta_0)^{1/2}4\pi r r_s\alpha_s^2}\int_\Gamma B(p)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega J(p)}\mathrm{d}p \quad (7.187)$$

式中 $B(p)=\left(\dfrac{p\xi(r)}{\xi_s}\right)^{1/2}=p^{1/2}\left(\dfrac{1}{\alpha^2}-\dfrac{p^2}{r^2}\right)^{1/4}\Bigg/\left(\dfrac{1}{\alpha_s^2}-\dfrac{p^2}{r_s^2}\right)^{1/4}$，作 Fourier 逆变换，得到

$$u_r(r,\Delta_0,t) = \frac{\dfrac{\mathrm{d}M_0}{\mathrm{d}t}}{(2\pi\rho\rho_s\sin\Delta_0)^{1/2}4\pi r r_s\alpha_s^2} * \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{H(t)}{(\pi t)^{1/2}} *$$

$$\frac{1}{\pi}\mathrm{Re}\int_0^\infty\int_\Gamma B(p)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(J-t)}\mathrm{d}p\mathrm{d}\omega \quad (7.188)$$

式中最末一项为

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\mathrm{Re}\int_0^\infty\int_\Gamma B(p)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(J-t)}\mathrm{d}p\mathrm{d}\omega = \mathrm{Re}\int_\Gamma B(p)\delta[J(p)-t]\mathrm{d}p$$

$$(7.189)$$

且 $J(p)=T(p)-p\Delta(p)+p\Delta_0$，其斜率 $\dfrac{\partial J}{\partial p}=\Delta_0-\Delta(p)$ 在 p_0 处为零（图 7.6a），此时 $J(p)=t_0$。对于大于 t_0 的时间，令

$$t = J(p) \quad (7.190)$$

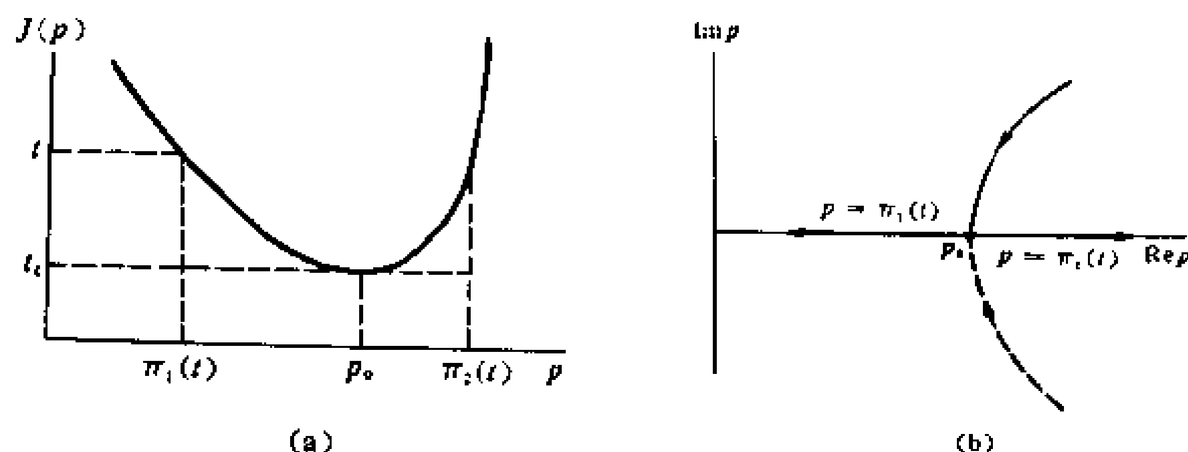
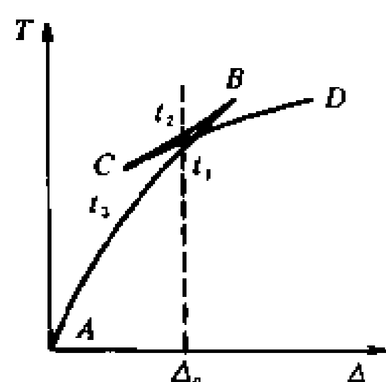


图 7.6　$t=J(p)$ 的双解(a)及广义积分路径(b)

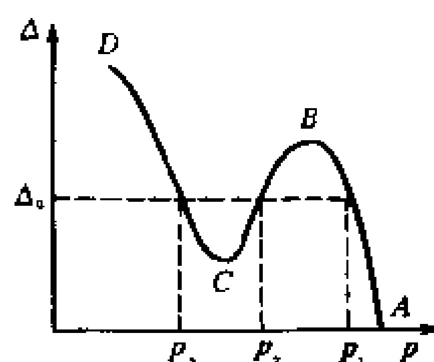
方程中 t 为实数，此方程有两个根 $\pi_1(t)$ 及 $\pi_2(t)$。在复平面上的积分

路径 $p(t)$如图 7.6b 所示，称为广义积分路径 C。将 $J(p)-t=(p-\pi_j)\left.\frac{\partial J}{\partial p}\right|_{\pi_j}=(p-\pi_j)(\Delta_0-\Delta(\pi_j))$，$\delta[J(p)-t]=\delta[(p-\pi_j)\cdot(\Delta_0-\Delta(\pi_j))]=\frac{\delta(p-\pi_j)}{|\Delta_0-\Delta(\pi_j)|}$，$(j=1,2)$代入式(7.189)中，得到

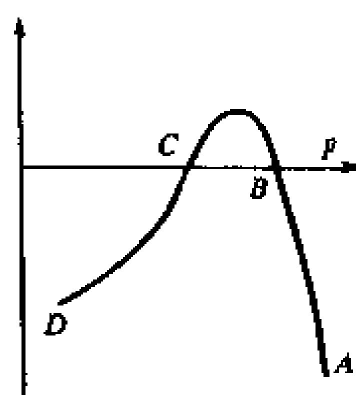
$$f(t)\approx\sum_j\frac{B(\pi_j)}{|\Delta_0-\Delta(\pi_j)|}$$



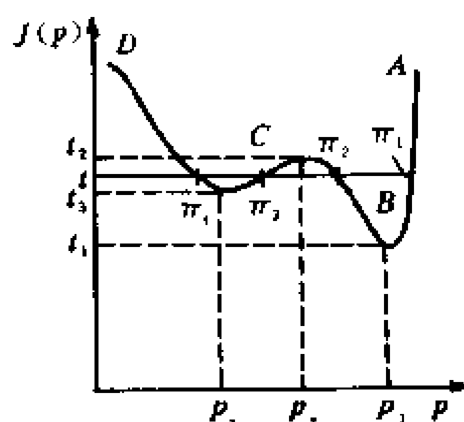
(a)



(b)



(c)



(d)

图 7.7 在 B、C 点聚焦的走时曲线及导出曲线

(a)在 B、C 点聚焦的走时曲线；(b)$\Delta(p)=\Delta_0$ 有三个解；

(c)$\frac{\partial\Delta}{\partial p}$的零点在 B、C 点；(d)$t=J(p)$的解 π_i

由此可得 $$u_r(r,\Delta_0,t)=\frac{\frac{\mathrm{d}M_0}{\mathrm{d}t}}{(2\rho\rho_s\sin\Delta_0)^{1/2}4\pi^2rr_s\alpha_s^2}*\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{H(t)}{t^{1/2}}*$$

$$\sum_j \frac{B(\pi_j)}{|\Delta_0 \Delta(\pi_j)|}, (j = 1, 2) \tag{7.191}$$

按卷积规则运算后，可看出此式就是式(7.186)。

式(7.191)的主要优点是可以直接处理多重路径的聚散区的波。如图7.7在Δ_0处有3个波，使$t - J(p)$有4个根，可用它来算出位移值，但它不能用来处理间断面的情况，因为要将散射系数值加入。式(7.191)可称为广义射线理论地震图，也可称为WKBJ地震图，它是第八章§8的一个特例。

习题与思考题

1. 写出对式(7.78)和(7.83)分别运用瑞利原理而求出群速度值的每一运算步骤及其结果。

2. 试述自由振荡波的射线描述与振型描述的二重性条件及其物理意义。

3. 在球对称介质中，由脉冲点源产生的径向位移值为具有一个反转点的射线解，也叫WKBJ近似解。试论述解的条件、主要运算步骤及其结果。

4. 自由振荡波的高频极限是面波，这里介绍在半空间上覆盖一层中的勒夫面波的另一论点(图7.8)。

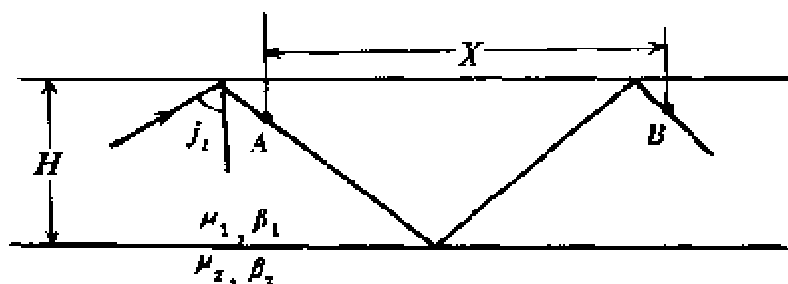


图7.8 半空间上覆盖一层中的勒夫面波传播示意图

当层内射线以超临界角反射时($\beta_1 < \beta_2$)，对同样深度的两点A、B(AB距离为X)，对于频率为ω，相速度为c的面波传播，B点的相位必然与A点有$\frac{X\omega}{c}$的相移。而对于A、B之间的体波，相移为

$$\psi = \frac{2H\omega}{\beta_1}\sec j_1 - 2\arctan\left[\frac{\mu_2\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{\beta_2^2}\right)^{1/2}}{\mu_1\left(\frac{1}{\beta_1^2} - \frac{1}{c^2}\right)^{1/2}}\right]$$

当 ψ 和 $\frac{X\omega}{c}$ 相差 2π 的整数倍时，产生面波。由此条件可得到勒夫面波频散方程为

$$\tan\omega H\left(\frac{1}{\beta_1^2} - \frac{1}{c^2}\right)^{1/2} = \frac{\mu_2}{\mu_1}\frac{\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{\beta_2^2}\right)^{1/2}}{\left(\frac{1}{\beta_1^2} - \frac{1}{c^2}\right)^{1/2}}$$

第八章　非均匀介质中的体波理论

本章主要讲述近代地震学中地震体波的射线理论研究，讨论在非均匀介质中计算体波理论地震图的方法原理及各种方法的优缺点。这是地震学中的正演问题。

§1　地震体波理论研究的发展

历史上，对地震体波的研究是从对短周期的近似射线理论开始的。利用体波沿射线的旅行时间(走时)信息，使人们对地球内部结构有了初步的了解。如根据近震体波走时，A. Mohorovičić在1909年就研究了地壳的厚度。B. Gutenberg 在 1913 年较准确地估算出核-幔边界的深度为 2900km。1936 年，I. Lehmann 辨明了地球内核的存在。1939 年之前，Gutenberg 和 H. Jeffreys 各自应用射线理论，研究了整个地球的速度模型。两个模型的差别只有百分之几，且在 800～2800km 深度范围内，两者的 P 波速度之差小于 1%。这些都表明，射线走时理论在研究地球结构中，有过卓绝的贡献。但另一方面，它在解决更深处的物质组成及状态等问题上却显得无能为力。如上地幔有两个深度范围(约在 400km 及 650km 处)，P、S 波的速度梯度($d\alpha/dz$ 和 $d\beta/dz$)异常地大，要确定这些梯度随深度的变化，光靠体波走时解决不了问题，这就需要研究体波理论中的其他信息。

Julian 和 Anderson (1968)，Wesson (1970)，Shimshon 和 Ben-Menahem(1970)及 Chapman(1971)用射线理论研究体波初至振幅时，都已注意到，几何扩散函数 $\mathscr{R}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$ 对速度梯度的影响

极为敏感(这里 x 是观测点位置,ξ 是震源位置)。因而要求发展射线理论、研究如何计算地震波幅度乃至地震波波形。也就是说,在给定震源参数和地球模型的情况下计算合成地震图,或称理论地震图;然后将这些理论地震图与观测到的记录作比较,判定初始模型是否合理与正确;若结果不太满意就修正模型,直至满意为止。这个过程称为拟合。合成地震图的计算是近代地震学的重要进展。

近 20 年来,合成地震图在地震资料解释中已得到广泛应用,至今已发展了许多方法来计算水平成层(侧向均匀)介质中的地震图,以及侧向非均匀介质中的情况。下面对各种方法作一简单介绍。

计算侧向均匀介质中的理论地震图,在数学原理方面基本上属于可直接运算的经典问题。即将偏微分的波动方程变换成一个常微分方程,然后在一定边界条件下求解,最后将得到的变换域上的解进行反变换即可。如果是计算真实的复杂模型并期望计算高效率,则可能会遇到一点困难,一般情况下不会有什么问题。

自 60 年代开始,地震仪及观测系统都有所改进,同时发展了地震台阵,使得走时测量更加精确,这样也就有可能使反演的速度模型更为精细。比如 Johnson 在 1967 年就提出了一个典型的精细模型。也在这个时期,许多人研究了较为复杂介质中波的传播(如,Phinney,1961;Gilbert and Laster, 1962; Davies, 1965; Müller, 1968 a,b),地震波幅度的定量研究也有了改进(如 Phinney, 1965;Phinney and Alexander, 1966)。在 60 年代末已经计算了完全的理论地震图,并将它与实际资料进行了对比(Helmberger, 1968)。

对于水平成层介质现在已有几种方法可用来计算理论地震图。在 70 年代早期,还曾对各种方法的有效性和等效性进行了一些争论。直到 1978 年,在美国俄勒岗举行的"理论地震学"会议上才获得了共识,认为许多方法给出的结果基本上是等效的,其中一些作了比较后已发表(如 Burdick and Orcutt, 1979;Choy 等,

1980; Cormier and Choy 1981)。在这次会议上广泛地应用了如下三种方法：反射率法(Fuchs and Müller, 1971)；广义射线理论(又称 Cagniard-De Hoop Pekeris 法, Wiggins and Helmberger, 1974)及全波理论(Richards, 1973, 1976; Choy, 1977; Cormier and Richards, 1977)。这三种方法以如下两个特征来区分：①变换的方法和顺序；②在变换域上求解问题的类型。反射率法和全波理论法都是先进行波数反变换积分，反射率法用的是实路径，全波理论用的是复路径；而广义射线法则是先进行频率反变换，然后再在复波数路径上进行积分。对于变换域上的问题，反射率法和广义射线法都假定介质是均匀成层的，而全波理论法是对非均匀介质取零阶近似解。

除上述三种方法外，Chapman (1978)又提出第四种方法，即 WKBJ 方法。他也是首先进行频率反变换，但波数积分在实路径上进行。这种方法有两个优点：首先，方法上只要采用物理上早已有的常微分方程近似解法——WKBJ 方法，使中间结果直观且容易解释。其次，它在变换域上解的是介质非均匀问题。

对于侧向非均匀介质中理论地震图的计算，现在也有许多方法。其中最一般的方法是有限差分法(Alterman and Karal, 1978)和有限元法(Smith, 1975)，但是这些方法一方面花费太大，另一方面计算出来的地震图常很难与实际资料进行拟合和解释。

由于我们经常关心的是高频体波。因此，迄今所提出的方法主要是射线法的推广。这种推广使得不仅需要计算符合 Fermat 原理的射线，而且还要计算不符合 Fermat 原理的射线。现时较为流行的一种所谓 Gauss 射线束法(Červený等, 1982)，认为每条射线都可看作一射线束，幅度是沿着束的宽度按 Gauss 函数分布。沿着每一条射线，计算射线束的贡献，它是满足抛物线型波动方程的，然后把到达接收点的所有射线的贡献加起来，这就是 Gauss 射线束法的主要之点。还有另外一些方法，只应用抛物线型波动方程而不考虑 Gauss 射线束，比如 Landers and Claerbout (1972)，

McCoy (1977), Tappert (1977), Hadson (1980) 及 Haines (1981)都进行过这种计算。还有一种方法是用 Kirchhoff 积分计算有些不符合 Fermat 原理的射线,这些射线从一中间曲面开始,用射线追踪到另一曲面,理论地震图就是在这曲面上作积分求得。这种方法的算例有,Burridge (1963) Hilterman (1970,1975), Trorey (1970, 1977), Berryhill (1977), Haddon and Buchen (1981), Sinton and Frazer (1981) 及 Scott and Helmberger (1983)。

与 Guass 射线束法齐名的还有一种称作为 Chapman-Maslov 法,它也可以说是近似射线法的延伸。这种方法基于 Maslov (1965,1972)提出的数学理论,用 Hamilton 正则方程限定三维非均匀介质中的射线追踪,在一般情况下,所得的射线路径是空间曲线,将这种三维位置空间的路径推广在一个六维相空间中考虑,这六维相空间由三个位置坐标和三个慢度构成。近似射线的大小变化可以通过空间坐标的正则变换来给定。这些结果全包含在通常的近似射线理论中。通常,波动方程和近似解都在位置空间坐标中表示和进行运算,但也可以用相空间中的另外坐标系来处理。后者所得的解与 Fourier 变换有关。这种空间坐标系用慢度坐标来替代,对解决问题是非常有用的。当然,这种混合区域中的近似解也能用空间坐标中的解进行 Legendre 变换和 Fourier 正则变换得到。上述方法,在本章的内容中都会有介绍。

§2 侧向均匀介质中高频 P、SV、SH 波的解耦

我们从侧向均匀介质开始讨论高频体波理论。

在侧向均匀、径向非均匀各向同性的球地球介质中,SH 波的运动可从 P-SV 波运动中分离出来,但在一般情况下,P 和 SV 波不能再作进一步分离,也就是说不能将其运动方程简化成两个独立无关的标量方程。但根据某些近似条件,经过变换,也可以使它

们变成相互独立的标量方程，即一个 P 波方程和一个 SV 波方程，这称作解耦。下面我们讨论这种解耦方法。

因为介质参数与径向坐标 r 有关，即 $\rho=\rho(r)$，$\mu=\mu(r)$，$\lambda=\lambda(r)$，则 Navier 运动方程为：

$$
\begin{aligned}
&(\lambda + 2\mu)\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\boldsymbol{u} - \mu\,\mathrm{curl}\,\mathrm{curl}\boldsymbol{u} + \\
&(\lambda'\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{u})\hat{\boldsymbol{r}} + \mu'\left(2\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial r} + \hat{\boldsymbol{r}} \times \mathrm{curl}\,\boldsymbol{u}\right) \\
&= \rho\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2}
\end{aligned}
\tag{8.1}
$$

式中右上角标“′”表示对 r 的微商，且 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}(u_r, u_\theta, u_\varphi)$，$\hat{\boldsymbol{r}}$ 为 r 方向的单位矢量。

为了以后讨论方便起见，引入三个独立的新变量(u_r, S, Ω_r)，替代$(u_r, u_\theta, u_\varphi)$，即令

$$
S = \mathrm{div}\boldsymbol{u} \qquad \Omega_r = (\mathrm{curl}\boldsymbol{u})_r \tag{8.2}
$$

则可看出式(8.1)等价于三个耦合的标量方程组。

将式(8.1)中的 curl curl $\boldsymbol{u}$ 用 grad div$\boldsymbol{u}-\nabla^2\boldsymbol{u}$ 替代，同时对替代后的方程取 curl，则这个矢量方程的 r 分量有

$$
\nabla^2(r\Omega_r) + \frac{\mu'}{\mu}\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\right)(r\Omega_r) = \frac{\rho}{\mu}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(r\Omega_r) \tag{8.3}
$$

而直接对式(8.1)取 r 分量，得

$$
\begin{aligned}
\frac{\mu}{r}\nabla^2(ru_r) + 2\mu'\frac{\partial u_r}{\partial r} + (\lambda + \mu)\frac{\partial S}{\partial r} + \left(\lambda' - \frac{2\mu'}{r}\right)S \\
= \rho\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}
\end{aligned}
\tag{8.4}
$$

又可将式(8.1)变成如下形式：

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{grad}[(\lambda + 2\mu)S] - \mathrm{curl}(\mu\,\mathrm{curl}\,\boldsymbol{u}) + \\
&2\mu'\left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial r} - \hat{\boldsymbol{r}}S + \hat{\boldsymbol{r}} \times \mathrm{curl}\,\boldsymbol{u}\right) = \rho\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2}
\end{aligned}
\tag{8.5}
$$

再取 div，则有

$$
\nabla^2[(\lambda + 2\mu)S] - \frac{2}{r^3}\frac{\partial}{\partial r}(\mu' r^3 S) + 2r\left(\frac{\mu'}{r}\right)\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{2}{r}\mu'\nabla^2(ru_r)
$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\rho' u_r + \rho S) \tag{8.6}$$

这样，运动方程式(8.1)已被三个标量方程(8.3)、(8.4)和(8.6)等价地替代。注意到在方程(8.3)中只出现 Ω_r，即此方程与 u_r、S 无关，它代表 SH 型运动($S=u_r=0$)，表示在径向非均匀介质中，SH 型运动可从 P-SV 型运动中解耦出来。而方程(8.4)和(8.6)则代表 P-SV 型运动，它们是相互耦合的。但是对于短周期体波，在地震学上可看到分离形式的 P 和 SV 波，因而可以期待高频 P 波能从 SV 运动中解耦出来。为此，设

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{M} + \boldsymbol{N} \tag{8.7}$$

这里 $\boldsymbol{L}$、$\boldsymbol{N}$ 和 $\boldsymbol{M}$ 分别代表 P、SV 和 SH 运动。再引入辅助函数 ψ_1、ψ_2、ψ_3，使

$$\boldsymbol{L} = \frac{1}{f_1}\mathrm{grad}(f_1\psi_1) = \mathrm{grad}\psi_1 + \hat{\boldsymbol{r}} g_1 \psi_1 \tag{8.8}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{N} &= \frac{1}{f_2}\mathrm{curl\,curl}(\boldsymbol{r} f_2 \psi_2) \\ &= \mathrm{curl\,curl}(\boldsymbol{r}\psi_2) + g_2 \hat{\boldsymbol{r}} \times \mathrm{curl}(\boldsymbol{r}\psi_2)\end{aligned} \tag{8.9}$$

$$\boldsymbol{M} = \mathrm{curl}(\boldsymbol{r}\psi_3) \tag{8.10}$$

上列各式中 f_1 和 f_2 只是 r 的函数，而 $g_1=\frac{f'_1}{f_1}$，$g_2=\frac{f'_2}{f_2}$。如果 f_1 和 f_2 为常数，则式(8.8)～(8.10)就简化为均匀介质的情况。

若 $\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}=0$，则方程(8.1)只代表 SH 运动，简化为

$$\mu\nabla^2\boldsymbol{u} + \mu'\left(2\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial r} + \hat{\boldsymbol{r}} \times \mathrm{curl}\,\boldsymbol{u}\right) = \rho\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2} \tag{8.11}$$

而 $\boldsymbol{M}$ 和 Ω_r 按前述的定义，有

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{M} &= \left(\hat{\theta}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi} - \hat{\varphi}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\psi_3 \\ \Omega_r &= (\mathrm{curl}\,\boldsymbol{M})_r = -\frac{1}{r}B^2\psi_3\end{aligned}\right\} \tag{8.12}$$

这里 B^2 是 Beltrami 算子.

$$B^2 = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \tag{8.13}$$

将式(8.12)中的 Ω_r 代入式(8.3)中，并注意到∇^2 和$\frac{\partial}{\partial r}$可以与 B^2 交换顺序，则得

$$\mu\nabla^2\psi_3 - \mu'\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\right)\psi_3 = \rho\frac{\partial^2\psi_3}{\partial t^2} \tag{8.14}$$

我们再引进新函数

$$\varphi_3 = \sqrt{\mu}\,\psi_3 \tag{8.15}$$

则式(8.14)变成为

$$(\nabla^2 - b_3^2)\varphi_3 = \frac{\rho}{\mu}\frac{\partial^2\varphi_3}{\partial t^2} \tag{8.16}$$

式中

$$b_3^2 = \frac{\mu''}{2\mu} - \frac{1}{4}\left(\frac{\mu'}{\mu}\right)^2 + \frac{2}{r}\frac{\mu'}{\mu} \tag{8.17}$$

我们再来推导 SV 型运动($\boldsymbol{u}=\boldsymbol{N}$)。由式(8.9)可知 $S=\mathrm{div}\,\boldsymbol{N}=-g_2u_r$。将此值代入式(8.4)，得到

$$\mu\nabla^2(r\,u_r) + [-(\lambda+\mu)g_2 + 2\mu']\frac{\partial}{\partial r}(r\,u_r) +$$

$$\left[-(\lambda+2\mu)\,g_2' + \left(\frac{\lambda+3\mu}{r} - \lambda'\right)g_2 - \frac{2}{r}\mu'\right](r\,u_r) = \rho\frac{\partial^2(r\,u_r)}{\partial t^2} \tag{8.18}$$

同样，如果将 $S=-g_2\,u_r$ 代入式(8.6)中，可得到另一个关于 u_r 的方程，这两个方程应该是等价的。比较$\nabla^2 u_r$ 和$\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}$前面的系数，可得

$$g_2 = \frac{\mu}{\lambda+\mu}\left(\frac{2\mu'}{\mu} - \frac{\rho'}{\rho}\right) \tag{8.19}$$

再比较这两方程的其他项系数，就可得到要解耦 P 和 SV 运动的条件。这些条件构成了 ρ、λ、μ 和它们的一阶、二阶导数的非线性关系。也就是说要求运动解耦，介质参数随径向距离 r 的变化必须符

合这些条件。对于球形地球介质，高频波一般都能满足，至此，解耦问题就获得了解决。

继续考虑 SV 型运动，根据式(8.9)，有

$$r\,u_r = r(\boldsymbol{N})_r = -B^2\psi_2 \tag{8.20}$$

又已知 Laplace 算子在球坐标系中有

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}B^2 \tag{8.21}$$

由于 B^2 与 ∇^2 可以变换顺序，这样将式(8.20)的关系代入式(8.18)中，就可得到 ψ_2 的方程：

$$\nabla^2\psi_2 + \frac{\rho'}{\rho}\frac{\partial\psi_2}{\partial r} + \frac{1}{\mu}\left\{-(\lambda+\mu)g_2' + \left(\frac{\lambda-3\mu}{r} - \lambda'\right)g_2 - \frac{2}{r}\mu'\right\}\psi_2$$
$$= \frac{\rho}{\mu}\frac{\partial^2\psi_2}{\partial t^2} \tag{8.22}$$

再引进

$$\varphi_2 = \sqrt{\rho}\,\psi_2 \tag{8.23}$$

方程(8.22)可变成如下形式

$$(\nabla^2 - b_2^2)\varphi_2 = \frac{\rho}{\mu}\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial t^2} \tag{8.24}$$

式中

$$b_2^2 = \frac{\lambda+\mu}{\mu}g_2' - \frac{1}{\mu}\left(\frac{\lambda+3\mu}{r} - \lambda'\right)g_2 +$$
$$\frac{1}{2}\frac{\rho''}{\rho} - \frac{1}{4}\left(\frac{\rho'}{\rho}\right)^2 + \frac{\rho'}{r\rho} + \frac{2\mu'}{r\mu} \tag{8.25}$$

对于位移 $\boldsymbol{L}$，它代表 P 型运动。用上面介绍过的同样的方法，可推导出如下两个关于 ψ_1 的方程，它们应该是等价的，即

$$(\lambda+2\mu)\nabla^2\psi_1 + [(\lambda+\mu)g_1 + 2\mu']\frac{\partial\psi_1}{\partial r} +$$
$$\left[(\lambda+\mu)g_1' + \left(2\frac{\lambda+2\mu}{r} + \mu'\right)g_1 - \frac{2}{r}\mu'\right]\psi_1$$
$$= \rho\frac{\partial^2\psi_1}{\partial t^2} \tag{8.26}$$

及

$$(\mu g_1 - 2\mu')\nabla^2\psi_1 + 2\left[\mu\left(\frac{g_1}{r}\right)' + \frac{\mu'}{r} - \mu''\right]\frac{\partial \psi_1}{\partial r} +$$

$$\left[\mu\left(\frac{g_1}{r}\right)'' + \frac{2\mu}{r}\left(\frac{g_1}{r}\right)' - \left(\mu'' + \frac{4\mu'}{r}\right)g_1 - \frac{2}{r}\left(\frac{\mu'}{r} - \mu''\right)\right]\psi_1$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial t^2}[(\rho g_1 - \rho')\psi_1] \qquad (8.27)$$

比较上面两式中的$\nabla^2\psi_1$项和$\frac{\partial^2\psi_1}{\partial t^2}$项的系数，则要求

$$g_1 = \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu}\left(\frac{\rho'}{\rho} - \frac{2\mu'}{\lambda + 2\mu}\right) \qquad (8.28)$$

也引进

$$\varphi_1 = \sqrt{\rho}\,\psi_1 \qquad (8.29)$$

代入方程(8.26)中，得到

$$(\nabla^2 - b_1^2)\varphi_1 = \frac{\rho}{\lambda + 2\mu}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial t^2} \qquad (8.30)$$

其中

$$b_1^2 = -\frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu}g_1' - \left(\frac{2}{r} + \frac{\mu'}{\lambda + 2\mu}\right)g_1 +$$

$$\frac{\rho''}{2\rho} - \frac{1}{4}\left(\frac{\rho'}{\rho}\right)^2 + \frac{\rho'}{r\rho} + \frac{2\mu'}{r\mu} \qquad (8.31)$$

若将位移 $\boldsymbol{L}$、$\boldsymbol{N}$、$\boldsymbol{M}$ 用 φ_1、φ_2、φ_3 表示，则不难写出

$$\boldsymbol{L} = \text{grad}\left(\frac{\varphi_1}{\sqrt{\rho}}\right) + g_1\left(\frac{\varphi_1}{\sqrt{\rho}}\right)\hat{\boldsymbol{r}} = \frac{1}{\sqrt{\rho}}[\text{grad}\varphi_1 - g_3\varphi_1\hat{\boldsymbol{r}}] \qquad (8.32)$$

$$\boldsymbol{N} = \text{curl curl}\left[\frac{\varphi_2}{\sqrt{\rho}}\boldsymbol{r}\right] - g_2\,\text{curl}\left[\frac{\varphi_2}{\sqrt{\rho}}\boldsymbol{r}\right]\times\hat{\boldsymbol{r}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\rho}}\left[\text{curl curl}(\boldsymbol{r}\,\varphi_2) + g_3\left(r\,\text{grad}\varphi_2 - \boldsymbol{r}\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}\right)\right] \qquad (8.33)$$

$$\boldsymbol{M} = \text{curl}\left[\frac{\varphi_3}{\sqrt{\mu}}\boldsymbol{r}\right] = \frac{1}{\sqrt{\mu}}\text{grad}\varphi_3 \times \boldsymbol{r} \qquad (8.34)$$

上面各式中的 g_3 有

$$2g_3 = g_2 - g_1 \tag{8.35}$$

如果运动是谐振形式，则运动方程(8.16)、(8.24)、(8.30)可统一写成

$$(\nabla^2 + k_i^2 - b_i^2)\varphi_i = 0 \qquad (i = 1,2,3) \tag{8.36}$$

这里

$$k_i^2 = \frac{\omega^2}{v_i^2}, \qquad v_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad v_2^2 = v_3^2 = \frac{\mu}{\rho} \tag{8.37}$$

如果介质的径向非均匀程度较小，能满足如下关系：

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\Lambda}{r} \ll 1, \quad \Lambda\left|\frac{\mu'}{\mu}\right| \ll 1, \quad \Lambda\left|\frac{\lambda'}{\lambda}\right| \ll 1 \\ &\Lambda\left|\frac{\rho'}{\rho}\right| \ll 1, \quad \Lambda\left|\frac{\mu''}{\mu}\right|^{1/2} \ll 1, \quad \Lambda\left|\frac{\rho''}{\rho}\right|^{1/2} \ll 1 \end{aligned}\right\} \tag{8.38}$$

式中 Λ 为波长，r 取在地球表面的径向半径 $r=a$，则有

$$b_i^2 \ll k_i^2 \qquad (i = 1,2,3) \tag{8.39}$$

这种情况下，运动方程(8.36)可简化为 Helmholtz 方程，即有

$$(\nabla^2 + k_i^2)\varphi_i = 0 \qquad (i = 1,2,3) \tag{8.40}$$

我们知道，在均匀介质中，P 波是无旋的，S 波是无散的。而在径向非均匀介质中，根据式(8.8)和(8.9)，有

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{curl}\, \boldsymbol{L} &= g_1 \boldsymbol{L} \times \hat{\boldsymbol{r}} \\ \mathrm{div}\, \boldsymbol{N} &= -g_2 \boldsymbol{N} \cdot \hat{\boldsymbol{r}} \end{aligned}\right\} \tag{8.41}$$

这意味着 $\boldsymbol{L}$ 不一定是无旋的，$\boldsymbol{N}$ 也不一定是无散的；而 $\boldsymbol{M}$ 却总是无散的。

由上面的推导可知，在体波频率足够高的情况下，按式(8.39)的条件，比较 φ_i、$\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial r}$、$\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial r}$、$\dfrac{\partial \varphi_3}{\partial r}$ 等量的相对大小，当 $\Lambda \to 0$ 时，有

$$\left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)\varphi_i = O\left(\frac{1}{\Lambda}\varphi_i\right) \quad (i = 1,2,3) \tag{8.42}$$

$$
\left.\begin{aligned}
L &= \frac{1}{\sqrt{\rho}} \operatorname{grad} \varphi_1 \\
N &= \frac{1}{\sqrt{\rho}} \operatorname{curl} \operatorname{curl} (\boldsymbol{r}\, \varphi_2) \\
M &= \frac{1}{\sqrt{\mu}} \operatorname{curl} (\boldsymbol{r}\, \varphi_3)
\end{aligned}\right\} \tag{8.43}
$$

式中的 $\boldsymbol{M}$ 未作近似。辅助函数 φ_1、φ_2、φ_3 也称为位移势。式(8.43)表示了 P、SV 和 SH 位移的解耦。

§3　程函方程与射线几何学

我们已经把 Navier 运动方程简化为三个标量方程，每一个方程都含有不同的可变的波数。接下来讨论在弱非均匀性(8.38)条件下，高频 P、S 波在无限介质中的传播。

对于各向同性的均匀无限介质，波前和传播方向的概念与平面波的概念有紧密的联系，此时，平面波的传播方向和振幅是处处相同的。如果我们所要求解的问题的几何性和 λ、μ、ρ 随位置的变化都比较复杂，那么，解这些问题就还会遇到数学上的困难。但若在 P、SV 波解耦的情况下，即波的传播方向与振幅在波长量级的距离上仅有少许变化，那么，波动可有较简单的数学表达形式。此时可借用平面波理论来处理。就是说，在相对小的空间区域及时间间隔内，设解耦的运动方程的解有 Ae^{iQ} 的形式，即类似于平面波表示式 $Be^{i(\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})}$。进一步认为 A 和 Q 都是坐标和时间的函数，A 是一个缓变函数而相位 Q 几乎是线性的。此相位函数也可推广为用 Taylor 级数的一阶近似表达，即

$$
Q(\boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{r},\, t_0 + t) = Q(\boldsymbol{r}_0, t_0) + \boldsymbol{r}\cdot(\nabla Q)_0 + t\left(\frac{\partial Q}{\partial t}\right)_0 \tag{8.44}
$$

将它与在$(\boldsymbol{r}, t)$处相应的平面波表达式比较，有

$$\omega = -\left(\frac{\partial Q}{\partial t}\right)_0, \boldsymbol{k} = (\nabla Q)_0 \tag{8.45}$$

现在，这 ω 和 $\boldsymbol{k}$ 是 $\boldsymbol{r}_0$ 和 t_0 的函数，因而不恒等于频率与波数。在弹性介质中的平面波有 $|\boldsymbol{k}|^2 = \omega^2/V^2$，其中 V 是传播速度，我们类似地可写出

$$(\nabla Q)^2 = \frac{1}{V^2}\left(\frac{\partial Q}{\partial t}\right)^2 \tag{8.46}$$

式中 $V(\boldsymbol{r})$ 是 $\boldsymbol{r}$ 的函数，它是波传播的轨迹速度，因而标量函数 $Q(\boldsymbol{r},t)$ 称作为程函（eikonal，这词来源于希腊文，有映像（image）的意思），方程（8.46）称作为程函方程。

在地震学应用中，我们可假定 Q 有这样的形式：

$$Q(\boldsymbol{r},t) = -\omega t + \omega\psi(\boldsymbol{r}) \tag{8.47}$$

这里 $\psi(\boldsymbol{r})$ 与频率无关。因而程函方程可简化为

$$(\nabla\psi)^2 = \frac{1}{V^2} \tag{8.48}$$

上式中的 V^2 在 P 波情况等于 $(\lambda+2\mu)/\rho$，在 S 波情况下等于 μ/ρ。

方程（8.48）也可从如下更为严格的推导来得到。将运动方程（8.40）中的下标去掉，写成一般的形式：

$$\nabla^2\varphi + \frac{\omega^2}{V^2(r)}\varphi = 0 \tag{8.49}$$

用级数形式求其近似解，假定其级数解是

$$\varphi = e^{-i\omega\psi}\sum_{n=0}^{\infty}(i\omega)^{-n}\xi_n \tag{8.50}$$

式中的 ψ 和 ξ_n 均与频率无关。将式（8.50）代入方程（8.49）中，并让 ω 的每一幂次项的系数为零，我们就能得到两个关于 ψ 和 ξ_n 的方程：

$$|\text{grad}\ \psi|^2 = \frac{1}{V^2} \tag{8.51}$$

$$2(\text{grad}\psi)\cdot\text{grad}\xi_n + \xi_n\nabla^2\psi = \nabla^2\xi_{n-1}$$
$$(n \geqslant 0, \xi_{-1} = 0) \tag{8.52}$$

对于方程(8.52)，我们主要关心的是 $n=0$ 项，让 $\xi_0=A$，则可重新写成

$$(\mathrm{grad}(\ln A))\cdot(\mathrm{grad}\psi)=-\frac{1}{2}\nabla^2\psi \tag{8.53}$$

式(8.51)即为程函方程，在此基础上，式(8.52)是关于振幅的方程，由这两个方程替代了波动方程。式(8.51)是一个非齐次的一阶二次偏微分方程，只要求出它的解，则由式(8.53)就可确定 $\mathrm{grad}\psi$ 方向上的 $\ln A$ 梯度的分量。但垂直于 $\mathrm{grad}\psi$ 方向上的 $\ln A$ 梯度仍无法确定，因而方程(8.53)也允许在这些方向上 A 是不连续的。

现在再来对相位函数 ψ 的性质作进一步的讨论。

$$\psi(\boldsymbol{r})=\text{常数} \tag{8.54}$$

这代表一簇曲面，称为波曲面或波前，在波前上相位是常数。根据方程(8.51)，$V\mathrm{grad}\psi$ 是一个单位矢量，如果用 $\hat{\boldsymbol{p}}$ 表示这个单位矢量，它是垂直于波前的，则有

$$\hat{\boldsymbol{p}}=V\mathrm{grad}\psi=\frac{\mathrm{grad}\psi}{|\mathrm{grad}\psi|} \tag{8.55}$$

假定 $\psi(\boldsymbol{r})$ 在某一空间区域内有连续的一阶偏导数，对波前簇方程(8.54)来说，这就保证了有一个与它正交的曲线簇的存在。此正交于波前簇的曲线簇称作为射线，这些射线一般为空间曲线，它们的方向与 $\mathrm{grad}\psi$ 的方向处处一致。

沿着射线的弧长参数用 s 表示。如果 $\boldsymbol{r}(s)$ 代表射线上某点 P 的位置矢量，这样 $\hat{\boldsymbol{p}}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}$，考虑式(8.55)，射线方程可写成

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}=V\mathrm{grad}\psi \tag{8.56}$$

在球极坐标中，可得到

$$\frac{\mathrm{d}r}{\partial\psi/\partial r}=\frac{r^2\mathrm{d}\theta}{\partial\psi/\partial\theta}=\frac{(r\sin\theta)^2\mathrm{d}\varphi}{\partial\psi/\partial\varphi}=\text{常数} \tag{8.57}$$

考虑两个相邻的波前 $\psi=$ 常数和 $\psi+\delta\psi=$ 常数，则有

$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}s}=\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\mathrm{grad}\psi=\frac{1}{V} \tag{8.58}$$

被这两个波前所截取的射线长度为 ds，它正比于速度 V，有 $\partial s = V\partial t$（t 是时间），则由式(8.58)得

$$\psi - \psi_0 = \int_{s_0}^{s} \frac{1}{V} \mathrm{d}s = t - t_0 \tag{8.59}$$

因而函数 ψ 实际上是沿着射线所度量的走时。(8.59)式给出了沿着一条给定的射线算其走时的显式。

也可注意到波数矢量 $\boldsymbol{k}$ 是与 $\hat{\boldsymbol{p}}$、ψ 有关的，即

$$\boldsymbol{k} = \frac{\omega}{V}\hat{\boldsymbol{p}} = \omega(\nabla\psi) \tag{8.60}$$

定义慢度 $S = \frac{1}{V}$ 由式(8.56)及(8.58)得到

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(S\hat{\boldsymbol{p}}) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(S\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\mathrm{grad}\psi) \\ &= \mathrm{grad}\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}s} = \mathrm{grad}S\end{aligned} \tag{8.61}$$

因而射线方程变成

$$S\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s^2} + \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s} = \mathrm{grad}S \tag{8.62}$$

这是一个三维空间中的射线二阶矢量微分方程。矢量 $S\hat{\boldsymbol{p}}$ 称为射线矢量，因有 $\mathrm{grad}\psi = S\hat{\boldsymbol{p}}$，故射线矢量有

$$\mathrm{curl}(S\hat{\boldsymbol{p}}) = 0 \tag{8.63}$$

在均匀介质中，S＝常量，因而射线方程(8.62)简化为$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s^2} = 0$，这时它的解有 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}s$ 这代表一条直线，它的方向是 $\boldsymbol{a}$，通过 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{b}$ 点。这时程函方程(8.51)有一特解为

$$\psi = \frac{1}{V}(ax + by + cz),\ a^2 + b^2 + c^2 = 1$$

这表示波前是一平面。而另外一个解为 $\psi = r/V$，这表示球面波前。

射线方程(8.61)也可写成这样的形式：

$$S\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{p}}}{\mathrm{d}s} + \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}s}\hat{\boldsymbol{p}} = \mathrm{grad}S \tag{8.64}$$

很明显，一般情况下，在射线上 $\hat{\boldsymbol{p}}$ 的方向会逐点改变，因而射线通常是弯曲的。如果给定射线上相邻两点的切向矢量，则给定点 P 上的射线曲率可定义为：这两个矢量的夹角除以这两点间弧长 δs 在 $\delta s \to 0$ 时的极限值。用 ρ 表示射线的曲率半径，则曲率为

$$曲率 = \frac{1}{\rho} = \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}s} \tag{8.65}$$

这里 i 是 P 点处的射线切线与径向矢量之间的夹角（见图 8.1）。由微分几何知，曲率矢量有

$$\boldsymbol{m} = \frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{p}}}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{\rho}\hat{\boldsymbol{\nu}},\ |\boldsymbol{m}| = \frac{1}{\rho},\ \boldsymbol{m}\cdot\hat{\boldsymbol{p}} = 0 \tag{8.66}$$

式中 $\hat{\boldsymbol{\nu}}$ 是单位主法线。

将方程(8.63)展开，得

$$S\ \mathrm{curl}\ \hat{\boldsymbol{p}} + (\mathrm{grad}S) \times \hat{\boldsymbol{p}} = 0 \tag{8.67}$$

式中 grad$S$ 用(8.64)式代入，同时应用 $\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{p}}}{\mathrm{d}s} = \boldsymbol{m}$，则上式变为

$$\mathrm{curl}\hat{\boldsymbol{p}} + \boldsymbol{m} \times \hat{\boldsymbol{p}} = 0 \tag{8.68}$$

再用 $\hat{\boldsymbol{p}}$ 矢量叉乘上式，可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{m} &= (\mathrm{curl}\hat{\boldsymbol{p}}) \times \hat{\boldsymbol{p}} = \frac{1}{S}\hat{\boldsymbol{p}} \times [(\mathrm{grad}S) \times \hat{\boldsymbol{p}}] \\ &= \frac{1}{S}[\mathrm{grad}S - (\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\mathrm{grad}S)\hat{\boldsymbol{p}}] = \frac{1}{S}[\mathrm{grad}S - \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}s}\hat{\boldsymbol{p}}]\end{aligned} \tag{8.69}$$

这关系表示(grad$S$)是在 $\hat{\boldsymbol{p}}$ 和 $\boldsymbol{m}$ 所构成的平面内，这个平面也称为射线的密切面(the osculating plane)。

用单位矢量 $\hat{\boldsymbol{\nu}}$ 点乘上式，则得

$$|\boldsymbol{m}| = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{S}\hat{\boldsymbol{\nu}}\cdot\mathrm{grad}S = -\hat{\boldsymbol{\nu}}\cdot\mathrm{grad}(\ln V) \tag{8.70}$$

因为 ρ 是正值，上式表明沿着主法线速度是减小的，即射线向减小速度的方向弯曲，也可从式(8.66)至(8.68)推导出

$$\frac{1}{\rho} = |\hat{\boldsymbol{p}} \times \boldsymbol{m}| = |\mathrm{curl}\hat{\boldsymbol{p}}| = \frac{1}{S}|\hat{\boldsymbol{p}} \times \mathrm{grad}S| \tag{8.71}$$

由式(8.67)可知，curl$\hat{\boldsymbol{p}}$ 是垂直于 $\boldsymbol{m}$ 及 $\hat{\boldsymbol{p}}$ 的，因此 curl $\hat{\boldsymbol{p}}$ 的方

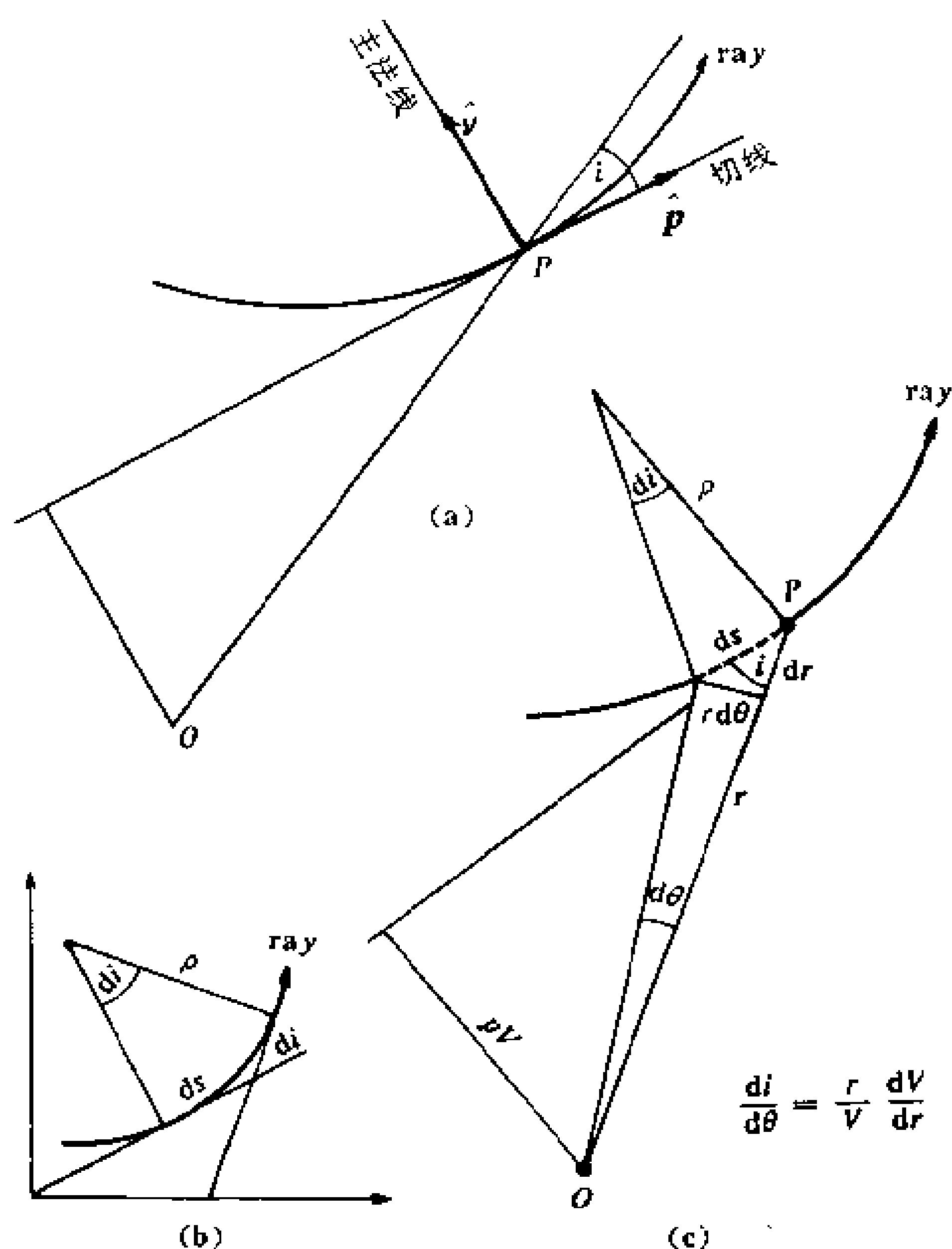


图 8.1　基本射线几何

向与 P 点密切面的法线方向相同，称作副法线。上述都是描述射线的基本几何学。

现在我们仅限于讨论 $S=S(r)$的情况，即射线只是平面曲线，有固定不变的副法线。

为后面阐述问题的方便，在这里再证明一下大家熟知的 Fer-

mat 原理在地震射线中的应用。

已知在介质中有任意两点 P 和 Q，经过这两点的地震射线必定是这样的路径——使得所花费的时间是稳定的极值。下面给予证明。

由式(8.59)，沿射线的走时有

$$t_{PQ}=\int_P^Q S\mathrm{d}s=\int_P^Q \frac{1}{V}\mathrm{d}s=\psi_Q-\psi_P \tag{8.72}$$

它的变分是

$$\delta t_{PQ}=\int_P^Q[\delta S\mathrm{d}s+S\delta(\mathrm{d}s)] \tag{8.73}$$

进一步，还有

$$\left.\begin{aligned}&\delta S=\delta\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{grad}S \qquad (\mathrm{d}s)^2=\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}\\&\mathrm{d}s\delta(\mathrm{d}s)=\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\delta(\mathrm{d}\boldsymbol{r}) \qquad \delta(\mathrm{d}s)=\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\mathrm{d}(\delta\boldsymbol{r})\end{aligned}\right\} \tag{8.74}$$

考虑到 P 和 Q 是两固定点，在这两点上应有 $\delta\boldsymbol{r}=0$，分部积分可得到：

$$\int_P^Q S\delta(\mathrm{d}s)=\int_P^Q S\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\mathrm{d}(\delta\boldsymbol{r})=-\int_P^Q\frac{\mathrm{d}(S\hat{\boldsymbol{p}})}{\mathrm{d}s}\cdot\delta\boldsymbol{r}\mathrm{d}s$$

代入式(8.73)，可得

$$\delta t_{PQ}=\int_P^Q\left[\mathrm{grad}S-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(S\hat{\boldsymbol{p}})\right]\cdot\delta\boldsymbol{r}\mathrm{d}s \tag{8.75}$$

将关系式(8.61)代入，就得到所要求证明的结果 $\delta t_{PQ}=0$。如果介质是均匀的，由 Fermat 原理可知，射线必须是直线，因为这可使花费的时间取最小值。

接着，我们再对球对称介质中的射线进行讨论。介质中的慢度只是 r 的函数，即 $S=S(r)$。考虑射线方程(8.61)，则可得如下关系：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[\boldsymbol{r}\times(S\hat{\boldsymbol{p}})]&=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}\times(S\hat{\boldsymbol{p}})+\boldsymbol{r}\times\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(S\hat{\boldsymbol{p}})\\&=\hat{\boldsymbol{p}}\times(S\hat{\boldsymbol{p}})+\boldsymbol{r}\times\mathrm{grad}S(r)=0\end{aligned} \tag{8.76}$$

这意味着 $\boldsymbol{r}\times(S\hat{\boldsymbol{p}})$ 沿着射线是常数，可定义

$$S r \sin i = \frac{r \sin i}{V} = p \tag{8.77}$$

按式(8.76)要求，p 沿着一条射线应是常数，常称它为射线参数。式(8.77)也表示每一条射线都是平面曲线，沿着射线，$(S r \sin i)$保持不变。若一个质点受中心力影响而沿射线运动，则式(8.77)也表示这个质点的角动量守恒。射线理论与物质质点运动之间的这种类似性原因在于，程函方程类似于经典力学中的 Hamilton-Jacobi 方程。

在现在讨论的球对称情况下，程函方程(8.48)简化成

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta}\right)^2 = S^2(r) \tag{8.78}$$

用分离变数法，设

$$\psi(r,\theta) = f(\theta) + g(r) \tag{8.79}$$

代入方程(8.78)，得到解为

$$\psi = k\theta \pm \int_{r_h}^{r} \frac{dr}{r} \sqrt{S^2 r^2 - k^2} \tag{8.80}$$

式中 k 为任意常数。当 $\theta=0$，$r=r_h$ 时，$\psi=0$。式中的正负号应这样确定：沿着射线进行积分，如 $dr>0$，则取"+"；如 $dr<0$，则取"-"。如果在整条射线上，dr 要改变符号，这时将积分分段进行，如图 8.2。将 $\hat{p}$ 分解成：

$$\hat{\boldsymbol{p}} = \hat{\boldsymbol{\theta}} \sin i + \hat{\boldsymbol{r}} \cos i \tag{8.81}$$

将式(8.55)代入式(8.80)，得：

$$\frac{\hat{\boldsymbol{p}}}{V} = S\hat{\boldsymbol{p}} = \operatorname{grad}\psi = \hat{\boldsymbol{\theta}}\frac{k}{r} \pm \hat{\boldsymbol{r}}\frac{1}{r}\sqrt{r^2 S^2 - k^2} \tag{8.82}$$

联系式(8.81)和式(8.82)，可得

$$k = S r \sin i = p \tag{8.83}$$

所以，式(8.80)中的 k，实际上就是射线参数 p。由于 ψ 实际上是沿着射线的走时，这样式(8.80)可写成

$$T = p\theta \pm \int_{r_h}^{r} (\eta^2 - p^2)^{1/2} \frac{dr}{r} \tag{8.84}$$

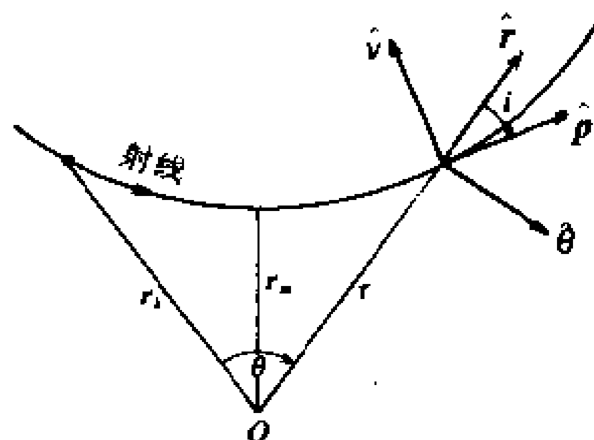


图 8.2　球对称介质中的射线几何

式中 $\eta=Sr=\frac{r}{V}$，将此式对 p 作微商，即有

$$\theta(r)=\pm p\int_{r_h}^{r}(\eta^2-p^2)^{-1/2}\frac{\mathrm{d}r}{r} \tag{8.85}$$

从上式代入式(8.84)，得

$$T(r)=\pm\int_{r_h}^{r}\eta^2(\eta^2-p^2)^{-1/2}\frac{\mathrm{d}r}{r} \tag{8.86}$$

从式(8.85)，也可推导出弧长元的表达式为：

$$\mathrm{d}s=[(\mathrm{d}r)^2+(r\mathrm{d}\theta)^2]^{1/2}=\pm\eta(\eta^2-p^2)^{-1/2}\mathrm{d}r \tag{8.87}$$

射线的曲率可从式(8.71)得出，为

$$\begin{aligned}\frac{1}{\rho}&=\frac{1}{S}|\hat{\boldsymbol{p}}\times\mathrm{grad}S(r)|=\frac{1}{S}\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}r}|\hat{\boldsymbol{p}}\times\hat{\boldsymbol{r}}|\\&=-\frac{1}{V}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\sin i=-\frac{p}{r}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}=\frac{p}{\eta}\left(\frac{1}{\eta}\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}r}-\frac{1}{r}\right)\end{aligned} \tag{8.88}$$

射线最低点的曲率半径是在 $\sin i=\frac{\pi}{2}$ 处，它有

$$\rho_m=-\frac{V}{\mathrm{d}V/\mathrm{d}r} \tag{8.89}$$

同时还有　$$\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}r}=\frac{1}{V}\left(1-\frac{r}{V}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\right)=\frac{1}{V}\left(1+\frac{r}{\rho_m}\right) \tag{8.90}$$

但如果射线曲率向下取为正，则上式应改为

$$\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}r}=\frac{1}{V}\left(1-\frac{r}{\rho_m}\right)$$

若$\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}r}=0$，则 $\rho_m=r$，这样的射线为一段圆弧，它的圆心在坐标原点 O；若$\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}r}>0$；则 $\rho_m>r$，这种情况的射线是向上弯曲的；反之，若$\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}r}<0$；则射线向下弯曲。地球内部仅有很少区域$\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}r}<0$，所以，一般情况下，射线都是向上弯曲，符合条件$\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}r}>0$（或$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}<\frac{V}{r}$）。图 8.3 是从震源至台站的射线及各参数所代表的几何示意，图中给定 p 的一条射线，由式(8.84)至(8.86)描述这条特定射线的方程及它的走时。用 Δ 表示震源和接收点所构成的地球中心角。

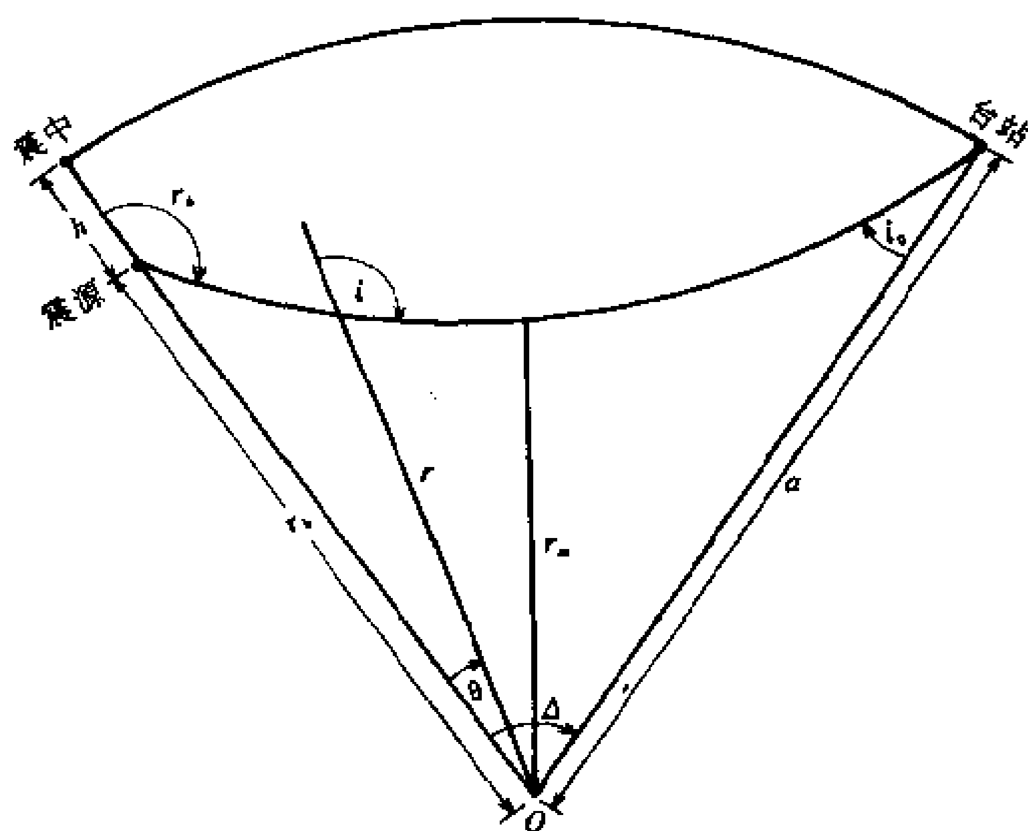


图 8.3　直达波射线参数

进而我们考察由一个震源发出的不同射线。任意一条射线上一点的坐标可由两个参数(p,r)来确定。即 p 表示选定的是哪一条射线，而 r 是沿这条射线的动坐标。由式(8.84)知：

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \theta}\right)_r = p \tag{8.91}$$

上式称为 Benndorf 关系式，也可作如下简单的几何证明，如图 8.4，两条相邻射线$\overset{\frown}{FA}$与$\overset{\frown}{FB}$，即此两射线与同一大圆面的交点分别是 A 与 B，它们与震源 F 构成的中心角为 θ 与 $\theta+\delta\theta$，相应的走时分别为 T 和 $T+\delta T$。从图中可看出，有 $\delta T=\frac{BC}{V(r)}=\frac{r\delta\theta\sin i}{V}=p\delta\theta$，取极限即为$\left(\frac{\partial T}{\partial\theta}\right)_r=p$，若 A 与 B 是射线在地球表面的出射点，则可将偏导数换成$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}\Delta}$。由于地震台站一般都设置在地球表面，

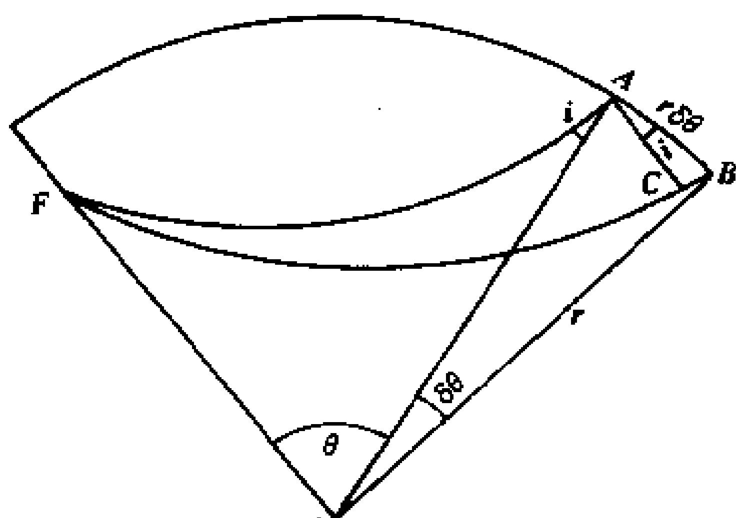


图 8.4　相邻射线的关系

因而也可将式(8.84)写成对于整条射线路径而言，即

$$T = p\Delta + \left[\int_{r_m}^{r_h} + \int_{r_m}^{a}\right](\eta^2 - p^2)^{1/2}\frac{\mathrm{d}r}{r} \tag{8.92}$$

式中 T 是沿一给定射线的总走时，a 是地球半径。同样道理，式(8.85)也可写成

$$\Delta(p) = p\left[\int_{r_m}^{r_h} + \int_{r_m}^{a}\right](\eta^2 - p^2)^{-1/2}\frac{\mathrm{d}r}{r} \tag{8.93}$$

式(8.92)在地震学研究中是一个极为重要的关系式，它把观测到的体波走时和经地球介质的P、S波的传播速度联系起来了，因而可由体波走时来获得地球内部的速度结构，这是地震学中的重要反演问题，在第十章再作较细的讨论。

§4 射线振幅与走时计算公式

前面我们通过程函方程，讨论了射线的走时问题，一旦知道了每条射线上的 ψ(或 t)，则可以求解方程(8.52)，即计算射线的振幅。我们感兴趣的是方程的低阶展开项 ξ_0，在地震学的射线理论中，此称为几何弹性动力学近似(GEA，The Geometric Elastodynamic Approximation)。

设置球坐标(r,θ,φ)，它的原点在地心，极轴通过震源。再设一描述射线的固有坐标(t,i_h,φ)，它的原点在震源，t 表示沿射线的走时，i_h 为射线离源角，φ 为方位角(图 8.5)。

t＝常数的曲面代表波前。i_h＝常数，φ＝常数的曲线正交于波前，也就是射线，且

$$t \geqslant 0,\ 0 \leqslant i_h \leqslant \pi,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi \tag{8.94}$$

固有坐标系的射线动点的单位矢量为$(\hat{t},\hat{i}_h,\hat{\varphi})$，它们构成正交系统，都取其增加的方向为正方向。在任意一动点 $P(t,i_h,\varphi)$上，径向矢量与射线切线间的夹角为 i，则 Snell 定理可表示为

$$p = \frac{r\sin i}{V(r)} = \frac{r_h\sin i_h}{V(r_h)} \tag{8.95}$$

式中 p 为射线参数，r_h 是震源的径向坐标。

由图 8.5 可看出两个坐标系有如下关系：

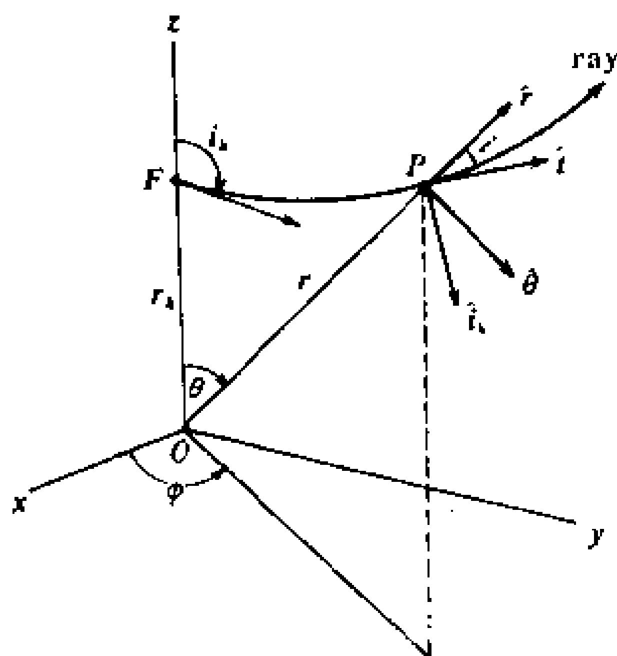


图8.5 固有坐标系

$$\hat{t} = \hat{r}\cos i + \hat{\theta}\sin i, \quad \hat{i}_h = -\hat{r}\sin i + \hat{\theta}\cos i$$

这样，可计算走时为

$$t = \int_{r_h}^{r} \frac{\mathrm{d}r}{V\cos i} = \pm \int_{r_h}^{r} \frac{r\mathrm{d}r}{V^2\left(\dfrac{r^2}{V^2} - p^2\right)^{1/2}}$$

$$= p\theta \pm \int_{r_h}^{r}\left(\frac{r^2}{V^2} - p^2\right)^{1/2}\frac{\mathrm{d}r}{r} \tag{8.96}$$

简单地微分，得到

$$\left.\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)_{i_h} = V\cos i, \qquad \left(\frac{\partial \theta}{\partial t}\right)_{i_h} = \frac{V\sin i}{r} \\
&\left(\frac{\partial t}{\partial r}\right)_{\theta} = \frac{\cos i}{V} \qquad \left(\frac{\partial t}{\partial \theta}\right)_{r} = p \\
&\left(\frac{\partial \theta}{\partial i_h}\right)_{t} = pI_h\cos^2 i\cot i_h \\
&\left(\frac{\partial r}{\partial i_h}\right)_{t} = -p^2 I_h V\cos i\cot i_h
\end{aligned}\right\} \tag{8.97}$$

式中

$$I_h(r,i_h) = \left(\frac{\partial p}{\partial \theta}\right)_r^{-1} = \pm \int_{r_h}^{r} (r^2 - V^2 p^2)^{-3/2} V r \mathrm{d}r \quad (8.98)$$

再应用式(8.85),有

$$\theta = \pm p \int_{r_h}^{r} \frac{\mathrm{d}r}{r\left(\frac{r^2}{V^2} - p^2\right)^{1/2}}$$

及

$$\tan i = r\left(\frac{\partial \theta}{\partial r}\right)_{i_h} \quad (8.99)$$

也可得到

$$\left(\frac{\partial i_h}{\partial r}\right)_\theta = -\frac{V \tan i_h}{r^2 I_h \cos i}, \qquad \left(\frac{\partial i_h}{\partial \theta}\right)_r = \frac{\tan i_h}{p I_h} \quad (8.100)$$

两坐标系之间的微分关系为

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{d}r &= \left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)_{i_h} \mathrm{d}t + \left(\frac{\partial r}{\partial i_h}\right)_t \mathrm{d}i_h \\ \mathrm{d}\theta &= \left(\frac{\partial \theta}{\partial t}\right)_{i_h} \mathrm{d}t + \left(\frac{\partial \theta}{\partial i_h}\right)_t \mathrm{d}i_h \\ \mathrm{d}\varphi &= \mathrm{d}\varphi \end{aligned}\right\} \quad (8.101)$$

且线元平方之间的关系为

$$(\mathrm{d}r)^2 + (r\mathrm{d}\theta)^2 + (r\sin\theta\mathrm{d}\varphi)^2$$
$$= V^2(\mathrm{d}t)^2 + (prI_h\cos i\cot i_h)^2(\mathrm{d}i_h)^2 + (r\sin\theta)^2(\mathrm{d}\varphi)^2 \quad (8.102)$$

式中未出现线元交叉相乘项,这表明坐标系(t,i_h,φ)是正交的。引进标量因子

$$h_1 = V, \qquad h_2 = |prI_h\cos i\cot i_h|, \qquad h_3 = r\sin\theta$$

则线元平方为

$$h_1^2(\mathrm{d}t)^2 + h_2^2(\mathrm{d}i_h)^2 + h_3^2(\mathrm{d}\varphi)^2$$

现在,我们可回到方程(8.52)。用式(8.55),可将方程(8.52)变成

$$\frac{\partial \xi_n}{\partial t} + \left(\frac{1}{2}V^2\nabla^2 t\right)\xi_n = \frac{1}{2}V^2\nabla^2\xi_{n-1} \quad (8.103)$$

上式为形如$\frac{dy}{dx}+a(x)y=b(x)$的一阶常微分方程，可用 Lagrange 参数变更法求解，得

$$\xi_n(t) = Q\left(\frac{t}{t_0}\right)\left[\xi_n(t_0) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\frac{V^2\nabla^2\xi_{n-1}}{Q(t/t_0)}dt\right] \quad (8.104)$$

其中

$$Q(t/t_0) = \frac{q(t)}{q(t_0)} = \exp\left[-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}V^2(\nabla^2 t)dt\right] \quad (8.105)$$

式(8.104)是一个确定各个 ξ 的递推公式。已知 $\xi_{-1}=0$，可得

$$\xi_0(t) = Q\left(\frac{t}{t_0}\right)\xi_0(t_0) \quad (8.106)$$

将 $\xi_0(t)$代入式(8.104)，得

$$\xi_1(t) = Q\left(\frac{t}{t_0}\right)\left[\xi_1(t_0) - \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\frac{V^2\nabla^2\{Q(t/t_0)\xi_0(t_0)\}}{Q(t/t_0)}dt\right] \quad (8.107)$$

原则上，由递推公式能得到任意 $\xi_n(t)$的显式。当定义 ξ_0 为零时，则式(8.107)就为 ξ_2 的显式。

由于

$$\nabla^2 t = \frac{1}{h_1h_2h_3}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\right) = \frac{1}{V^2}\frac{\partial}{\partial t}\ln\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\right) \quad (8.108)$$

从式(8.105)中导出 $q(t)$为

$$\begin{aligned} q(t) &= \exp\left(-\frac{1}{2}\int^{t}V^2\nabla^2 t dt\right) = \left(\frac{h_1}{h_2h_3}\right)^{1/2} \\ &= \frac{1}{r}\left|\frac{V\tan i_h}{pI_h\sin\theta\cos i}\right|^{1/2} = \frac{1}{r}\left|\frac{V}{\sin\theta\cos i}\left(\frac{\partial i_h}{\partial\theta}\right)_r\right|^{1/2} \end{aligned} \quad (8.109)$$

很明显，有

$$q(t) = \left(\frac{h_1}{h_2h_3}\right)^{1/2} \propto \left(\frac{V}{W}\right)^{1/2} \quad (8.110)$$

这里 W 是(i_h,φ)表面上的面积元，也就是射线管$[(i_h,\varphi),(i_h+di_h,\varphi+d\varphi)]$的截面积。考虑式(8.110)与(8.105)，可得到

$$Q\left(\frac{t}{t_0}\right) = \left(\frac{VW_0}{V_0W}\right)^{1/2} \tag{8.111}$$

我们已知道，在平衡条件下，能流密度 $\boldsymbol{\Sigma}$ 要服从如下方程，即

$$\mathrm{div}\boldsymbol{\Sigma} = 0 \tag{8.112}$$

因为能流沿射线流动，可将它写成

$$\boldsymbol{\Sigma} = \hat{\boldsymbol{p}}A \tag{8.113}$$

式中 A 是能流密度矢量的振幅值，即 $A = |\boldsymbol{\Sigma}|$。用 $\hat{\boldsymbol{p}} = V\mathrm{grad}\psi$ 代入，则有

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\boldsymbol{\Sigma} &= \mathrm{div}(\hat{\boldsymbol{p}}A) = \mathrm{div}(AV\nabla\psi) = AV\nabla^2\psi + \nabla\psi\cdot\nabla(AV) \\ &= AV\nabla^2\psi + \frac{1}{V}\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\nabla(AV) = AV\nabla^2\psi + \frac{1}{V}\frac{\partial}{\partial s}(AV)\end{aligned} \tag{8.114}$$

用 t 代替 ψ，并考虑条件(8.112)，得到

$$\frac{1}{AV}\frac{\partial}{\partial s}(AV) = -V\nabla^2 t$$

积分后，可有

$$\frac{VA}{V_0A_0} = \exp\left[-\int_{s_0}^{s} V\nabla^2 t\mathrm{d}s\right] = \exp\left[-\int_{t_0}^{t} V^2\nabla^2 t\mathrm{d}t\right] \tag{8.115}$$

因为 A 是在单位时间内、单位面积上所流过的能量，因而定有 $A \propto \frac{1}{W}$ 的关系，那么式(8.115)也可变为

$$\frac{VW_0}{V_0W} = \exp\left[-\int_{t_0}^{t} V^2\nabla^2 t\mathrm{d}t\right] \tag{8.116}$$

这个结果也可直接从式(8.105)和(8.111)两式得到。

上述从式(8.96)至(8.116)得到的高频地震波射线的走时和振幅公式是弹性动力学的几何近似的基本内容。下面对于给定速度分布的介质，举两个应用计算的例子。

1. 均匀球中的射线

在均匀介质中，介质的速度 V_0 = 常数，射线为直线(图 8.6)。

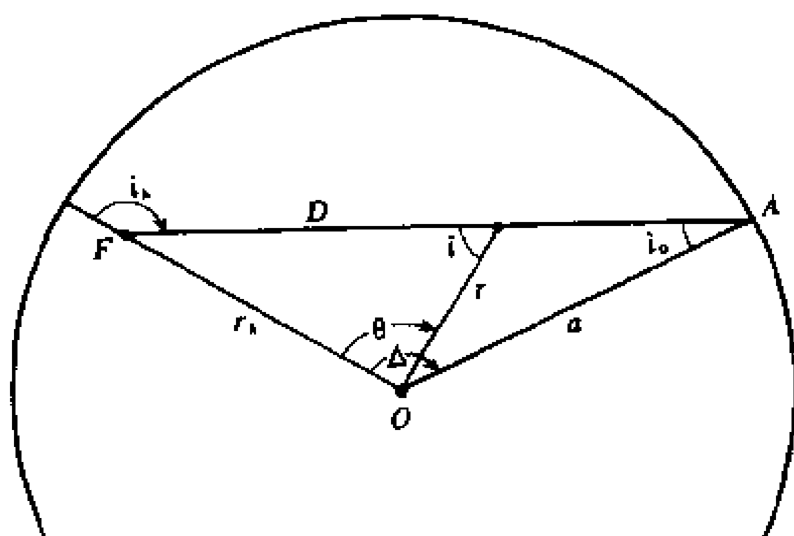


图 8.6　均匀介质中的射线几何关系

从图 8.6 三角形 OFA 的几何性质知，

$$\left.\begin{aligned}&i_h = i_0 + \Delta = i + \theta\\&\mathrm{d}i = -\,\mathrm{d}\theta(\text{对于一条固定射线})\\&D(r) = r\cos i - r_h\cos i_h\\&pV_0 = a\sin i_0 = r_h\sin i_h = r\sin i\end{aligned}\right\}\qquad(8.117)$$

因而直达波的走时 $T=\dfrac{D(a)}{V_0}$。若震源在地表，则很容易地得到

$$\left.\begin{aligned}&T = \frac{2a}{V_0}\sin\frac{\Delta}{2} = \frac{D}{V_0},\qquad D = 2a\sin\frac{\Delta}{2},\\&p = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}\Delta} = \frac{a}{V_0}\cos\frac{\Delta}{2},\qquad \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\Delta} = -\frac{D}{4V_0}\end{aligned}\right\}\qquad(8.118)$$

这些结果也可从前面给出的几何弹性动力学近似公式中得到。从式(8.98)，有

$$I_h(r,i_h) = \frac{V_0}{r_h\cos i_h} - \frac{V_0}{r\cos i} = \frac{V_0D(r)}{rr_h\cos i\cos i_h}\qquad(8.119)$$

因而

$$h_1 = V_0,\qquad h_2 = D(r),\qquad h_3 = D\sin i_h\qquad(8.120)$$

再从式(8.109)，有

$$q(t) = \frac{1}{D}\left(\frac{V_0}{\sin i_h}\right)^{1/2}, \quad Q(t/t_0) = \frac{D_0}{D} = \frac{t_0}{t} \qquad (8.121)$$

这样，射线振幅展开式的第一项变为

$$\xi_0(t) = \xi_0(t_0)\left(\frac{D_0}{D}\right)$$

其中 $\xi_0(t_0)D_0$ 是震源常数。也可写出零阶位移势为

$$\varphi = D_0\xi_0(t_0)\left(\frac{e^{-ik_0D}}{D}\right), \quad \left(k_0 = \frac{\omega}{V_0}\right) \qquad (8.122)$$

这里，$\frac{e^{-ik_0D}}{D}$ 是波动方程 $\nabla^2\varphi + k_0^2\varphi = 0$ 的一个特解。若震源是一爆炸源（震源时间函数为脉冲函数），则有

$$\xi_0(t_0) = \left[\frac{-M}{4\pi(\lambda+2\mu)^{1/2}V_0^{3/2}}\right]t_0^{-1}$$

$$\xi_n(t_0) = 0, \qquad (n \geqslant 1)$$

式中，M 为震源矩。

2. 速度 $V(r) = a - br^2$ 的介质中的射线

首先在固有坐标系中解标量波动方程

$$\nabla^2\varphi + \frac{\omega^2}{V^2}\varphi = 0 \qquad (8.123)$$

在现在情况下，标量因子

$$\left.\begin{aligned} h_1 &= a - br^2 \\ h_2 &= \frac{a-br^2}{\gamma}\mathrm{sh}(\gamma t), \quad (\gamma = 2\sqrt{ab}) \\ h_3 &= \frac{a-br^2}{\gamma}\mathrm{sh}(\gamma t)\sin i_h \end{aligned}\right\} \qquad (8.124)$$

作如下变换

$$\varphi = \left(\frac{h_1}{h_2h_3}\sin i_h\right)^{1/2}S \qquad (8.125)$$

这样，方程(8.123)可变成

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} + \frac{4ab}{\mathrm{sh}^2(\gamma t)}\frac{\partial^2 S}{\partial i_h^2} + \frac{4ab}{\mathrm{sh}^2(\gamma t)\sin^2 i_h}\frac{\partial^2 S}{\partial \varphi^2}$$

$$+\frac{4ab}{\mathrm{sh}^2(\gamma t)}\cot i_h \frac{\partial S}{\partial i_h} + (\omega^2 - ab)S = 0 \tag{8.126}$$

我们主要关心的是时间很长($\gamma t \gg 1$)及高频情况的解，所以上式可简化为

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} + \omega^2 S = 0 \tag{8.127}$$

它的解是 $S = \mathrm{e}^{-i\omega t}$，$t$ 是沿射线的走时。因而位移势有

$$\varphi = \frac{\gamma}{\mathrm{sh}\gamma t} \frac{1}{\sqrt{a - br^2}} \mathrm{e}^{-i\omega t} \tag{8.128}$$

让式(8.124)中的 $h_3 = r\sin\theta$，并稍作运算，可得

$$t(r,\theta) = \frac{1}{\sqrt{ab}} \mathrm{arsh}\left[\frac{(r - r_h)^2 + 4rr_h\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{(a - br^2)(a - br_h^2)} ab\right]^{1/2} \tag{8.129}$$

若震源与接收器都在地表，即有 $r = r_h$，$\theta = \Delta$，则上式可简化为

$$T = \frac{1}{\sqrt{ab}} \mathrm{arsh}\left(\mathrm{ch}\beta \sin\frac{\Delta}{2}\right) \tag{8.130}$$

其中 $\mathrm{ch}\beta = \frac{2a}{V_0} - 1$，$V_0 = a - br_h^2$，再用式(8.88)，可得曲率半径 $\rho = \frac{1}{2bp}$ = 常数，因而射线是一条半径为 $(2bp)^{-1}$ 的圆弧，波前是一个圆球面。

§ 5 地球展平变换问题

在许多情况下，往往可以将地球当作一个半无限空间来处理，而介质参数 λ、μ、ρ 只与垂直坐标 z 有关。此时，我们采用以圆柱坐标系表示的 Navier 运动方程，即

$$\mu\nabla^2 \boldsymbol{u} + (\lambda + \mu)\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\boldsymbol{u} + \hat{z}\lambda'\mathrm{div}\boldsymbol{u} + \mu'\left(2\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial z} + \hat{z} \times \mathrm{curl}\boldsymbol{u}\right) = \rho\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2} \tag{8.131}$$

式中上标“′”表示对 z 求微商。像在前面讨论径向非均匀介质一样，SH 波运动可精确地解耦，即

$$M = \mathrm{curl}(\hat{z}\psi_3) \tag{8.132}$$

而 ψ_3 应满足

$$\mu\nabla^2\psi_3 + \mu'\frac{\partial\psi_3}{\partial z} = \rho\frac{\partial^2\psi_3}{\partial t^2} \tag{8.133}$$

P、SV 波满足如下条件，也有高频解耦的解，这些条件是：

$$\left.\begin{aligned}&\left|\Lambda\frac{\lambda'}{\lambda}\right| \ll 1, \quad \left|\Lambda\frac{\mu'}{\mu}\right| \ll 1,\\ &\left|\Lambda\frac{\rho'}{\rho}\right| \ll 1, \quad \Lambda\left|\frac{\mu}{\mu}\right|^{''1/2} \ll 1, \quad \Lambda\left|\frac{\rho}{\rho}\right|^{''1/2} \ll 1\end{aligned}\right\} \tag{8.134}$$

这样，可以引进位移势函数 φ_1、φ_2 及 φ_3，则 P、SV 和 SH 运动可分别用 Hansen 矢量 $\boldsymbol{L}$、$\boldsymbol{N}$ 和 $\boldsymbol{M}$ 表示为：

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{L} &= \frac{1}{\sqrt{\rho}}\mathrm{grad}\varphi_1\\ \boldsymbol{N} &= \frac{1}{\sqrt{\rho}}\mathrm{curl}\,\mathrm{curl}(\hat{z}\varphi_2)\\ \boldsymbol{M} &= \frac{1}{\sqrt{\mu}}\mathrm{curl}(\hat{z}\varphi_3)\end{aligned}\right\} \tag{8.135}$$

这些位移势函数应该满足

$$\left.\begin{aligned}&\nabla^2\varphi_i + \frac{\omega^2}{v_i^2(z)} = 0 \qquad (i = 1,2,3)\\ &v_1^2 = (\lambda + 2\mu)/\rho, \qquad v_2^2 = v_3^2 = \mu/\rho\end{aligned}\right\} \tag{8.136}$$

这种将球地球模型中的波的传播问题当作半空间的问题来处理的方法，实质上是忽略了地球曲率的影响，或者仅加上一个简单的修正，称之为地球的展平变换。这种变换方法是否允许，我们可以从射线理论的基本方程出发来给予讨论。

已知柱坐标和球坐标表示的程函方程（与方位角无关的情况）分别为：

$$\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial z}\right)^2 = \frac{1}{v^2(z)} \tag{8.137}$$

和

$$\frac{1}{a^2}\left(\frac{\partial t}{\partial \theta}\right)^2 - \frac{r^2}{a^2}\left(\frac{\partial t}{\partial r}\right)^2 = \left(\frac{r}{a}\right)^2 \frac{1}{V^2(r)} \tag{8.138}$$

式中 a 表示地球半径，x 表示柱坐标中的径向分量。对此两式逐项进行比较，得到如下关系：

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial z} &= -\frac{r}{a}\frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{v(z)} &= \frac{r}{a\,V(r)} \end{aligned}\right\} \text{也即} \quad \left.\begin{aligned} & x = a\,\theta \\ & r = a e^{-\frac{z}{a}}, \text{或}\ z = a\ln\frac{a}{r} \\ & v(z) = \frac{a}{r}V(r) \end{aligned}\right\} \tag{8.139}$$

这里引入 a 是出于量纲考虑。当 $z=0$ 时，相当于 $r=a$。

因而，只要作如下变量变换：

$$r = a e^{-z/a}, \quad \theta = \frac{x}{a}, \quad V(r) = e^{-z/a} v(z) \tag{8.140}$$

球坐标中的程函方程就可变成柱坐标的相应方程。除了奇异点及其邻近区域，在数学上两个方程是等价的，式(8.140)称为地球的展平变换式(the earth-flattening transformation)。

若 $z/a \ll 1$，则 $r \approx a-z$，那么由式(8.139)得

$$v(z) = \left(1 + \frac{z}{a}\right)V(a - z) \tag{8.141}$$

该式称为地球的展平近似(the earth-flattening approximation)。按此近似关系，若原来速度分布是常数，则展平后的速度是线性分布的，但注意到它受 $z/a \ll 1$ 的限制，射线不能深入到地球的内部。

也可用几何图形来说明展平变换的特性。图 8.7 表示一个很有意思的问题，展平变换好象将射线的曲率与介质边界面的曲率交换了。

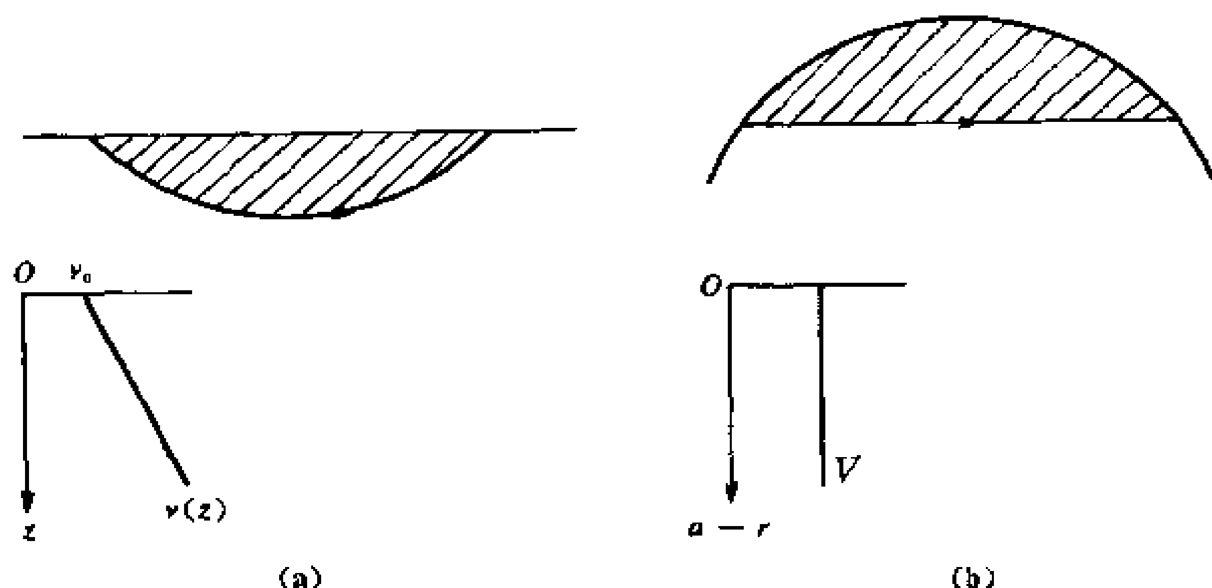


图 8.7　展平变换的特例

(a)线性速度分布半空间中的弯曲射线;(b)均匀球体中的直射线

§6　广义射线法

将介质看作均匀层叠成的垂直非均匀介质，从波动方程出发，计算理论地震图的方法之一是广义射线法。本节讲授这种方法的理论背景、方法原理及其适用条件等。

若震源时间函数是谐变函数 $e^{-i\omega t}$，则波经过地球介质，在接收处的响应具有 $\bar{r}(\omega)e^{-i\omega t}$ 的形式，即输入-输出形式可写成

$$\exp(-i\omega t) \rightarrow \text{弹性介质} \rightarrow \bar{r}(\omega)\exp(-i\omega t),$$

当输入是脉冲函数 $\delta(t)$ 时，可将它写成谐变函数的积分形式，则输入-输出形式为

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-i\omega t)d\omega \rightarrow \text{弹性介质} \rightarrow$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\bar{r}(\omega)\exp(-i\omega t)d\omega = r(t) \qquad (8.142)$$

这里 $r(t)$ 是 $\bar{r}(\omega)$ 的 Fourier 反变换。考虑物理上的因果关系，应该有当 $t<0$ 时，$r(t)=0$。

进一步，如果输入是一个任意函数 $x(t)$，则其输入-输出形式为：

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t-\tau)\delta(\tau)\mathrm{d}\tau \rightarrow \text{弹性介质} \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty}x(t-\tau)r(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{8.143}$$

当输入为 e^{st} 形式时（s 是正实数，$-\infty<t<\infty$），经过介质后，则输出形式为 $\bar{r}(s)e^{st}$，即 $e^{st}\rightarrow$ 弹性介质 $\rightarrow\bar{r}(s)e^{st}$。现在要求确定响应函数 $\bar{r}(s)$。按式(8.143)，响应有 $\bar{r}(\omega)e^{st}=\int_{0}^{\infty}r(\tau)e^{s(t-\tau)}\mathrm{d}\tau$，因而 $\bar{r}(s)$ 正好是 $r(t)$ 的 Laplace 变换：

$$\bar{r}(s)=\int_{0}^{\infty}r(t)e^{-st}\mathrm{d}t \qquad (s\ \text{是正实数}) \tag{8.144}$$

地震学上的问题是求解 $r(t)$。由波动方程 $\bar{r}(s)$ 一般容易求得。有了 $\bar{r}(s)$，并使它具有式(8.144)的形式，则被积函数中 $r(t)$ 就是我们想要得到的脉冲响应 $r(t)$。此为广义射线法的基本思路，此方法又称为 Cagniard 方法。

我们先讨论对于弹性半空间在不同的线源作用下在均匀介质中的 SH 波和 P-SV 波问题。之后再计算垂直非均匀介质问题。

在线源问题中，我们对 x 坐标变量施行了 Fourier 变换，而对时间 t 采用 Laplace 变换。这样，在变换域上的解是 $\bar{\bar{r}}(k_x,z,s)$。进行 Fourier 反变换，有

$$\bar{r}(x,z,s)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\bar{\bar{r}}(k_x,z,s)\exp(\mathrm{i}k_x x)\mathrm{d}k_x \tag{8.145}$$

这里 k_x 是波数的水平分量。因为有 $k_x=\mathrm{i}sp$，对上式进行积分变量变换，得

$$\bar{r}(x,z,s)=-\frac{\mathrm{i}s}{2\pi}\int_{-\mathrm{i}\infty}^{\mathrm{i}\infty}\bar{\bar{r}}(\mathrm{i}sp,z,s)e^{-spx}\mathrm{d}p \tag{8.146}$$

如果式(8.146)能被处理成式(8.144)形式，则就可从被积函数中

确定 $r(x,z,t)$。处理过程中还可能要用到如下一条 Laplace 变换性质，即如有

$$\bar{r}(s) = s^n \int_0^\infty g(t) e^{-st} dt \tag{8.147}$$

则脉冲响应为

$$r(t) = \frac{d^n}{dt^n} g(t) \tag{8.148}$$

我们从 SH 问题开始。取直角坐标 (x,y,z)，假定在半无限均匀弹性介质中的线源(作用力)沿 y 轴分布，可以写成

$$\boldsymbol{f} = (0, A\delta(x)\delta(z)\delta(t), 0) \tag{8.149}$$

其中 A 为常数，已知这种体积力作用只引起 y 方向的位移，因而位移矢量为 $(0,v(x,z,t),0)$。$v(x,z,t)$ 满足如下波动方程：

$$\rho\ddot{v} = A\delta(x)\delta(z)\delta(t) + \mu\nabla^2 v \tag{8.150}$$

对于 $t<0$，v 和 $\dot{v}$ 都为零。

取双重变换：

$$\bar{\bar{v}} = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ik_x x) dx \int_0^\infty v e^{-st} dt \tag{8.151}$$

将式(8.150)变换成

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \bar{\bar{v}}(k_x,z,s) = \frac{-A}{\rho\beta^2}\delta(z) + n^2 \bar{\bar{v}}(k_x,z,s) \tag{8.152}$$

式中 $n^2 = k_x^2 + \frac{s^2}{\beta^2}$。方程(8.152)表示，除 $z=0$ 处外，其他地方有 $\frac{\partial^2 \bar{\bar{v}}}{\partial z^2} = n^2 \bar{\bar{v}}$，它的解是

$$\bar{\bar{v}}(k_x,z,s) = a e^{nz} + b e^{-nz} \tag{8.153}$$

注意，在这种特定情况下，半空间问题可简单地当作全空间来考虑，只要将震源强度加大一倍即可。

规定当 n 是实数时取 $n>0$，当 n 是复数时，取 $\mathrm{Re}\,n>0$，a、b 是待定常数，由边界条件来确定。我们将它当作全空间问题来处理，因而要求当 $z\to\pm\infty$ 时，$\bar{\bar{v}}$ 是有界的，则可设 $\bar{\bar{v}} = c e^{-n|z|}$。常数 c 可以

这样来确定：经过界面 $z=0$ 时，由于有震源，$\frac{\partial \tilde{\bar{v}}}{\partial z}$应有一跳跃$\frac{A}{\rho\beta^2}$。最后得到

$$\tilde{\bar{v}}(k_x,z,s) = \frac{A}{2\rho\beta^2 n}e^{-n|z|} \tag{8.154}$$

为了使解变成式(8.144)的形式，对式(8.154)作 Fourier 反变换，得解的 Laplace 变换形式是

$$\bar{v}(x,z,s) = \frac{A}{4\pi\rho\beta^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(ik_x x - n|z|)}{n}dk_x \tag{8.155}$$

进行积分变量变换 $k_x = isp$，上式变为

$$\bar{v}(x,z,s) = \frac{A}{4\pi\rho\beta^2}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{-ie^{-s(px+\eta|z|)}}{\eta}d\eta \tag{8.156}$$

其中 $\eta=(\beta^{-2}-p^2)^{1/2}$，且 $\mathrm{Re}\eta>0$。可看出式(8.156)中的 s 的位置已与式(8.144)的相同。为了使两式在形式上完全相同，应继续作变换。式(8.156)被积函数中的$\frac{1}{\eta}e^{-s(px+\eta|z|)}$应是一个复值，令它的实部为 $E(p)$，虚部为 $O(p)$。当 p 是虚数时，E 是偶函数，而 O 是奇函数。这样，式(8.156)可写成：

$$\begin{aligned}\bar{v}(x,z,s) &= \frac{A}{4\pi\rho\beta^2}\int_{-i\infty}^{i\infty} - i(E + iO)dp \\ &= -\frac{Ai}{2\pi\rho\beta^2}\int_0^{i\infty}Edp = \frac{A}{2\pi\rho\beta^2}\mathrm{Im}\left\{\int_0^{i\infty}(E+iO)dp\right\} \\ &= \frac{A}{2\pi\rho\beta^2}\mathrm{Im}\left\{\int_0^{i\infty}\frac{e^{-s(px+\eta|z|)}}{\eta}dp\right\}\end{aligned} \tag{8.157}$$

为了使上式的指数项变成 e^{-st}形式，令

$$t = px + \eta|z| \tag{8.158}$$

这里t应为正实数。因而现在的问题变为，在式(8.158)中，$p=p(t)$在复平面上应有什么样的积分路径 C，此积分路径称为 Cagniard 路径。将正实数 t 作为一个参数，它可从零变至无穷大，那么由式(8.158)，可解得

$$p(t)=\begin{cases}\dfrac{xt-|z|\left(\dfrac{R^2}{\beta^2}-t^2\right)^{1/2}}{R^2} & \left(当\ t<\dfrac{R}{\beta}\right)\\[2ex] \dfrac{xt+\mathrm{i}|z|\left(t^2-\dfrac{R^2}{\beta^2}\right)^{1/2}}{R^2} & \left(当\ t>\dfrac{R}{\beta}\right)\end{cases} \tag{8.159}$$

由 $p(t)$所表达的积分路径 C 在图 8.8 中示出，其中已假设 $x>0$，$R=(x^2+z^2)^{1/2}$。

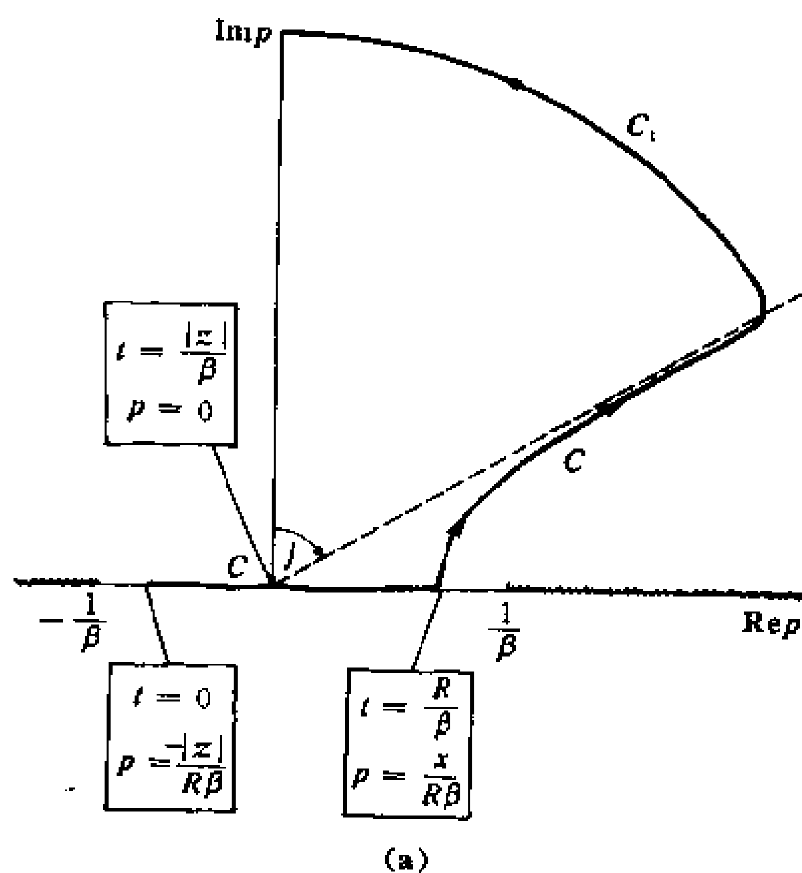
在图 8.8a 的复 p 平面上，由式(8.159)给定的路径 C 从 $t=0$ 开始，它在 p 的负实轴上($p=-\frac{|z|}{R\beta}$)，沿着实轴继续到 $t=\frac{R}{\beta}$($p=\frac{x}{R\beta}$)，之后离开实轴按双曲线形式展示在复 p 平面上。此曲线的渐近线与正虚轴的夹角 $j=\tan^{-1}\frac{x}{|z|}$，角 j 正好为射线离源角(图 8.8b)。应当注意，式(8.157)的被积函数有分支点 $p=\pm\beta^{-1}$，对于 $x>0$，C 路径在实轴上不经过 $p=\beta^{-1}$的分支点，不会遇到分支切割问题。

现在讨论沿 p 正虚轴的积分(8.157)能否用 C 路径来替代。在 $t=0$ 到 $t=\frac{R}{\beta}$的实轴上，被积函数没有贡献。这是因为当 p 为实数时，被积函数也都是纯实数，因而虚部为零。在复 p 平面(图 8.8a)的积分回路上，大圆弧 C_1 段上，按 Jordan 引理也是没有贡献的，且路径 C 和正虚轴之间不存在奇点，因而用 Cagniard 路径 C 完全可替代原来的正虚轴路径，即

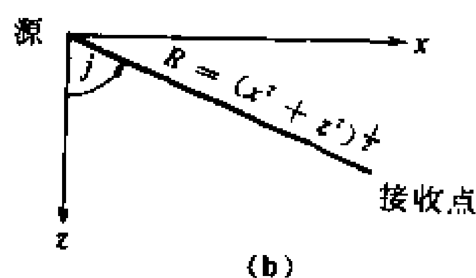
$$\bar{v}(x,z,s)=\frac{A}{2\pi\rho\beta^2}\mathrm{Im}\left\{\int_C\frac{\mathrm{e}^{-s(px+\eta|z|)}}{\eta}\mathrm{d}p\right\} \tag{8.160}$$

再用积分变量变换式(8.158)及式(8.159)，当 $t>\frac{R}{\beta}$时，在 C 上有

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{i}\eta}{\left(t^2-\dfrac{R^2}{\beta^2}\right)^{1/2}} \tag{8.161}$$



(a)



(b)

图 8.8　复 p 平面上的 Cagniard 路径

(a)路径；(b)角 j

代入式(8.160)，最后得到

$$\bar{v}(x,z,s)=\frac{A}{2\pi\rho\beta^2}\int_{R/\beta}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-st}}{\left(t^2-\frac{R^2}{\beta^2}\right)^{\frac{1}{2}}}\mathrm{d}t \tag{8.162}$$

由此就可直接写出它的原函数，即问题的解为

$$v(x,z,t) = \frac{A}{2\pi\rho\beta^2}\frac{H\left(t-\dfrac{R}{\beta}\right)}{\left(t^2-\dfrac{R^2}{\beta^2}\right)^{1/2}} \qquad (8.163)$$

这是震源函数为 $\delta(t)$ 的线源的响应。如果震源时间函数是一般形式，则只要将此结果与时间函数作卷积，就可得出一般时间函数形式的响应。

若在半空间介质上再覆盖一层速度较低的均匀介质，当有表面震源时，还会有首波出现(图 8.9a)。将坐标原点取在交接面上，z 的方向指向半空间。覆盖层的参数为 ρ_1 和 β_1，厚度为 $-z_0$(也是震源的位置)。半空间参数为 ρ_2 和 β_2，且 $\beta_1<\beta_2$。将覆盖层扩展为整个上半空间，这样，可以利用前面已得到的半空间问题的解作为上部介质的入射波。

$$\bar{\bar{v}}^{入射}(k_x,z,s)=\frac{A}{2\rho_1\beta_1^2 s\eta_1}\exp(-s\eta_1|z-z_0|) \qquad (8.164)$$

其中 $\eta_1=(\beta_1{}^{-2}-p^2)^{1/2}$。用位移 v 和应力 $\delta_{zy}=\mu\dfrac{\delta v}{\delta z}$ 在交接界面 $z=0$ 上的连续条件，可定出反射因数 $\dot{S}\dot{S}$ 和折射因数 $\dot{S}\dot{S}$。它们有

$$\dot{S}\dot{S}=\frac{\mu_1\eta_1-\mu_2\eta_2}{\mu_1\eta_1+\mu_2\eta_2}, \qquad \dot{S}\dot{S}=\frac{2\mu_1\eta_1}{\mu_1\eta_1+\mu_2\eta_2} \qquad (8.165)$$

因此，总的位移为

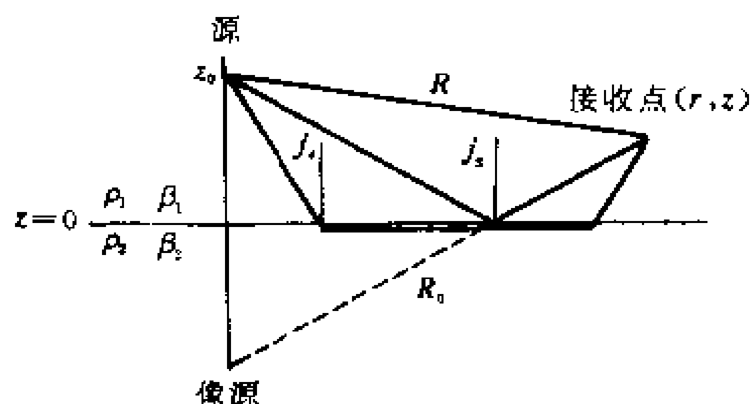
对于 $z<0$，

$$\bar{\bar{v}}(k_x,z,s)=\frac{A}{2\mu_1 s\eta_1}\{\exp(-s\eta_1|z-z_0|)+ \dot{S}\dot{S}\exp[s\eta_1(z+z_0)]\} \qquad (8.166)$$

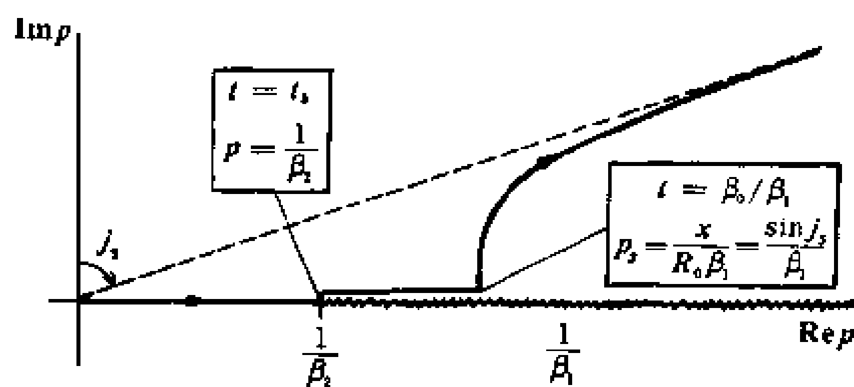
对于 $z>0$

$$\bar{\bar{v}}(k_x,z,s)=\frac{A}{2\mu_1 s\eta_1}\dot{S}\dot{S}\exp[-s(\eta_2 z+\eta_1 z_0)] \qquad (8.167)$$

式(8.166)中的第一项，已在前面讨论过了，现在只需讨论其第二项，将它记作 $\bar{\bar{v}}^{反}$，这是在上部介质的广义反射的响应。作 Fourier 反变换得：



(a)



(b)

图 8.9 SH 首波 C 积分路径

(a)角 J_c 和 J_s;(b)C 积分路径

$$
\bar{v}^{反}(x,z,s)=\frac{A}{2\pi\rho_1\beta_1^2}\mathrm{Im}\left\{\int_0^{i\infty}\frac{1}{\eta_1}\cdot\frac{\mu_1\eta_1-\mu_2\eta_2}{\mu_1\eta_1+\mu_2\eta_2}\cdot\exp[-s(px+\eta_1|z+z_0|)]\mathrm{d}p\right\} \tag{8.168}
$$

且有 $\mathrm{Re}\eta_1\geqslant 0$ 和 $\mathrm{Re}\eta_2\geqslant 0$。

现在可以定义 Cagniard 路径 C 为

$$
t=px+\eta_1|z-z_0| \tag{8.169}
$$

它的解有

$$
p = p(t) = \begin{cases} \dfrac{xt - |z + z_0|\left(\dfrac{R_0^2}{\beta_0^2} - t^2\right)^{1/2}}{R_0^2}, & t \leqslant \dfrac{R_0}{\beta_1} \\[2ex] \dfrac{xt + \mathrm{i}|z + z_0|\left(t^2 - \dfrac{R_0^2}{\beta_1^2}\right)^{1/2}}{R_0^2}, & t \geqslant \dfrac{R_0}{\beta_1} \end{cases}
$$

(8.170)

式中 $R_0=[x^2+(z+z_0)^2]^{1/2}$是接收点与震源镜像点之间的距离(图 8.9a)。这里将 Cagniard 路径 C 与求式(8.168)积分时最速下降路径作一比较讨论。最速下降路径可这样确定:此时 $f=-(px+\eta_1|z+z_0|)$,由 $f'(p_s)=0$确定鞍点 p_s,得 $x\cos j_s=|z+z_0|\sin j_s$ 及 $p_s=\beta_1^{-1}\sin j_s$(j_s 为入射角),这正是反射射线的参数。接着求得路径与实轴的夹角 $\chi=\pi/2$。再看 Cagniard 路径:开始,按式(8.170)第一式,它应在实轴上,也就是在被积函数的脊上,p 随着 t 增大到 R_0/β_1,达到鞍点 $p_s=x/(R_0\beta_1)=\beta^{-1}\sin j_s$。在此点,Cagniard 路径转过角度 $\pi/2$,在复平面上沿着被积函数的谷进行(式(8.170)的第二式),就变成最速下降的路径了。

若接收点是在 $x/R_0<\beta_1/\beta_2$ 的位置上,则 Cagniard 路径离开实轴的起点在分支点 β_1^{-1} 和 β_2^{-1} 的左边(x 小于能产生首波的临界距离),因而积分不受分支割线的影响。这样,当 $t>R_0/\beta_1$ 时,在 C 上有$\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}=\mathrm{i}\eta_1\left(t^2-\dfrac{R_0^2}{\beta_1^2}\right)^{-1/2}$,可得反射波为

$$
v^{反}(x,z,t) = \frac{A}{2\pi\rho_1\beta_1^2}\mathrm{Re}\left\{\frac{\mu_1\eta_1 - \mu_2\eta_2}{\mu_1\eta_1 + \mu_2\eta_2}\right\}\times H\left(t - \frac{R_0}{\beta_1}\right)\left(t^2 - \frac{R_0^2}{\beta_1^2}\right)^{-1/2} \tag{8.171}
$$

注意,$t<\dfrac{R_0}{\beta_1}$无贡献,因为此时 $p(t)$为实数,被积函数虚部为零。

当接收点的水平位置 x 大于临界距离时,即有 $1>\dfrac{x}{R_0}>\dfrac{\beta_1}{\beta_2}$,此时 C 路径离开实轴的位置 p_s 是在 $p=\beta_1^{-1}$ 和 $p=\beta_2^{-1}$ 的两点之间

(图 8.9b)。现在,沿实 p 轴路径上 β_2^{-1} 到 $\beta_1^{-1}\sin j_s$ 段上,由于分支点 β_2^{-1} 的影响会有积分值,这就是首波的贡献。在这段实轴路径上,p 是实的,因而 η_2 是纯虚数,被积函数有非零的虚部。在 $p=\beta_2^{-1}$ 点,按式(8.169)计算,相应的时间有

$$t = t_h = \frac{x}{\beta_2} + |z + z_0|(\beta_1^{-2} - \beta_2^{-2})^{1/2}$$

这是首波从源点$(0,z_0)$到接收点(x,z)的时间。在 $p=\frac{1}{\beta_1}\sin j_s$ 处,相应的时间为 $t=\frac{R_0}{\beta_1}$,这是广角反射所需的时间。这样,位移式(8.168)可由两部分组成,一是首波,另一是广角反射波,最终得位移表示式为

$$v(x,z,t) = \frac{A}{2\pi\rho_1\beta_1^2}\mathrm{Im}\left\{\frac{\mu_1\eta_1 - \mu_2\eta_2}{\mu_1\eta_1 + \mu_2\eta_2}\right\}\cdot\frac{H(t-t_h) - H\left(t - \frac{R_0}{\beta_1}\right)}{\left(\frac{R_0^2}{\beta_1^2} - t^2\right)^{1/2}}$$

$$+\frac{A}{2\pi\rho_1\beta_1^2}\mathrm{Re}\left\{\frac{\mu_1\eta_1 - \mu_2\eta_2}{\mu_1\eta_1 + \mu_2\eta_2}\right\}\cdot\frac{H\left(t - \frac{R_0}{\beta_1}\right)}{\left(t^2 - \frac{R_0^2}{\beta_1^2}\right)^{1/2}} \tag{8.172}$$

式中第一项为首波位移,第二项为广角反射波。从式中可看出这两种波不会同时存在,广角反射从首波的末尾开始产生。

我们再来考虑半空间中 P-SV 线源问题。半空间取在 $z\geqslant 0$ 区域,$z=0$ 是自由表面。位移只存在 x 和 z 方向,用标量势 φ 和 ψ 写出,有

$$\boldsymbol{u} = \nabla\varphi + \nabla\times(0,\psi,0) = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial z}, 0, \frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\right) \tag{8.173}$$

震源处的体力 $\boldsymbol{f}$ 也相应地写成 $\boldsymbol{f}=\nabla\Phi+\nabla\times(0,\Psi,0)$。位移势 φ 和 ψ 应满足

$$
\left.\begin{aligned}
\ddot{\varphi} &= \alpha^2\nabla^2\varphi + \frac{\Phi}{\rho} \\
\ddot{\psi} &= \beta^2\nabla^2\psi + \frac{\Psi}{\rho}
\end{aligned}\right\} \tag{8.174}
$$

线源在深度 h 上，它的形式取

$$
\left.\begin{aligned}
\Phi(x,z,t) &= L_0(t)\delta(x)\delta(z-h) \qquad (\text{P 波震源}) \\
\Psi(x,z,t) &= M_0(t)\delta(x)\delta(z-h) \qquad (\text{SV 波震源})
\end{aligned}\right\} \tag{8.175}
$$

对方程(8.174)进行 Fourier 和 Laplace 变换，可得变换域上的解为

$$
\left.\begin{aligned}
\bar{\bar{\varphi}}^{\text{入射}}(k_x,z,s) &= \frac{\overline{L}_0(s)}{2\rho\alpha^2 s\xi}e^{-s\xi|z-h|} \\
\bar{\bar{\psi}}^{\text{入射}}(k_x,z,s) &= \frac{\overline{M}_0(s)}{2\rho\beta^2 s\eta}e^{-s\eta|z-h|}
\end{aligned}\right\} \tag{8.176}
$$

这里 $\xi=(\alpha^{-2}-p^2)^{1/2}$，$\eta=(\beta^{-2}-p^2)^{1/2}$，而且取 $\mathrm{Re}\xi>0$，$\mathrm{Re}\eta>0$。当式(8.176)表示的入射波到达自由表面时，将产生 P 波和 SV 波反射，它们由在 $z=0$ 的自由表面上的边界条件 $\sigma_{xz}=\sigma_{zz}=0$ 来确定，这样，介质中的总势函数由两部分构成，即入射波的势与反射波的势，我们得

$$
\left.\begin{aligned}
\bar{\bar{\varphi}}(k_x,z,s) = {} & \frac{\overline{L}_0(s)}{2\rho\alpha^2 s\xi}\{\exp(-s\xi|z-h|) + \\
& \acute{P}\grave{P}\exp[-s\xi(z+h)]\} + \frac{\overline{M}_0(s)}{2\rho\beta^2 s\eta}\frac{\beta}{\alpha}\acute{S}\grave{P}\exp[-s(\xi z+\eta h)] \\
\bar{\bar{\psi}}(k_x,z,s) = {} & -\frac{\overline{L}_0(s)}{2\rho\alpha^2 s\xi}\frac{\beta}{\alpha}\acute{P}\grave{S}\exp[-s(\eta z+\xi h)] + \\
& \frac{\overline{M}_0(s)}{2\rho\beta^2 s\eta}\{\exp(-s\eta|z-h|) - \acute{S}\grave{S}\exp[-s\eta(z+h)]\}
\end{aligned}\right\} \tag{8.177}
$$

式中的反射因数和转换因数是

$$\left.\begin{aligned}\dot{\mathrm{P}}\dot{\mathrm{P}} &= \frac{4p^2\xi\eta - (\beta^{-2} - 2p^2)^2}{R(p)}, \quad \dot{\mathrm{S}}\dot{\mathrm{P}} = \frac{4\beta p\eta(\beta^{-2} - 2p^2)}{R(p)} \\ \dot{\mathrm{P}}\dot{\mathrm{S}} &= \frac{4\alpha p\xi - (\beta^{-2} - 2p^2)}{R(p)}, \quad \dot{\mathrm{S}}\dot{\mathrm{S}} = \frac{-4p^2\xi\eta + (\beta^{-2} - 2p^2)^2}{R(p)}\end{aligned}\right\} \tag{8.178}$$

其中

$$R(p) = 4p^2\xi\eta + (\beta^{-2} - 2p^2)^2 \tag{8.179}$$

称为 Rayleigh 函数。

有了变换域的解后，现要用 Cagniard 方法获得时间域上的结果。式(8.177)共含有六种波，其中两种是入射波，四种是反射波，我们只取一种波作为示例。现计算 $\dot{\mathrm{S}}\dot{\mathrm{S}}$ 反射波的水平位移分量。假定 $M_0(t)=M_0H(t)$，其 Laplace 变换为$\frac{M_0}{s}$。这样，在变换域上的水平位移分量为

$$\tilde{\bar{u}}_{ss}(k_x,z,s) = -\frac{M_0}{2\rho\beta^2 s}\dot{\mathrm{S}}\dot{\mathrm{S}}\exp[-s\eta(z+h)] \tag{8.180}$$

对它作 Fourier 反变换，并注意到 $\dot{\mathrm{S}}\dot{\mathrm{S}}$ 是 p 的偶函数，所以得到

$$\bar{u}_{\mathrm{SS}}(x,z,s) = -\frac{M_0}{2\pi\rho\beta^2}\mathrm{Im}\left\{\int_0^{\mathrm{i}\infty}\dot{\mathrm{S}}\dot{\mathrm{S}}(p)\exp[-spx - s\eta(z+h)]\mathrm{d}p\right\} \tag{8.181}$$

Cagniard 路径有 $t=px+\eta(z+h)$，解出 $p(t)$为：

$$p(t) = \begin{cases}\dfrac{xt - (z+h)[R_0^2/\beta^2 - t^2]^{1/2}}{R_0^2}, & t \leqslant \dfrac{R_0}{\beta} \\ \dfrac{xt + \mathrm{i}(z+h)[t^2 - R_0^2/\beta^2]^{1/2}}{R_0^2}, & \dfrac{R_0}{\beta} \leqslant t\end{cases} \tag{8.182}$$

其中 $R_0=[x^2+(z+h)^2]^{1/2}$。按 Cagniard 路径，式(8.181)变为：

$$\bar{u}_{\mathrm{SS}}(x,z,s) = -\frac{M_0}{2\pi\rho\beta^2}\mathrm{Im}\left\{\int_0^{\mathrm{i}\infty}\dot{\mathrm{S}}\dot{\mathrm{S}}(p)\mathrm{e}^{-st}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t\right\} \tag{8.183}$$

因而，时间域中的解是

$$u_{SS}(x,z,t) = -\frac{M_0}{2\pi\rho\beta^2}\mathrm{Im}\left\{\dot{\mathrm{S}}\dot{\mathrm{S}}(p)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}\right\}$$
$$= \frac{M_0}{2\pi\rho\beta^2}\mathrm{Im}\left\{\frac{4p^2\xi\eta - (\beta^{-2} - 2p^2)^2}{4p^2\xi\eta - (\beta^{-2} - 2p^2)^2}\cdot\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}\right\}_{p=p(t)} \tag{8.184}$$

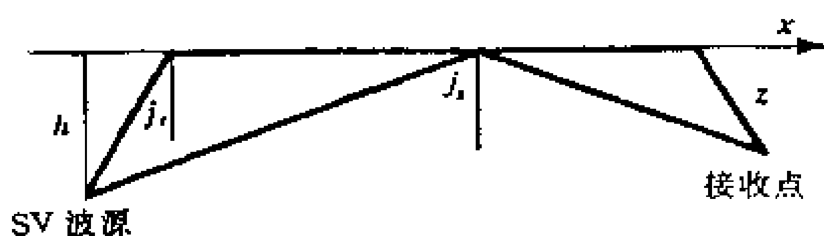
式中

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \begin{cases} \dfrac{\eta}{\left(\dfrac{R_0^2}{\beta^2} - t^2\right)^{1/2}}, & 0 < t < \dfrac{R_0}{\beta} \\ -\dfrac{\mathrm{i}\eta}{\left(t^2 - \dfrac{R_0^2}{\beta^2}\right)^{1/2}}, & \dfrac{R_0}{\beta} < t \end{cases} \tag{8.185}$$

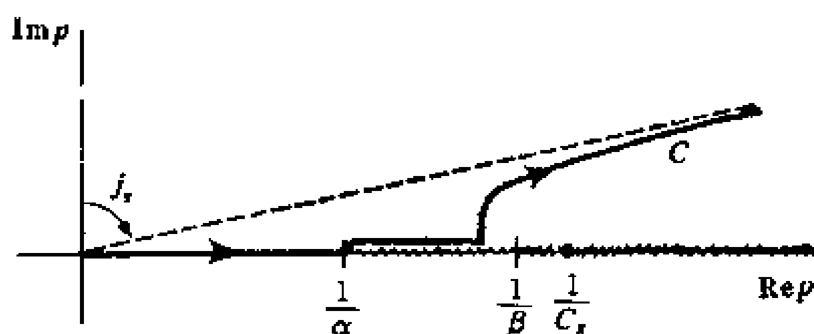
这样，在式(8.184)中，有一个可积奇点，即 $t=\frac{R_0}{\beta}$，这是反射波的到时。

当接收点离震源足够远时，会出现广角反射波及首波。广义反射为与式(8.180)鞍点有关的反射，在 Cagniard 路径上就是离开实轴的起点，到时为 $t=\frac{R_0}{\beta}$。首波是复 p 平面上分支点 $p=\alpha^{-1}$的贡献(图 8.10)，到时为 $t_h=\frac{x}{\alpha}+(z+h)(\beta^{-2}-\alpha^{-2})^{1/2}$。它的脉冲响应可按式(8.184)在分支点($p=\alpha^{-1}$)附近作割线来计算。

除了这些波之外，还会出现由式(8.180)中被积函数的极点所作的贡献，它由 Rayleigh 函数 $R(p)=4p^2\xi\eta+(\beta^{-2}-2p^2)^2$ 的零值所造成。我们已有约定，在 Riemann 面上只取{Re$\xi\geqslant 0$，Re$\eta\geqslant 0$}的一叶。在这一叶上，当 p 在$\pm\frac{1}{\beta}$邻近就会使 $R(p)$有零值，记作 $p=\pm\frac{1}{c_R}$。称为 Rayleigh 极点。由于考虑的 C 路径有 Re$p\geqslant 0$ 的条件，故只讨论 $p=\frac{1}{c_R}$ 极点的影响。当距离加大时，j_s 就增大(图 8.10b)，Cagniard 路径的渐近线变得靠近实轴，因而 $\dot{\mathrm{S}}\dot{\mathrm{S}}(p)$的值



(a)



(b)

图 8.10　半空间线源的广义 $\acute{S}\acute{S}$ 反射
(a)射线路径;(b)C 积分路径

就变得越大,就会出现由极点贡献的 Rayleigh 面波。在式(8.180)的内容中讨论的广角反射、首波及瑞利面波可统称为广义 $\acute{S}\acute{S}$ 反射波的讨论。

下面讨论三维问题(点源)。还是从 SH 波问题开始。假定在无限的弹性介质中,在原点作用着扭力矩,把它写成体积力的形式有

$$\boldsymbol{f} = \nabla \times (0,0,X) \tag{8.186}$$

这里 X 是体力势,有 z 轴对称性,故取轴坐标 $X=X(r,z,t)$。相应的位移

$$\boldsymbol{u} = \nabla \times (0,0,\chi) = \left(0, -\frac{\partial \chi}{\partial r}, 0\right) \tag{8.187}$$

位函数 χ 符合波动方程

$$\rho\ddot{\chi} = X + \mu\nabla^2\chi \tag{8.188}$$

设

$$X = N_0 H(t)\delta(x)\ \delta(y)\ \delta(z) = N_0 H(t)\ \frac{\delta(r)}{2\pi r}\delta(z) \tag{8.189}$$

可用经典方法求出

$$\chi((\boldsymbol{x},t) = \frac{N_0}{4\pi\rho\beta^2}\ \frac{H\left(t - \dfrac{R}{\beta}\right)}{R} \tag{8.190}$$

式中 N_0 为常量，$R=(x^2+y^2+z^2)^{1/2}$。

下面运用 Cagniard 方法计算。对方程(8.188)采用关于(x,y)的双重 Fourier 变换和关于 t 的 Laplace 变换，这样，在变换域上的方程为

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\overset{\approx}{\chi}(k_x,k_y,z,s) = -\frac{N_0}{\rho\beta^2 s}\delta(z) + n^2\overset{\approx}{\chi}(k_x,k_y,z,s) \tag{8.191}$$

式中 $n^2=k_x^2+k_y^2+\frac{s^2}{\beta^2}$。方程的解为

$$\overset{\approx}{\chi}(k_x,k_y,z,s) = \frac{N_0}{2\rho\beta^2 sn}\mathrm{e}^{-n|z|} \tag{8.192}$$

且 $\mathrm{Re}n>0$。

作 Fourier 反变换，得出 Laplace 变换域上的解为

$$\bar{\chi}(x,y,z,s) = \frac{N_0}{8\pi^2\rho\beta^2 s}\int_0^\infty \mathrm{d}k_x\int_{-\infty}^\infty \frac{\exp(\mathrm{i}k_x x + \mathrm{i}k_y y - n|z|)}{n}\mathrm{d}k_y \tag{8.193}$$

为将它变成 Laplace 变换的标准形式，引进新变量(w,q)，它们与 k_x、k_y 有如下关系

$$\left.\begin{aligned} k_x &= s(w\cos\varphi - q\sin\varphi)\\ k_y &= s(w\sin\varphi + q\cos\varphi)\end{aligned}\right\} \tag{8.194}$$

此变量变换称为 De Hoop 变换。这实质上是一个(k_x,k_y)坐标平面

的转动，其中 φ 是转动的角度，其面积元由 $\mathrm{d}k_x\mathrm{d}k_y$ 变换为 $s^2\mathrm{d}w\mathrm{d}q$。则式(8.193)经过变换后有

$$\chi(x,y,z,s)=\frac{N_0}{8\pi^2\rho\beta^2}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}w\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}q\,\frac{\exp(\mathrm{i}swr-s\eta|z|)}{\eta}$$

(8.195)

式中 $r^2=x^2+y^2$， $\eta=(\beta^{-2}+q^2+w^2)^{1/2}$，$\mathrm{Re}\eta>0$。可看出，被积函数是变量 q 的偶函数，再令 $p=-\mathrm{i}w$，那么，式(8.195)可写成

$$\bar{\chi}(x,y,z,s)=\frac{N_0}{2\pi^2\rho\beta^2}\int_0^{\infty}\mathrm{d}q\left\{\mathrm{Im}\left[\int_0^{\mathrm{i}\infty}\frac{\exp(-s(px+\eta|z|))}{\eta}\mathrm{d}p\right]\right\}$$

(8.196)

现在，$\eta=(\beta^{-2}+q^2-p^2)^{1/2}$。式中大括号中的积分在二维问题中已遇到过(见式(8.163))，其时间域上的函数为

$$\frac{H\left(t-\frac{(x^2+y^2)^{1/2}}{\beta}\right)}{\left(t^2-\frac{x^2+y^2}{\beta^2}\right)^{1/2}}$$

现在的三维问题只需用$(\beta^{-2}+q^2)$去替代上述函数中的 β^{-2}即可。这样，式(8.196)可写成：

$$\bar{\chi}(x,y,z,s)=\frac{N_0}{2\pi^2\rho\beta^2}\int_0^{\infty}\mathrm{d}q\int_0^{\infty}\frac{H[t-R(\beta^{-2}+q^2)]^{1/2}}{[t^2-R^2(\beta^{-2}+q^2)]^{1/2}}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

(8.197)

这里 $R=(x^2+y^2+z^2)^{1/2}=(r^2+z^2)^{1/2}$。交换式中的积分顺序，则有

$$\chi(x,y,z,s)=\frac{N_0}{2\pi^2\rho\beta^2}\int_0^{\infty}\mathrm{d}t\mathrm{e}^{-st}\cdot$$

$$\left\{H(t-\frac{R}{\beta})\int_0^{\left(\frac{t^2}{R^2}-\frac{1}{\beta^2}\right)^{1/2}}\frac{\mathrm{d}q}{[t^2-R^2(\beta^{-2}+q^2)]^{1/2}}\right\} \qquad (8.198)$$

因而时间域上的解是

$$\chi(x,y,z,t)=\frac{N_0}{2\pi^2\rho\beta^2}H\left(t-\frac{R}{\beta}\right)\int_0^{\left(\frac{t^2}{R^2}-\frac{1}{\beta^2}\right)^{1/2}}\frac{\mathrm{d}q}{[t^2-R^2(\beta^{-2}+q^2)]^{1/2}}$$

(8.199)

式中再对 q 进行变量变换，令 $q=\left(\frac{t^2}{R^2}-\frac{1}{\beta^2}\right)^{1/2}\sin\theta$，代入后即可得式中积分值为$\frac{\pi}{2R}$，因而最后得出的结果与式(8.190)一致。

在上述 De Hoop 变换计算的三维问题中，计算积分时没有涉及复射线参数平面上的积分性质。为了进一步讨论这种性质，我们再考虑有点源作用的 Lamb 问题，即半空间的点源问题，波动方程和震源形式仍用式(8.188)和式(8.189)，采用圆柱坐标，并对式(8.188)进行 Hankel 变换和 Laplace 变换，即方程两边同乘以$\int_0^\infty rI_0(\lambda r)\mathrm{d}r\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$，这里 $I_0(\lambda r)$是零阶虚宗量 Bessel 函数(λ 是变换参数)。则在变换域上的方程有

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\bar{\bar{\chi}}(\lambda,z,s)=\frac{-N_0}{2\pi\rho\beta^2 s}\delta(z)+\left(\frac{s^2}{\beta^2}-\lambda^2\right)\bar{\bar{\chi}}(\lambda,z,s) \tag{8.200}$$

方程的解前面已经给出，是

$$\bar{\bar{\chi}}(\lambda,z,s)=\frac{N_0}{4\pi\rho\beta^2 s^2\eta}\mathrm{e}^{-s\eta|z|} \tag{8.201}$$

式中 $\eta=\left(\frac{1}{\beta^2}-\frac{\lambda^2}{s^2}\right)^{1/2}$，取 $\mathrm{Re}\eta>0$。进行 Hankel 反变换并将积分变量换成 $\lambda=sp$，得到

$$\bar{\chi}(r,z,s)=\frac{N_0}{4\pi^2\rho\beta^2\mathrm{i}}\int_{-\mathrm{i}\infty}^{\mathrm{i}\infty}\frac{p}{\eta}K_0(spr)\mathrm{e}^{-s\eta|z|}\mathrm{d}p \tag{8.202}$$

式中 K_0 是零阶虚宗量 Hankel 函数。在推导上述公式过程中，已应用如下 Hankel 变换对：

$$\left.\begin{aligned}\tilde{f}(\lambda)&=\int_0^\infty rf(r)I_0(\lambda r)\mathrm{d}r\\ f(r)&=\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_{-\mathrm{i}\infty}^{\mathrm{i}\infty}\lambda\tilde{f}(\lambda)K_0(\lambda r)\,\mathrm{d}\lambda\end{aligned}\right\} \tag{8.203}$$

其中 K_0 有这样的性质：$K_0(\xi^*)=[K_0(\xi)]^*$，这里“*”表示复数共轭值。运用此性质，式(8.202)可写成：

$$\chi(x,y,z,s)=\frac{N_0}{2\pi^2\rho\beta^2}\mathrm{Im}\left\{\int_0^{\mathrm{i}\infty}\frac{p}{\eta}K_0(spr)\mathrm{e}^{-s\eta|z|}\mathrm{d}p\right\}$$

(8.204)

对于大宗量，K_0 有近似值

$$K_0(spr)\approx\left(\frac{\pi}{2spr}\right)^{1/2}\mathrm{e}^{-spr}\left[1+O\left(\frac{1}{spr}\right)\right] \quad (8.205)$$

取 Cagniard 路径 $p=p(\tau)$，它由 $\tau=pr+\eta|z|$ 解出(图 8.11)。注意到 $K_0(s\sigma_1)$ 是函数 $H(t-\sigma_1)(t^2-\sigma_1^2)^{-1/2}$ 的 Laplace 变换，而 $K_0(s\sigma_1)\times\mathrm{e}^{-s\sigma_2}$ 按相移定律得原函数为 $H(t-\sigma_1-\sigma_2)[(t-\sigma_2)^2-\sigma_1^2]^{-1/2}$，这样式(8.204)的原函数为

$$\chi(x,y,z,t)=\frac{N_0}{2\pi^2\rho\beta^2}\mathrm{Im}\int_{p(t)}\frac{p}{\eta}\frac{H(t-pr-\eta|z|)}{[(t-\eta|z|)^2-p^2r^2]^{1/2}}\mathrm{d}p$$

(8.206)

这个积分当 $t>\tau>\dfrac{R}{\beta}$ 才会有贡献，故写成

$$\chi(x,y,z,t)=\frac{N_0}{2\pi\rho\beta^2}\mathrm{Im}\int_{R/\beta}^{t}\frac{p}{\eta}\frac{1}{(t-\tau)^{1/2}(t-\tau+2pr)^{1/2}}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}\tau$$

(8.207)

其中

$$p(\tau)=\frac{r\tau+\mathrm{i}|z|\left(\tau^2-\dfrac{R^2}{\beta^2}\right)^{1/2}}{R^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\tau}=\frac{\mathrm{i}\eta}{\left(\tau^2-\dfrac{R^2}{\beta^2}\right)^{1/2}}$$

$$\eta=(\beta^{-2}-p^2)^{1/2},\mathrm{Re}\,\eta>0$$

确定这个积分并不困难，结果是 π/R。这样，最后得到了半空间点源问题的解。

至于广义反射波问题，假定介质由两个半空间构成，$z=0$ 是交接面(如图 8.9a)。上部介质记为"1"介质，下部介质记为"2"介质，SH 波的点源位于"1"介质中的 $z_0<0$ 处，则 SH 波的入射波势

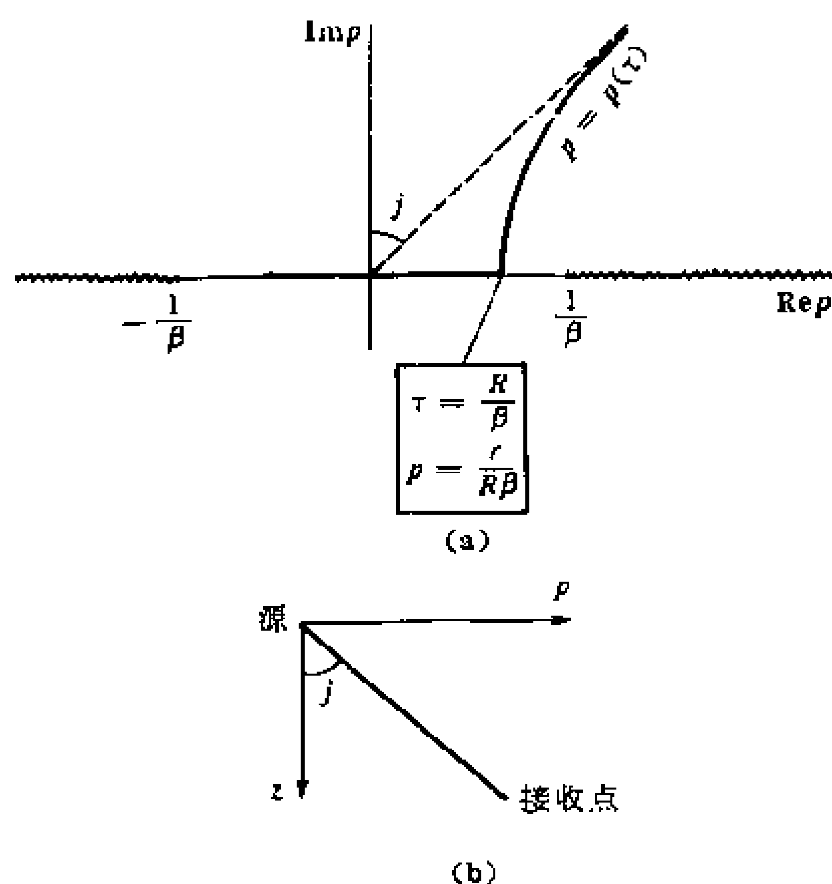


图 8.11　半空间点源问题的 Cagniard 路径

(a)C 积分路径 $p=p(\tau)$；　(b)角 j

是

$$\chi^{入}(r,z,t)=\frac{N_0}{4\pi\rho_1\beta_1^2}\frac{H\left(t-\frac{R}{\beta_1}\right)}{R}$$

其中 $R=[r^2+(z-z_0)^2]^{1/2}$。在 $z=0$ 界面上发生反射，在“1”介质中的反射波势是

$$\chi^{反}(r,z,t)=\frac{N_0}{2\pi^2\rho_1\beta_1^2}\mathrm{Im}\int_0^t\frac{p}{\eta_1}\left(\frac{\mu_1\eta_1-\mu_2\eta_2}{\mu_1\eta_1+\mu_2\eta_2}\right)\cdot$$

$$\frac{1}{(t-\tau)^{1/2}(t-\tau+2pr)^{1/2}}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}\tau \tag{8.208}$$

这里的 $p(\tau)$可参照式(8.170)，只要将式(8.170)的 χ 用 r 代替，t 用 τ 代替即可。也注意到，式(8.208)的积分下限从零开始，在 $\beta_2>\beta_1$ 的情况下，有首波出现的可能。

对于远场，若在整个积分区间上有 $|pr|\gg t-\tau$，则允许作近似计算，取

$$(t-\tau+2pr)^{1/2}\approx(2pr)^{1/2} \tag{8.209}$$

代入式(8.208)，并令函数

$$\psi(t)=\frac{1}{2\pi^2\rho_1\beta_1^2}\mathrm{Im}\left\{\frac{p(t)}{\eta_1}\left(\frac{\mu_1\eta_1-\mu_2\eta_2}{\mu_1\eta_1+\mu_2\eta_2}\right)\frac{1}{(2pr)^{1/2}}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}\right\} \tag{8.210}$$

则(8.208)式能写成

$$\begin{aligned}\chi^{反}(r,z,t)&=N_0\int_0^t\frac{\psi(\tau)}{(t-\tau)^{1/2}}\mathrm{d}\tau\\&=N_0\psi(t)*t^{-1/2}\end{aligned} \tag{8.211}$$

这种卷积计算在计算机中处理特别快速有效。式(8.209)的近似关系也相当于在 K_0 展开式中只取一项，随着时间的增大，其有效性也会出现问题。如果能取更多的项，则近似结果的有效性会得到改善。将$(t-\tau+2pr)^{-1/2}$展开，即

$$\frac{1}{(t-\tau+2pr)^{1/2}}\approx\frac{1}{(2pr)^{1/2}}\left[1-\frac{t-\tau}{4pr}+\frac{3}{32}\left(\frac{t-\tau}{pr}\right)^2+\cdots\right]$$

只要$|2pr|>t-\tau$，取适当多的项，就可达到预期的精度要求，而每一项分别都可表示为一个卷积。

有了均匀介质中的广义射线知识之后，现在讨论多层介质中的问题。垂直非均匀介质可近似看作由多层均匀介质构成。下面用 Helmberger 计算过的实例来叙述这种方法。如图 8.12 所示的多层介质，代表白令海峡地区的构造，第一层是海水，在海水 d_1 深处有一爆炸源，并在水中 d_2 处安置记录仪，观测来自 Moho 界面上的首波和反射波，震源距在 30～70km 范围。

取圆柱坐标，原点设在海平面上，z 轴指向介质内部。在海水

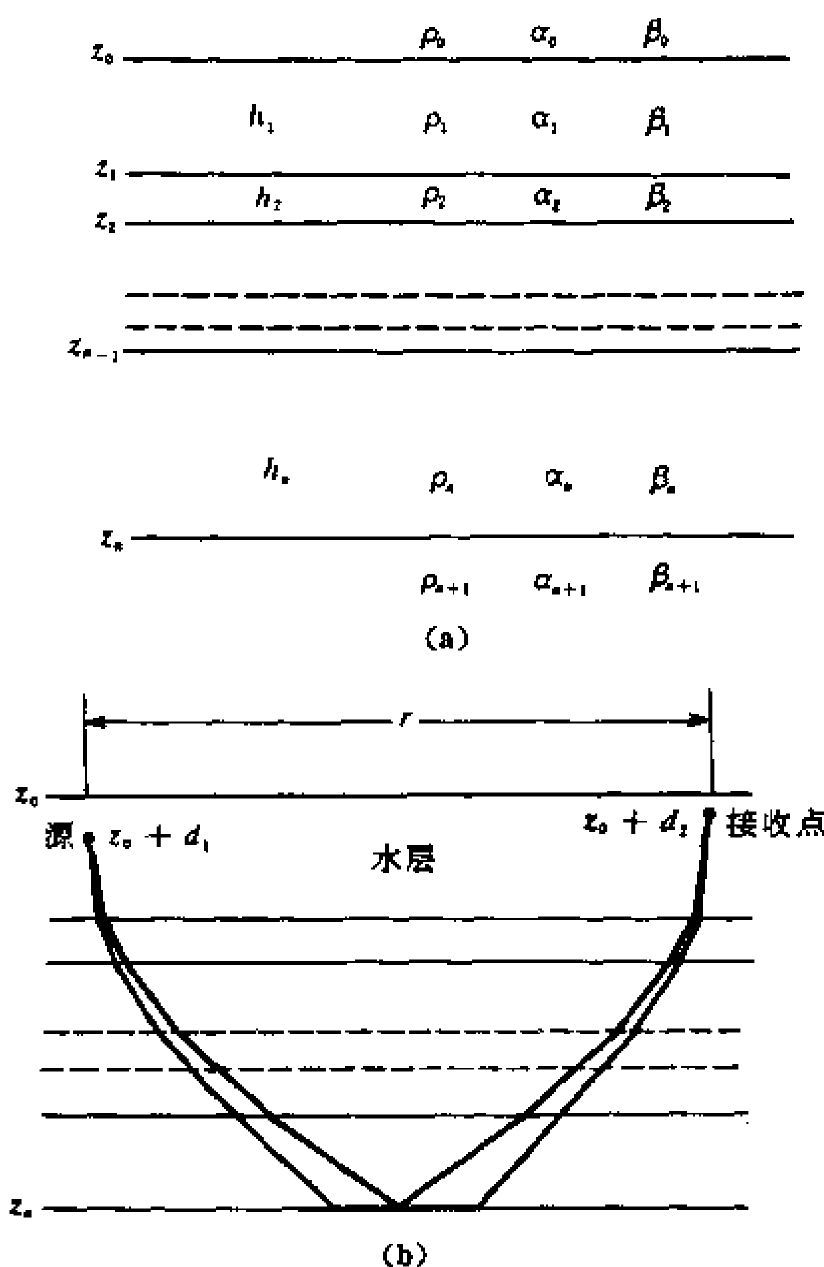


图 8.12　多层介质中的广义射线

(a)n 层介质；(b)广义射线

层中只有产生 P 波的压力场 p，则

$$P^{\wedge}(r,z,t)=\frac{R_s}{[r^2+(z-d_1)^2]^{1/2}}\cdot P_0\left(t-\frac{[r^2+(z-d_1)^2]^{1/2}}{\alpha_1}\right) \tag{8.212}$$

式中，R_s 是震源与接收点的距离，$P_0(t)$是震源的压力时间函数。

用 Cagniard 方法可以得出 Moho 界面（第 n 个界面）上的广义 P 波的一次反射，它的 Laplace 变换是

$$\overline{P}^{反}(r,z,s) = \frac{2s}{\pi}R_s\overline{P}_0(s)\mathrm{Im}\int_0^{i\infty}\frac{p}{\xi_1}K_0(spr)\Pi(p)\exp\{-s\Sigma(p)\}\mathrm{d}p \tag{8.213}$$

式中 K_0 是零阶虚宗量 Hankel 函数。

$$\Pi(p) = (\dot{P}\dot{P})_1(\dot{P}\dot{P})_2\cdots(\dot{P}\dot{P})_{n-1}(\dot{P}\dot{P})_n(P\dot{P})_{n-1}\cdots(\dot{P}\dot{P})_1 \tag{8.214}$$

$$\begin{aligned}\Sigma(p) = &(h_1 - d_1)\xi_1 + h_2\xi_2 + \cdots + h_n\xi_n + h_s\xi_n\cdots \\ &+ h_2\xi_2 + (h_1 - d_2)\xi_1\end{aligned} \tag{8.215}$$

这里 $\xi_i=(\alpha_i^{-2}-p^2)^{1/2}$，$i=1,2\cdots,n$，且取 $\mathrm{Re}\xi_i\geqslant 0$。式(8.214)是 n 界面以上的各个界面上的折射因数和 n 界面上的反射因数的乘积，而式(8.215)是沿着广义射线的垂直相位延迟。

为了计算式(8.123)的反变换式，先来确定 Cagniard 路径 $p=p(\tau)$，它从下面的方程中解出：

$$\tau = pr + \Sigma(p) \tag{8.216}$$

这里 τ 是正实数。一般情况下，方程(8.126)只能用数值方法解出。当 α_i 随深度增加时，对于足够远的距离 r，还会有首波产生。

如果 $P_0(t)=H(t)$，则在 R_s 处的响应为

$$P^{反}(r,z,t) = \frac{2}{\pi}R_s\mathrm{Im}\int_0^t\frac{p}{\xi_1}\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\tau}\right)\frac{\Pi(p)\mathrm{d}\tau}{(t-\tau)^{1/2}(t-\tau+2pr)^{1/2}} \tag{8.217}$$

用$(2pr)^{1/2}$替代$(t-\tau+2pr)^{1/2}$，式(8.217)可简化为

$$P^{反}(r,z,t) = \frac{2}{\pi}\psi(t) * \frac{1}{t^{1/2}} \tag{8.218}$$

其中

$$\psi(t) = R_s\mathrm{Im}\left\{\frac{p^{1/2}}{\xi_1}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\tau}\frac{\Pi(p)}{(2r)^{1/2}}\right\} \tag{8.219}$$

这个结果在与实际资料对比时，还得考虑两个主要修正，一是仪器的响应 $I(t)$，另一是震源与接收点处的顶面反射，这些都可放在震源时间函数中加以修正。修正项为

$$T(t) = P_0(t) * I(t) * \left[\delta(t) - \delta\left(t - \frac{2d_1}{\alpha_1}\right) - \delta\left(t - \frac{2d_2}{\alpha_2}\right) + \delta\left(t - \frac{2d_1}{\alpha_1} - \frac{2d_2}{\alpha_1}\right)\right] \tag{8.220}$$

上式括号中的最后三个 δ 函数分别表示震源顶面反射、接收点顶面反射及它们的二次反射，见图 8.13。这样修正之后，我们得到最后的响应是

$$T(t) * \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}P^{反} = \frac{\mathrm{d}T(t)}{\mathrm{d}t} * \frac{2}{\pi}\psi(t) * \frac{1}{t^{1/2}} \tag{8.221}$$

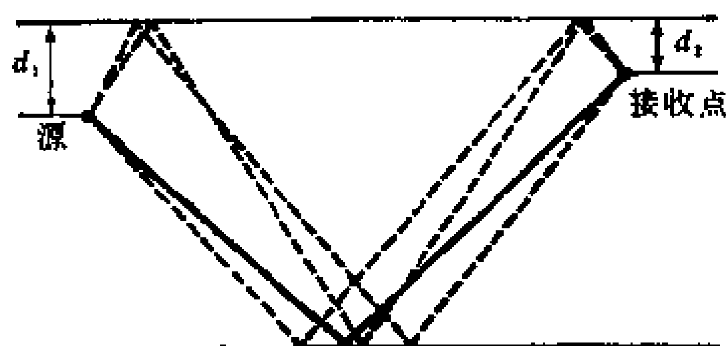


图 8.13 近地表的震源和接收点处的顶面反射

§ 7 反射率法

对于分层均匀的多层介质，计算这些叠层中的广义反射波，包括多次反射及首波等，并用叠层的散射系数来表达波的位移-应力矢量的这一类方法，称为反射率法，可以说在第五章我们讨论球面波的反、折射时，已介绍过反射率法。这种方法对波动方程作关于时间和水平坐标的两次 Fourier 变换，求出在变换域上相应的解，

它是(k, ω)的函数，其中水平波数k和频率ω都是变换参数，之

的值。在震源 $z=h$ 处，这个矢量 $\mathcal{F}(k,z,\omega)$ 是不连续的。若震源与方位 φ 有关，则还必须引进对 φ 的有限 Fourier 变换，这时矢量的变换形式为 $\mathcal{F}(k,m,z,\omega)$，变换参数 m 是一系列整数，求反变换只是将每一个 m 对应的解求和即可。在实际问题中，只需取有限几项，如对双力偶震源，仅取 $-2\leqslant m\leqslant 2$。

震源在第 s 层，为了确定入射波，可以设想震源是位于一无限均匀的并与 s 层具有同样弹性参数的无限空间中，则对震源以下的下行波的位移-应力矢量能较容易求得，这里我们只考虑 P-SV 问题，像在第五章已经讨论过的那样，位移-应力矢量可表示为 $\mathcal{F}=\mathbf{F}\boldsymbol{W}$，这里 $\mathbf{F}=\mathbf{F}(z)$ 是相应于每一层的层矩阵，而 $\boldsymbol{W}$ 是由 4 个散射因数作为 4 个分量构成的矢量，分别代表层中的下行 P 波、下行 SV 波，上行 P 波和上行 SV 波的振幅。

用 $\mathcal{F}^{\wedge P}$ 表示下行入射 P 波的位移-应力矢量，按散射矩阵的第一列，可表示为（相当于无限均匀介质情况）

$$\mathcal{F}^{\wedge P}(k,m,z,\omega)=P^{\wedge}\begin{pmatrix}\alpha_s p\\ \alpha_s\xi_s\\ 2\mathrm{i}\omega\rho_s\alpha_s\beta_s^2\, p\xi_s\\ \mathrm{i}\omega\rho_s\alpha_s(1-2\beta_s^2p^2)\end{pmatrix}\exp[\mathrm{i}\omega\xi_s(z-h)] \tag{8.222}$$

式中 $P^{\wedge}$ 是与震源谱及方位有关的因子。我们的讨论集中在位移上，为简单起见，后面只写出位移-应力矢量中的上面两个分量。

这个入射波，经过各层，一直透射到 m 层的底面 (z_m)，在这层介质底面以上的下行入射波有

$$\begin{pmatrix}\alpha_m p\\ \alpha_m\xi_m\end{pmatrix}\left(\prod_{j=s}^{m-1}(\grave{\mathrm{P}}\grave{\mathrm{P}})_j\right)\exp\left[\mathrm{i}\omega\left(\sum_{j=s+1}^{m}\xi_j h_j\right)\right]P^{\wedge}\exp[\mathrm{i}\omega\xi_s(z_s-h)]$$

式中 z_s 为 s 层底面的深度。接着，我们要研究 m 层以下到 n 层的介质中的反、折射波。这里可能是由许多层构成的叠层，用 $\{\acute{\mathrm{P}}\grave{\mathrm{P}}\}_n^m$ 表示这叠层的 P 反射波因数，用 $\{\acute{\mathrm{P}}\grave{\mathrm{S}}\}_n^m$ 表示 S 反射波因数等，它们

都是待求的未知因数。若应用传播矩阵法，则不同层中的位移-应力矢量通过传播矩阵 $\mathbf{P}(z_m, z_n)$ 表示为

$$\mathcal{J}(z_m^{+0}) = \mathbf{P}(z_m, z_n)\mathcal{J}(z_n^{-0}) \tag{8.223}$$

同时用层矩阵表示位移-应力矢量，即

$$\mathcal{J}(z_m^{+0}) = \mathbf{E}_m \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ \{\dot{P}\dot{P}\}_n^m \\ \{\dot{P}\dot{S}\}_n^m \end{Bmatrix} \tag{8.224}$$

和

$$\mathcal{J}(z_n^{-0}) = \mathbf{E}_{n+1} \begin{Bmatrix} \{\dot{P}\dot{P}\}_n^m \\ \{\dot{P}\dot{S}\}_n^m \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{8.225}$$

式中 $\mathbf{E}_m$ 和 $\mathbf{E}_{n+1}$ 分别是介质的层矩阵在 z_m 和 z_n 处取值。这种表达符合我们已作的假设，即式(8.224)表示在叠层上入射的仅是下行 P 波，(8.225)表示 z_n 以下的半空间没有上行波。将式(8.224)及(8.225)代入方程(8.223)，就可得到这四个待定因数。Červeny (1974)和 Kind(1976)对此都有过详细的讨论。解得了这些因数后，很容易写出在 m 层介质中，在 z_m 界面上的上行 P 波，有

$$\begin{bmatrix} \alpha_m p \\ -\alpha_m \xi_m \end{bmatrix} \left(\prod_{j=s}^{m-1} (\dot{P}\dot{P})_j \right) \exp\left[i\omega\left(\sum_{j=s+1}^{m} \xi_j h_j \right)\right] \cdot$$

$$P^{\lambda}\{\dot{P}\dot{P}\}_n^m \exp[i\omega\xi_s(z_s - h)]$$

这个波经 m 层以上各层，透射到自由表面时，则为

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 p \\ -\alpha_1 \xi_1 \end{bmatrix} A_{\mathrm{PRO}} \exp[i\omega A_{\mathrm{SUM}}]\{\dot{P}\dot{P}\}_n^m P^{\lambda} \tag{8.226}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} A_{\text{PRO}} &= \left(\prod_{j=s}^{m-1}(\acute{\text{P}}\grave{\text{P}})_j\right)\left(\prod_{j=1}^{m-1}(\acute{\text{P}}\grave{\text{P}})_j\right) \\ A_{\text{SUM}} &= \sum_{j=s+1}^{m}\xi_j h_j + \sum_{j=1}^{m}\xi_j h_j + \hat{\xi}_s(z_s - h) \end{aligned}\right\} \quad (8.227)$$

式(8.226)未作自由表面反射波的修正。经过修正后变换域的位移应是

$$\begin{bmatrix} \widetilde{u}_r(k,m,0,\omega) \\ \widetilde{u}_z(k,m,0,\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4\alpha_1\beta_1^2 p\xi_1\eta_1 \\ -2\alpha_1\xi_1(1-2\beta_1^2 p^2) \end{bmatrix} \cdot$$

$$\frac{A_{\text{PRO}}\exp[\mathrm{i}\omega A_{\text{SUM}}]\{\acute{\text{P}}\grave{\text{P}}\}_s^m P^{\wedge}}{(1-2\beta_1^2 p^2)^2 + 4\beta_1^4 p^2 \xi_1 \eta_1} \quad (8.228)$$

进行反变换是对 m 求和及对 k、ω 积分。先确定频率域上的解，有

$$\widetilde{\boldsymbol{u}}(r,\varphi,0,\omega) = \frac{1}{2\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} k[\widetilde{u}_r(k,m,0,\omega)\boldsymbol{B}_k^m - \mathrm{i}\widetilde{u}_z(k,m,0,\omega)\boldsymbol{P}_k^m]\mathrm{d}k \quad (8.229)$$

位移用水平波函数 $\boldsymbol{B}_k^m$ 与 $\boldsymbol{P}_k^m$ 表示，对于较远的水平距离，$\boldsymbol{B}_k^m$ 中的 $\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ 分量可省略(参看第二章)，之后得到：

$$\widetilde{\boldsymbol{u}}(r,\varphi,0,\omega) = \frac{1}{2\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}\omega^2 p\left[\widetilde{u}_r(\omega p,\varphi,0,\omega)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(\omega pr)}J_m(\omega pr)\hat{\boldsymbol{r}} + \mathrm{i}\widetilde{u}_z(\omega p,\varphi,0,\omega)J_m(\omega pr)\hat{\boldsymbol{z}}\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}\mathrm{d}p \quad (8.230)$$

最后再对 ω 作反变换，得到位移解 $\boldsymbol{u}(r,\varphi,0,t)$。

前面已提到过，对于体波，式(8.230)的积分仅在 p 的有限范围上进行。Fuchs 和 Müller(1971)建议取 $0\leqslant p\leqslant\frac{1}{\alpha_{\max}}$，这里 $\alpha_{\max}$是反射叠层以上各层中的最大 P 波速度。考虑到 A_{SUM}此时总是正值，这就不会在反射区上部出现不均匀波。另外重要的一点是，在式(8.230)的计算中，只用到$\{\acute{\text{P}}\grave{\text{P}}\}_k^m$，这可以说是反射叠层的综合反射系数，它包含了叠层内部所有可能的多次反射射线，这可用一个简单的例子给予证明。

如图 8.15 中，有两个半空间，中间夹着一薄夹层。不难写出

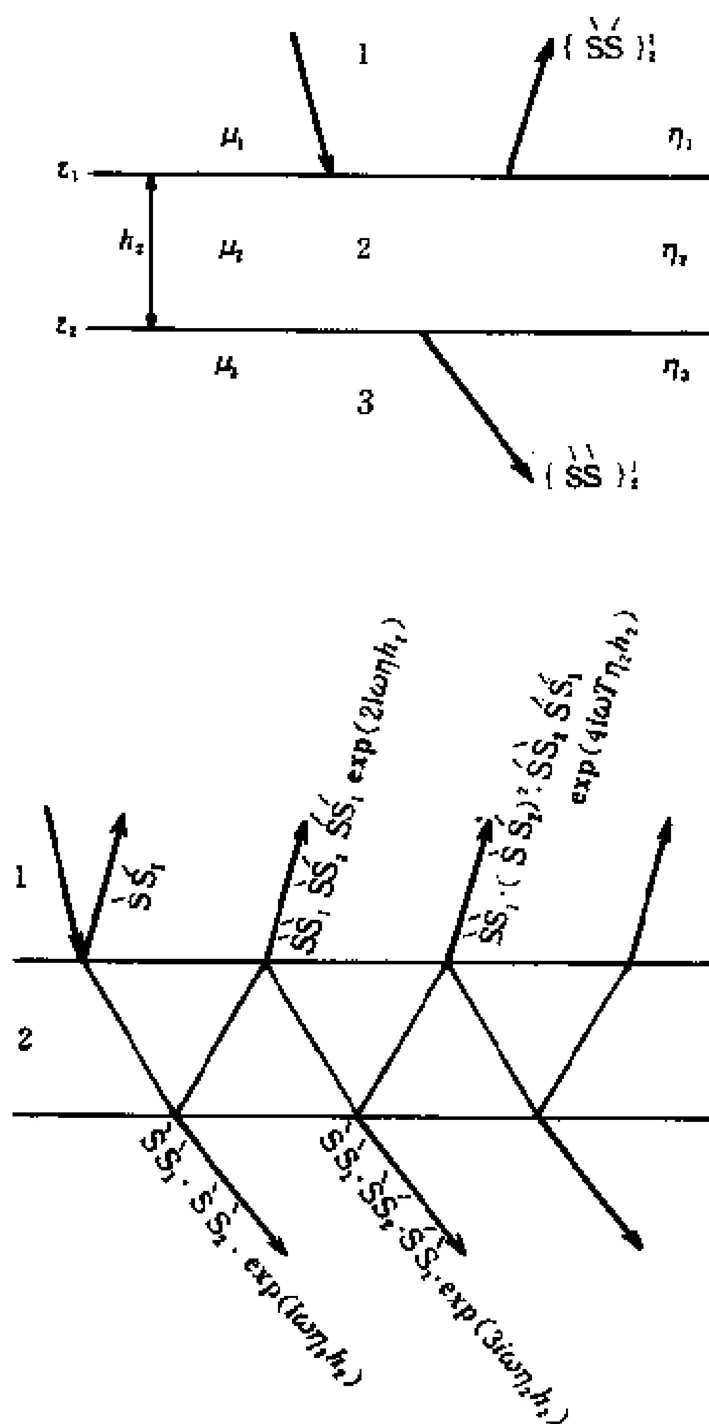


图 8.15　SH 波在夹层中的多次反、折射射线

(a)层的参数与全反射因数$\{\grave{S}\acute{S}\}_2^1$;(b)广义射线族

SH 波的位移-应力矢量为

$$\tilde{\mathbf{f}} = \begin{pmatrix} \hat{u}_{\varphi}(k, z, \omega) \\ \tilde{\sigma}_{\varphi z}(k, z, \omega) \end{pmatrix} \tag{8.231}$$

对应于式(8.224)和(8.225),在 $z=z_1$ 界面上(在介质 1 一测)的位移-应力矢量是

$$\tilde{\mathbf{f}}(z_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \mathrm{i}\omega\mu_1\eta_1 & -\mathrm{i}\omega\mu_1\eta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \{\acute{S}\acute{S}\}_2^1 \end{pmatrix} \tag{8.232}$$

而在 $z=z_2$ 的界面上(在介质 3 一侧),则有

$$\tilde{\mathbf{f}}(z_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \mathrm{i}\omega\mu_3\eta_3 & -\mathrm{i}\omega\mu_3\eta_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \{\acute{S}\acute{S}\}_2^1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{8.233}$$

用传播矩阵法,已知 SH 波的传播矩阵(第五章)

$$\mathbf{P}(z_1, z_2) = \begin{pmatrix} c & -\dfrac{1}{\mu_2\eta_2}s \\ \omega\mu_2\eta_2 s & c \end{pmatrix} \tag{8.234}$$

式中 $c=\cos(\omega\eta_2 h_2)$,$s=\sin(\omega\eta_2 h_2)$。

用关系式 $\tilde{\mathbf{f}}(z_1)=\mathbf{P}(z_1, z_2)\tilde{\mathbf{f}}(z_2)$,最后解得

$$\{\acute{S}\acute{S}\}_2^1 = \frac{\left(c - \mathrm{i}\dfrac{\mu_3\eta_3}{\mu_2\eta_2}s\right) - \left(\dfrac{\mu_3\eta_3}{\mu_1\eta_1}c - \mathrm{i}\dfrac{\mu_2\eta_2}{\mu_1\eta_1}s\right)}{\left(c - \mathrm{i}\dfrac{\mu_3\eta_3}{\mu_2\eta_2}s\right) + \left(\dfrac{\mu_3\eta_3}{\mu_1\eta_1}c - \mathrm{i}\dfrac{\mu_2\eta_2}{\mu_1\eta_1}s\right)} \tag{8.235}$$

这是夹层中多次反射的综合反射系数。比如有层顶面的反射波 $(\acute{S}\acute{S})_1$,折射进介质 2,再在层底面产生一次反射,再折射入介质 1 的二次反射有 $(\acute{S}\acute{S})_1(\acute{S}\acute{S})_2(\acute{S}\acute{S})_1 e^{2\mathrm{i}\omega\eta_2 h_2}$,还有其他多次反射波(图 8.15b)。这样,总的反射波就是它们的总和,为:

$$\begin{aligned} \{\acute{S}\acute{S}\}_2^1 &= (\acute{S}\acute{S})_1 + (\acute{S}\acute{S})_1 \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} [(\acute{S}\acute{S})_2 e^{2\mathrm{i}\omega\eta_2 h_2}](\acute{S}\acute{S})_1^{j-1} \right\} (\acute{S}\acute{S})_1 \\ &= (\acute{S}\acute{S}_1) + \frac{(\acute{S}\acute{S})_1(\acute{S}\acute{S})_2(\acute{S}\acute{S})_1 e^{2\mathrm{i}\omega\eta_2 h_2}}{1 - (\acute{S}\acute{S})_2(\acute{S}\acute{S})_1 e^{2\mathrm{i}\omega\eta_2 h_2}} \end{aligned} \tag{8.236}$$

式中第二个等号应用了无限几何级数求和公式。将界面上的反、折

射因数代入，最后得

$$\{\dot{S}\dot{S}\}_2^1 = \frac{\mu_1\eta_1 - \mu_2\eta_2}{\mu_1\eta_1 + \mu_2\eta_2} + \frac{\dfrac{2\mu_1\eta_1}{\mu_1\eta_1 + \mu_2\eta_2} \cdot \dfrac{\mu_2\eta_2 - \mu_3\eta_3}{\mu_2\eta_2 + \mu_3\eta_3} \cdot \dfrac{2\mu_2\eta_2}{\mu_1\eta_1 + \mu_2\eta_2} e^{2i\omega\eta_2 h_2}}{1 - \dfrac{\mu_2\eta_2 - \mu_3\eta_3}{\mu_2\eta_2 + \mu_3\eta_3} \cdot \dfrac{\mu_2\eta_2 - \mu_1\eta_1}{\mu_2\eta_2 + \mu_1\eta_1} e^{2i\omega\eta_2 h_2}} \tag{8.237}$$

此式可精确地简化成式(8.235)。这就证明了综合反射因数$\{\dot{S}\dot{S}\}_2^1$实际上代表了有无穷多条射线的广义反射射线族。

§8 WKBJ 法

讨论连续的垂直非均匀介质的情况，若介质符合弱非均匀性条件，则 P、SV、SH 解耦(参看本章§2)，我们讨论 SH 波，波场可按式(8.135)写出

$$\boldsymbol{M} = \frac{1}{\sqrt{\mu}}\mathrm{curl}(\hat{z}\varphi_3) = -\hat{y}\frac{1}{\mu}\frac{\partial\varphi_3}{\partial x} \tag{8.238}$$

式中$\mu=\mu(z)$，φ_3是位移势，它满足波动方程

$$\frac{\partial^2\varphi_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi_3}{\partial z^2} = \frac{1}{\beta^2}\frac{\partial^2\varphi_3}{\partial t^2} \tag{8.239}$$

$\beta=\beta(z)$是 S 波速度。在谐波情况下，位移$v(x,z,t)$可取为：

$$v(x,z,t) = \frac{1}{\sqrt{\mu}}F(z)\cos k(ct - x) \tag{8.240}$$

式中c为水平方向的波速(视速度)。这样，$F(z)$应满足

$$\frac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}z^2} + k^2\left(\frac{c^2}{\beta^2} - 1\right)F = 0 \tag{8.241}$$

作图 8.16，将坐标原点设置在$\beta=c$的面上，且z的方向指向β的增加方向。常微分方程(8.241)的解是熟知的 WKBJ 解(以 Wentzel，Kramers、Brillouin 及 Jeffreys 等 4 位著者名字的第一个字母命名)，有

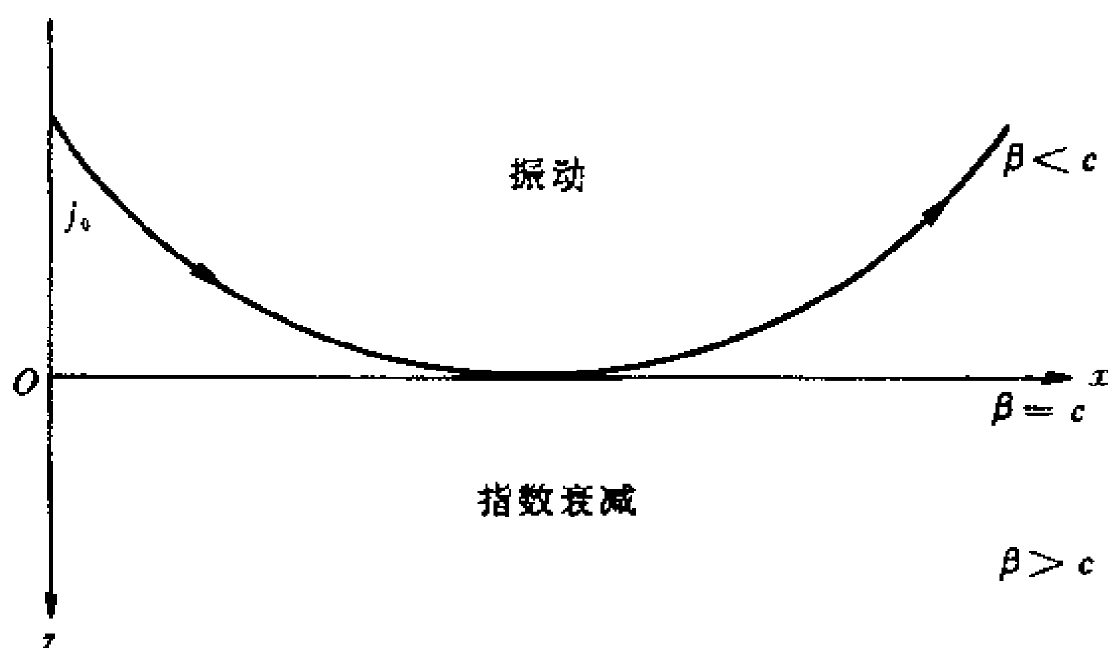


图 8.16　SH 平面波的内反射

$$F(z)=|q|^{1/4}\cdot\begin{cases}A\sin kL+B\cos kL & (\beta<c)\\ Ce^{-kM} & (\beta>c)\end{cases} \tag{8.242}$$

式中 $L=\int_z^0\sqrt{\frac{c^2}{\beta^2}-1}\,\mathrm{d}z$，$M=\int_0^z\sqrt{1-\frac{c^2}{\beta^2}}\,\mathrm{d}z$，$q=\frac{c^2}{\beta^2}-1$。可看出，$z=0$ 的坐标平面好像是一个虚反射面，考虑这个面上的位移（F 值）与应力（$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}$ 值）的连续条件，可得 $A=B=C$。在 $z<0$ 的区域，解为：

$$\begin{aligned}v(x,z,t)&=Aq^{-1/4}\left(\frac{2}{\mu}\right)^{1/2}\cos k(ct-x)\sin\left(kL+\frac{\pi}{4}\right)\\&=\frac{Aq^{-1/4}}{\sqrt{2\mu}}\left\{\sin\left[k(ct-x+L)+\frac{\pi}{4}\right]-\right.\\&\quad\left.\sin\left[k(ct-x-L)-\frac{\pi}{4}\right]\right\}\end{aligned} \tag{8.243}$$

若介质是均匀的，$\beta=\beta_0$，则有

$$L = -z\sqrt{\frac{c^2}{\beta_0^2} - 1}, M = z\sqrt{1 - \frac{c^2}{\beta_0^2}}, \sin j_0 = \frac{\beta_0}{c}$$

而 $\pm\sin\left[k(ct - x \mp z\cot j_0) \pm \frac{\pi}{4}\right]$ 分别表示向下及向上的平面波。对于非均匀介质，虽然情况会复杂一些，但运动还是由向下和向上的波叠合而成，上行波的相位比下行波超前 $\frac{\pi}{2}$，与频率无关。

介绍了解微分方程的 WKBJ 方法的基本意义后，下面讲述 Chapman(1978)称之为 WKBJ 法的计算体波理论地震图的方法。

定义 Fourier 变换对有如下形式：

$$\left.\begin{aligned} \tilde{u}(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} u(x)\exp(-\mathrm{i}kx)\mathrm{d}x \\ u(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}(k)\exp(\mathrm{i}kx)\mathrm{d}k \end{aligned}\right\} \tag{8.244}$$

若作变量变换 $k = \omega p$，且限定 ω 是实数，则又可写

$$u(x) = \frac{|\omega|}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}(\omega p)\exp(\mathrm{i}\omega ps)\mathrm{d}p \tag{8.245}$$

上面作的是对水平坐标 x 的变换，对于时间 t 的变换为 $\tilde{u}(\omega)$ 与 $u(t)$，若 $u(t)$ 有因果性，则它的 Fourier 变换 $\tilde{u}(\omega)$ 在 ω 的上半复平面上解析，即有 $\mathrm{Im}(\omega) > 0$。又由于 $u(t)$ 是实函数，因而按因果性有

$$\tilde{u}(-\omega) = \tilde{u}^*(\omega) \tag{8.246}$$

式中上标“ * ”表示复共轭。

对二维及三维波动方程的变换在第五章 § 6 中讲述过。为讨论问题的方便，这里再简单叙述一下。

对二维波动方程作两次 Fourier 变换之后，得到一个以 z 为独立变量的常微分方程，通过 WKBJ 法等任何方法，得到变换域的解 $\tilde{u}(\omega, \omega p)$，因而它的反变换为

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}(\omega, \omega p)|\omega|\exp\{-\mathrm{i}\omega(t - px)\}\mathrm{d}p\mathrm{d}\omega \tag{8.247}$$

式中的函数 $\tilde{u}(\omega, \omega p)$ 通常包含有平方根因子 $\xi = (s^2 - p^2)^{1/2}$，这里

s 是慢度，p 与 ξ 分别是慢度的水平分量与垂直分量。ξ 出现在指数函数中形式常为 $\exp(\pm i\omega\xi z)$，为了满足无限远的辐射条件，对这平方根因子 ξ 需要作单一的选择，也就是要选择积分路径所在的 Riemann 叶。我们选择 $\mathrm{Im}(\omega\xi)>0$。在分支点 $p=\pm s$ 开始，进行切割，在 ω 为实数的情况下，可有两种切割，如图 8.17 所示。

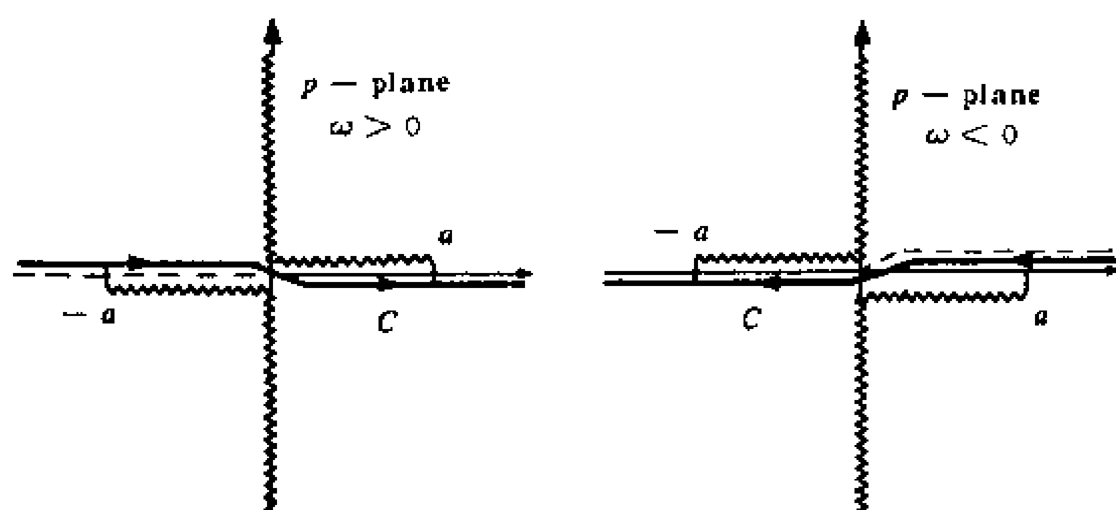


图 8.17　ω 为实数情况下的切割

对于三维问题，如果采用直角坐标，则我们对两个水平坐标 x，y 都应作 Fourier 变换，而对于圆柱坐标，则对方位坐标 φ 作有限 Fourier 变换，其变换对为：

$$\left.\begin{aligned} \tilde{u}(l) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\varphi)\exp(-\mathrm{i}l\varphi)\mathrm{d}\varphi \\ u(\varphi) &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \tilde{u}(l)\exp(\mathrm{i}l\varphi) \end{aligned}\right\} \tag{8.248}$$

而对于平面径向坐标 r 则采用 Fourier-Bessel 变换，其变换对为

$$\left.\begin{aligned} \tilde{u}(k) &= \int_0^{\infty} u(r)rJ_l(kr)\mathrm{d}r \\ u(r) &= \int_0^{\infty} \tilde{u}(k)kJ_l(kr)\mathrm{d}k \end{aligned}\right\} \tag{8.249}$$

J_l 是 l 阶 Bessel 函数，再作变量变换 $k=\omega p$，则反变换可写成

$$u(r)=\omega^2\int_0^{\infty}\tilde{u}(\omega p)pJ_l(\omega pr)\mathrm{d}p \tag{8.250}$$

这里只要求 ω 是实值，这是因为 Bessel 函数具有对称性，不论 ω 的正负 p 总是正的。上式也可用 Hankel 函数表示为

$$u(r)=\frac{\omega|\omega|}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{u}(\omega p)pH_l^{(1)}(\omega pr)\mathrm{d}p \tag{8.251}$$

由于 Hankel 函数有渐近公式：

$$H_l^{(1)}(\omega pr)\approx\left(\frac{2}{\pi\omega pr}\right)^{1/2}\exp\{\mathrm{i}(\omega pr-\frac{1}{2}l\pi-\frac{1}{4}\pi)\} \tag{8.252}$$

对于正频率，Hankel 函数的切割线在积分路径之下，对于负频率，则在积分路径之上(图 8.17)。将式(8.252)的近似渐近式代入式(8.251)中，就可得到类似于式(8.247)的反变换。在以后的反变换讨论中，我们只限于讨论轴对称情况。至于非轴对称问题，很容易推广。

现在再转入球对称介质。运用球坐标(R,θ,φ)，这时，对方位角 φ 采用式(8.248)那样的有限 Fourier 变换，对纬度角 θ 则采用 Legendre 变换，用变量 $\nu=l+\frac{1}{2}$，其变换对为

$$\left.\begin{aligned}\tilde{u}(\nu)&=\int_0^{\pi}u(\theta)\sin\theta P_l(\cos\theta)\mathrm{d}\theta\\ u(\theta)&=\sum_{l=0}^{\infty}\tilde{u}(\nu)\nu P_l(\cos\theta)\end{aligned}\right\} \tag{8.253}$$

式中的 Legendre 级数不容易收敛，可用 Watson 变换变成积分形式，即

$$u(\theta)=\sum_{l=-\infty}^{\infty}(-1)^l\int_0^{\infty}\tilde{u}(\nu)\nu P(\nu,\theta)\exp(2\mathrm{i}l\pi\nu)\mathrm{d}\nu \tag{8.254}$$

这里已作符号简化，即 $P(\nu,\theta)=P_l(\cos\theta)$。若采用积分变量变换 $\nu=\omega pR$，则可得到

$$u(R,\theta)=\sum_{l=-\infty}^{\infty}(-1)^l\omega^2R^2\int_0^{\infty}\tilde{u}(\omega pR)pP(\omega pR,\theta)\exp(2\mathrm{i}l\pi\omega pR)\mathrm{d}p \tag{8.255}$$

当 $P(\nu,\theta)$ 及 $\tilde{u}(\nu)$ 是 ν 的偶函数时，上式中的 ω 值可正可负都行，式中的每一个积分类似于式(8.250)，因而也类似于式(8.247)。这样在反变换讨论中，只需讨论式(8.247)。

下面用 WKBJ 法(或称慢度法)计算它，将它重新写成

$$u(t,x) = -\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{u}(\omega,\omega p)(-\mathrm{i}\omega)\times$$
$$(-\mathrm{isgn}(\omega))\exp[-\mathrm{i}\omega(t-px)]\mathrm{d}\omega\mathrm{d}p \qquad (8.256)$$

先完成对 ω 的计算，则有

$$u(t,x) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{u}_{\mathrm{H},t}(t-px,p)\mathrm{d}p \qquad (8.257)$$

这里函数 $u_{\mathrm{H},t}$ 是 $u(t)$ 的 Hilbert 变换 $u_{\mathrm{H}}(t)$ 对时间的微商，在频率域相当于将 $\tilde{u}(\omega)$ 乘以 $(-|\omega|)$，在时间域相当于与 $\frac{1}{\pi t^2}$ 进行卷积，即

$$\tilde{u}_{\mathrm{H},t}(t',p) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\tilde{u}(t,p)}{(t'-t)^2}\mathrm{d}t \qquad (8.258)$$

通常，在式(8.256)中的变换函数 $\tilde{u}(\omega,\omega p)$ 能分解为

$$\tilde{u}(\omega,\omega p) = \tilde{s}(\omega)\tilde{v}(\omega,p) \qquad (8.259)$$

这里 $\tilde{s}(\omega)$ 可以包含震源函数及记录仪器的响应等。将式(8.259)代入式(8.256)，则反变换式(8.257)变为

$$u(t,x) = -\frac{1}{2\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}s(t) * \int_{-\infty}^{\infty}\tilde{v}_{\mathrm{H}}(t-px,p)\mathrm{d}p \quad (8.260)$$

或
$$u(t,x) = -\frac{1}{2\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}s_{\mathrm{H}}(t) * \int_{-\infty}^{\infty}\tilde{v}(t-px,p)\mathrm{d}p \quad (8.261)$$

这里利用了卷积的 Hilbert 变换关系。式(8.260)或式(8.261)表示二维波动方程的 WKBJ 解。

对于圆柱坐标系的轴对称情况，这时式(8.250)中 $l=0$，考虑时间因素，反变换表示式为

$$u(t,r) = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{u}(\omega,\omega p)\omega^2 pJ_0(\omega pr)\exp(-\mathrm{i}\omega t)\mathrm{d}\omega\mathrm{d}p$$
$$(8.262)$$

对频率积分后，有

$$u(t,r)=-\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\int_0^{\infty}\left\{\check{J}\left(\frac{t}{pr}\right)*\tilde{u}(t,p)\right\}\mathrm{d}p \qquad (8.263)$$

式中

$$\check{J}_0\left(\frac{t}{pr}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}J_0(\omega pr)\mathrm{e}^{-i\omega t}\mathrm{d}\omega \qquad (8.264)$$

$\tilde{u}(t,p)$是$\tilde{u}(\omega,\omega p)$对$\omega$进行的反变换。在上述过程中，将重积分(8.262)分解为三个运算步骤，即对$\tilde{u}(\omega,\omega p)$进行$\omega$反变换、卷积、再进行$p$积分。

由于实函数$\tilde{u}(t,p)$只与模型有关，一般是非常简单的形式，卷积及对p的实数积分都在有限范围上进行，故这种分解运算是方便的。对于长周期地震仪记录情况，在频率域作卷积(即计算$J_0(\omega pr)\tilde{u}(\omega,\omega p)$)会更有效。而对短周期地震仪记录情况，可将$\check{J}_0(t)$近似表示成(有两个可积奇点)：

$$\check{J}_0(t)\approx\frac{1}{\sqrt{2}\pi}\left\{\frac{H(1-t)}{(1-t)^{1/2}}+\frac{H(t+1)}{(t+1)^{1/2}}\right\} \qquad (8.265)$$

将它代入式(8.263)，得到

$$\begin{aligned}u(t,r)\approx&-\frac{1}{\pi(2r)^{1/2}}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left\{\frac{H(-t)}{(-t)^{1/2}}*\int_0^{\infty}p^{1/2}\tilde{u}(t-pr,p)\mathrm{d}p+\right.\\&\left.\frac{H(t)}{t^{1/2}}*\int_0^{\infty}p^{1/2}\tilde{u}(t+pr,p)\mathrm{d}p\right\}\\&=-\frac{1}{\pi(2r)^{1/2}}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}s(t)*\frac{H(t)}{t^{1/2}}*\\&\int_0^{\infty}p^{1/2}[\tilde{v}_H(t-px,p)+\tilde{v}(t+px,p)]\mathrm{d}p\end{aligned} \qquad (8.266)$$

此为三维波动方程的 WKBJ 解。

现在用几种类型的射线作为实例来说明式(8.260)或(8.261)及式(8.266)的应用，然后再综合为最一般情况。

首先计算一条转折射线，在变换域上用 WKBJ 法求得近似解

$\tilde{u}(\omega,\omega p)$，并按式(8.259)分解，可得

$$\tilde{v}(\omega,p)=-\mathrm{isgn}(\omega)\exp\{\mathrm{i}\omega\tau(p)\}R(p) \qquad (8.267)$$

式中 $\tau(p)$是垂直慢度积分，为

$$\tau(p)=2\int_{z_a}^{z}\xi(p,\zeta)\mathrm{d}\zeta \qquad (8.268)$$

积分中下限是转折点，定义 $\xi(p,z_a)=0$. 上限是震源和接收点的深度（为简单，假设它们的深度值相同），被积函数是垂直慢度。此情况如图 8.18a 所示。应注意的是图中 z 轴向上（指向介质外部）为正。

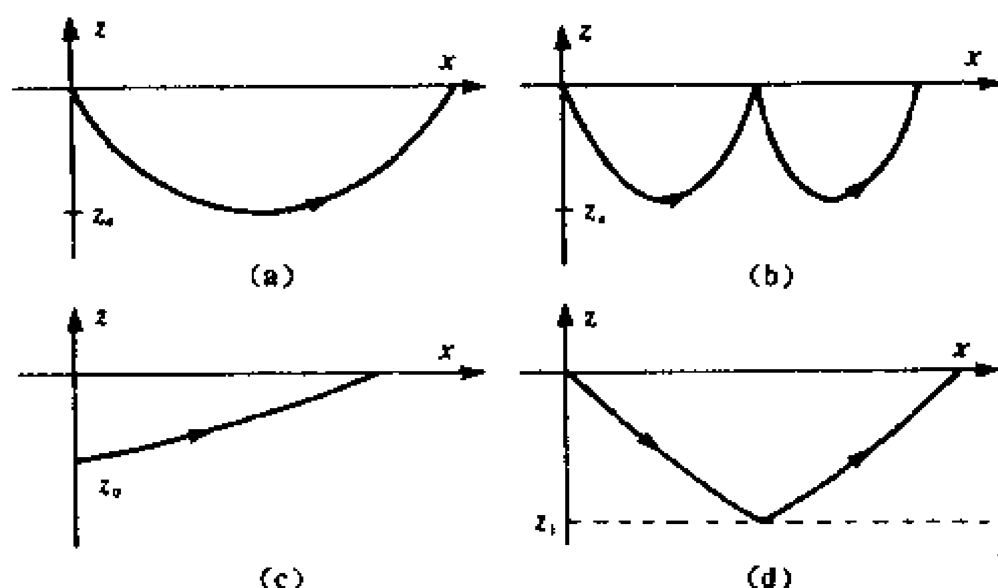


图 8.18 应用 WKBJ 近似的 4 种射线类型

在式(8.267)中，函数 $R(p)$包括震源和接收处的方向性函数，反射与折射因数的乘积等，并允许是复数形式。又由于有 $\mathrm{sgn}(\omega)$，使得 $\tilde{v}(-\omega,p)=\tilde{v}^{*}(\omega,p)$。先完成对 ω 的反变换，得

$$\tilde{v}_{\mathrm{H}}(t,p)=-R(p)\delta(t-\tau(p)) \qquad (8.269)$$

将上式代入式(8.260)，会发现这是一个很容易的计算关系。若令 $\theta(p,x)=px+\tau(p)$，则由式(8.260)得

$$u(t,x) = \frac{1}{2\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}s(t) * \int_{-\infty}^{\infty} R(p)\delta(t-\theta(p,x))\mathrm{d}p$$

$$= \frac{1}{2\pi}\dot{s}(t) * \sum_{t=\theta(p,x)} \frac{R(p)}{|\theta'(p,x)|} \tag{8.270}$$

式中求和的意思是，从方程 $t=\theta(p,x)$ 中解出所有解进行求和，所以式中的 p 实际上是由 t 表达的。还应注意到，式中的两个反变换积分运算都是精确的，解的近似性只出现在用 WKBJ 法解得的结果上。

接着讨论如图 8.18b 所示的多次转折射线。现在来修正(8.270)的结果，修正可从 WKBJ 近似式(8.267)着手，修正后应是

$$\tilde{v}(\omega,p) = -\exp\{\mathrm{i}\omega\tau(p)\}R(p) \tag{8.271}$$

这里 $\tau(p)$ 与 $R(p)$ 需要重新定义，但与前面有类似的特征。若震源与接收点都在表面，则 $\tau(p)$ 只是式(8.268)的两倍。而 $R(p)$ 则是一次转折的折、反射因数的平方再乘以自由表面的反射因数。这样，在频率域上进行反变换后，得

$$\tilde{v}(t,p) = -R(p)\delta[t-\tau(p)] \tag{8.272}$$

代入式(8.260)，得 WKBJ 地震图

$$u(t,x) = \frac{1}{2\pi}s_{\mathrm{H},t}(t) * \sum_{t=\theta(p,x)} \frac{R(p)}{|\theta'(p,x)|} \tag{8.273}$$

式中 $s_{\mathrm{H},t}(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}s_{\mathrm{H}}(t)$。

图 8.18c 所示的直达波射线，也可以用上述公式进行计算。在变换域上的解有

$$\tilde{v}(\omega,p) = \exp\{\mathrm{i}\omega\tau(p)\}R(p) \tag{8.274}$$

式中的 $R(p)$ 还是包括震源和接收点处的方向性函数，而 $\tau(p)$ 现在有

$$\tau(p) = \int_{z_0}^{z} \xi(p,\zeta)\mathrm{d}\zeta \tag{8.275}$$

这里 z_0 是震源深度。这样，得到的地震图是

$$u(t,x) = -\frac{1}{2\pi}s_{H,t}(t) * \sum_{t=\theta(p,x)} \frac{R(p)}{|\theta'(p,x)|} \qquad (8.276)$$

此结果在形式上与前面两种情况相似，但它们之间却有重要的差异。首先，式(8.275)的上、下限是固定的，而在转折射线中，转折点 z_a 却与 p 有关。

另外，对于直达波的式(8.276)，可进一步化简。函数 $\theta(p,x)$ 的微商有：

$$\theta'(p,x) = x - X(p) \qquad (8.277)$$

其中

$$X(p) = -\tau'(p) = \int_{z_0}^{z} \frac{p\mathrm{d}\zeta}{\xi(p,\zeta)} \qquad (8.278)$$

直达波的射线参数 p_x 应使 $\theta'(p_x,x)=0$，这样，将 $\theta(p,x)$ 在 p_x 附近展开，有

$$\theta(p,x) \approx T(p_x) - \frac{1}{2}X'(p_x)(p - p_x)^2 \qquad (8.279)$$

式中

$$T(p) = \theta(p,X(p)) = \int_{z_0}^{z} \frac{a^2\mathrm{d}\zeta}{\xi(p,\zeta)} \qquad (8.280)$$

注意到几何扩散因子常常是正的，即

$$X'(p) = \int_{z_0}^{z} \frac{a^2\mathrm{d}\zeta}{\xi^3} > 0 \qquad (8.281)$$

将式(8.279)对 p 求微商，得

$$\theta'(p,x) = -X'(p_x)(p - p_x) \qquad (8.282)$$

在 $\theta=t$ 的情况下，按式(8.279)，可解出关于 p_x 的两个根

$$p - p_x = \pm\sqrt{-\frac{2[t - T(p_x)]}{X'(p_x)}} \qquad (8.283)$$

代入式(8.282)，并考虑式(8.281)关系，得 $t=\theta$ 情况下有两个值

$$\theta'(p,x) = -X'(p_x)\left[=\sqrt{\frac{2(t-T(p_x))}{-X'(p_x)}}\right]$$

$$= \mp \sqrt{2(T - t)X'(p_x)} \tag{8.284}$$

将这两个值取绝对值代入式(8.276)中，最后得到理论地震图为

$$u(t,x) = -\frac{R(p_x)}{\pi(2X(p_x))^{1/2}} s_{\mathrm{H},t}[t - T(p_x)] * \frac{H(-t)}{(-t)^{1/2}} \tag{8.285}$$

还可利用 Hilbert 变换的性质，将上式变成

$$u(t,x) = \frac{R(p_x)}{\pi(2X'(p_x))^{1/2}} \dot{s}(t - T(p_x)) * \frac{H(t)}{t^{1/2}} \tag{8.286}$$

上面的实例表明，不同情况在变换域上的响应可写成统一的形式

$$\tilde{v}(\omega,p) = \exp\{\mathrm{i}\omega\tau(p)\}R(p) \tag{8.287}$$

其中 $\tau(p)$和 $R(p)$对不同情况有不同的形式，而且可以是复函数。对于反射射线(图 8.18d)也可包括进去，我们在后面还要讨论它。在最一般的情况下，复函数 $\tau(p)$和 $R(p)$里含有根式，为保证单值，取$\mathrm{Im}(\omega\xi)>0$的 Riemann 叶，再考虑到因果性，可将它们写成

$$\left.\begin{aligned} \tau(p) &= \tau_{\mathrm{R}}(p) + \mathrm{i}\,\mathrm{sgn}(\omega)\tau_{\mathrm{I}}(p) \\ R(p) &= R_{\mathrm{R}}(p) + \mathrm{i}\,\mathrm{sgn}(\omega)\,R_{\mathrm{I}}(p) \end{aligned}\right\} \tag{8.288}$$

这里虚部是取 ω 为正时的值，此时应有 $\tau_{\mathrm{I}}(p)>0$。因而对式(8.287)进行 Fourier 反变换，可得

$$\begin{aligned} \tilde{v}(t,p) &= \frac{R_{\mathrm{R}}}{\pi}\frac{\tau_{\mathrm{I}}}{(t-\tau_{\mathrm{R}})^2+\tau_{\mathrm{I}}^2} + \frac{R_{\mathrm{I}}}{\pi}\frac{t-\tau_{\mathrm{R}}}{(t-\tau_{\mathrm{R}})^2+\tau_{\mathrm{I}}^2} \\ &= \frac{1}{\pi}\mathrm{Im}\left(\frac{R(p)}{t-\tau(p)}\right) \end{aligned} \tag{8.289}$$

它的 Hilbert 变换应为

$$\tilde{v}_{\mathrm{H}}(t,p) = -\frac{1}{\pi}\mathrm{Re}\left(\frac{R(p)}{t-\tau(p)}\right) \tag{8.290}$$

当 $\tau_{\mathrm{I}}\to 0$ 时，有如下极限关系

$$\frac{1}{\pi}\mathrm{Im}\left(\frac{1}{t-\tau}\right) \to \delta(t-\tau)$$

现在讨论的一般情况已包括了前面讨论过的问题，即对于转折射线，$R_R=0$，对于二重转折射线及直达波射线，$R_I=0$，按式(8.260)或(8.261)，理论地震图为

$$u(t,x)=\frac{1}{2\pi^2}\dot{s}(t)*\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{Re}\left(\frac{R(p)}{t-\theta(p,x)}\right)\mathrm{d}p \quad (8.291)$$

或者

$$u(t,x)=-\frac{1}{2\pi^2}s_{H,t}(t)*\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{Im}\left(\frac{R(p)}{t-\theta(p,x)}\right)\mathrm{d}p \quad (8.292)$$

式中 p 是被限定在实轴上。如果 $R(p)$ 只是实的或者只是虚的，则可以把两种表达式合起来写成

$$\begin{aligned}u(t,x)=&-\frac{1}{2\pi^2}\dot{s}(t)*\int_{-\infty}^{\infty}\frac{R_I(p)\tau_I}{(t-px-\tau_R)^2+\tau_I^2}\mathrm{d}p-\\&\frac{1}{2\pi^2}s_{H,t}(t)*\int_{-\infty}^{\infty}\frac{R_R(p)\tau_I}{(t-px-\tau_R)^2+\tau_I^2}\mathrm{d}p\\=&-\frac{1}{2\pi^2}\mathrm{Im}\{\dot{S}(t)*\int_{-\infty}^{\infty}R(p)\mathrm{Im}\left(\frac{1}{t-\theta(p,x)}\right)\mathrm{d}p\}\end{aligned} \quad (8.293)$$

式中 $S(t)$ 是解析震源时间函数，有 $S(t)=s(t)+is_H(t)$。事实上，在 $-a\leqslant p\leqslant a$ 范围上，$\tau(p)$ 是实的，此时有前述的 $\frac{1}{\pi}\mathrm{Im}\left(\frac{1}{t-\theta}\right)\rightarrow\delta(t-\theta)$。因而可把积分式(8.293)分成三个部分，有

$$\begin{aligned}u(t,x)=&-\frac{1}{2\pi}\mathrm{Im}\left\{\dot{S}(t)*\left[\sum_{t=\theta}\frac{R(p)}{\dot{\theta}|}+\right.\right.\\&=\left.\left.\left(\int_a^{\infty}+\int_{-\infty}^{-a}\right)\frac{R(p)}{\pi}\mathrm{Im}\left(\frac{1}{t-\theta(p,x)}\right)\mathrm{d}p\right]\right\}\end{aligned} \quad (8.294)$$

式中第一项就是前述转折射线两种情况的近似结果，后面两项是修正项。

修正项的特征可用一个反射波的例子(图 8.18d)予以说明。从平界面反射回来的反射波的响应也是有式(8.287)的形式，因而用 WKBJ 法最后也可得到如式(8.294)表示的地震图。若反射界

面上边一层是均匀层，层厚为 z_1，它的精确解也可按广义射线法得到。若震源与接收点处于同一层位 z，此时函数 $\tau(p)$ 有

$$\tau(p) = 2(z - z_1)\xi \tag{8.295}$$

按广义射线法计算，在复 p 平面上的积分路径是

$$p(t) = \frac{tx - 2\mathrm{i}(t^2 - a^2l^2)^{1/2}(z - z_1)}{l^2} \tag{8.296}$$

其中

$$l^2 = x^2 + 4(z - z_1)^2 \tag{8.297}$$

精确解是

$$u(t,x) = \frac{1}{\pi}\dot{s}(t) * \frac{1}{(t^2 - a^2l^2)^{1/2}} \tag{8.298}$$

对于时间函数 $s(t)=H(t)$的情况，这个解示于图 8.19a 中。

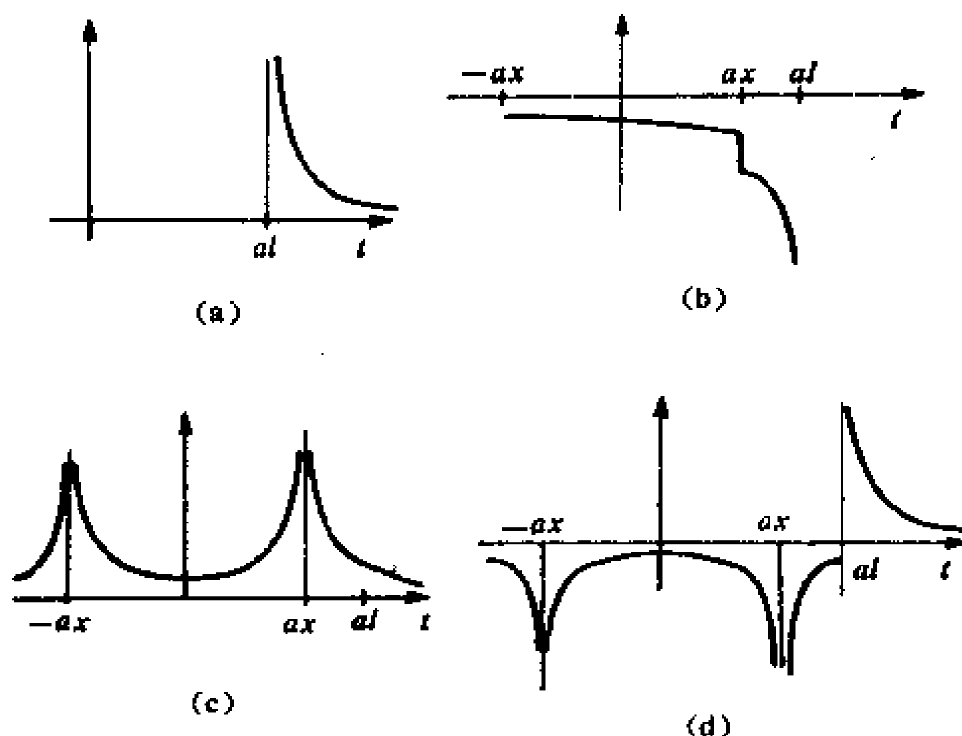


图 8.19　s(t)=H(t)情况下的反射波理论地震图

现在再来讨论WKBJ法的结果式(8.294)。对于第一项，因

$\tau(p)$是 p 的偶函数，又限定$|p|<a$，这样，在 $t=\theta$ 条件下，存在两个根 p_1 和 p_2，分别对应于 $t_1=-\frac{x}{a}$ 及 $t_2=\frac{x}{a}$，对应的梯度值有

$$\theta' = \pm \frac{(a^2l^2 - t^2)^{1/2}}{\xi} \tag{8.299}$$

取 $s_{H,t}(t)=H(t)$，则第一项为

$$\begin{aligned} u_c(t,x) &= -\frac{1}{2\pi}\mathrm{Im}\left\{\dot{S}(t) * \sum_{t=\theta} \frac{R(p)}{|\theta'|}\right\} \\ &= -\frac{1}{2\pi}s_{H,t}(t) * \frac{1}{(a^2l^2-t^2)^{1/2}}[H(t+ax)+ \\ &\quad H(t-ax)-2H(t-al)] \end{aligned} \tag{8.300}$$

结果描绘在图 8.19b 中。

而修正项则有

$$u_1(t,x) = \frac{1}{2\pi^2}\dot{s}(t) * \left\{\left(\int_a^\infty + \int_{-\infty}^a\right) \frac{2(z-z_1)(p^2-a^2)^{1/2}}{(t-px)^2+4(z-z_1)^2(p^2-a^2)}\mathrm{d}p\right\} \tag{8.301}$$

求出积分后可得

$$\begin{aligned} u_1(t,x) = \frac{1}{2\pi^2}\overset{*}{s}(t) * \frac{1}{(a^2l^2-t^2)^{1/2}}\left\{\operatorname{artanh}\left(\frac{2(z-z_1)(a^2l^2-t^2)^{1/2}}{al^2+xt}\right)\right. \\ \left. - \operatorname{artanh}\left(\frac{2(z-z_1)(a^2l^2-t^2)^{1/2}}{al^2-xt}\right)\right\} \end{aligned} \tag{8.302}$$

它的图线示于图 8.19c 中。

为了使式(8.300)与式(8.302)叠加起来，对式(8.300)变换一下形式，即将 Hilbert 变换从前项移至后项，这样有

$$\begin{aligned} u_0(t,x) = \frac{1}{2\pi^2}\dot{s}(t) * \frac{1}{(t^2-a^2l^2)^{1/2}}\left\{2\pi H(t-al)-\right. \\ \arctan\left(\frac{2(z-z_1)(t^2-a^2l^2)^{1/2}}{al^2+xt}\right) - \\ \left.\arctan\left(\frac{2(z-z_1)(t^2-a^2l^2)^{1/2}}{al^2-xt}\right)\right\} \end{aligned} \tag{8.303}$$

$s(t)=H(t)$情况下的计算结果示于图 8.19d 中。将式(8.303)和式(8.302)合起来就能得到式(8.298)的结果，也就是图 8.19a 所示形状。从这简单的例子中可以看到，WKBJ 地震图与广义射线的结果相同，而它的近似式是非常容易计算的，因为只是在 p 为实数的情况下进行。略去修正项会产生两个假的到达(在 $t=\pm ax$)，但这种影响在波形到达处($t=al$)已变得很小，允许略去。

用 WKBJ 法还可以计算首波，这也可以与广义射线法的计算进行比较，可举一简单算例：由两个均匀的流体层组成的介质，两层有相同的密度 ρ，但速度分别为 α_1 和 α_2。当下层的慢度小于上层时，即 $a_2<a_1$，这样在临界点之后($p_x>a_2$)就会产生首波。这种情况下，有

$$R(p)=\frac{1}{\xi_1}\frac{\xi_1-\xi_2}{\xi_1+\xi_2} \tag{8.304}$$

式中
$$\xi_1=(a_1^2-p^2)^{1/2},\xi_2=(a_2^2-p^2)^{1/2} \tag{8.305}$$

为使 ξ_2 单值，在 $p=a_2$ 处需要切割。当 $p>a_2$ 时，将 $R(p)$ 在 $p=a_2$ 处展开，有

$$R(p)\approx\frac{1}{\xi_1}-\frac{2^{5/2}a_2^{1/2}}{\xi_1^2(\theta_2)^{1/2}}(\theta_2-t)^{1/2}H(\theta_2-t)-$$
$$\mathrm{i}\frac{2^{5/2}a_2^{1/2}}{\xi_1^2(\theta_2)^{1/2}}(t-\theta_2)^{1/2}H(t-\theta_2) \tag{8.306}$$

上式中的所有项都在$p=a_2$处取值，这样$\theta_2=\theta(a_2,x)=a_2x+\tau(a_2)$就是首波到时。

按广义射线法，它的初动近以是

$$u(t,x)\approx\frac{1}{\pi}\dot{s}(t)*\frac{2^{5/2}a_2^{1/2}}{\xi_1^2(\theta_2)^{3/2}}(t-\theta_2)^{1/2}H(t-\theta_2) \tag{8.307}$$

再用 WKBJ 法计算，式(8.306)中第一项是常数项，卷积时要消失，因而可将后面两项直接代入式(8.294)的第一项中，得到

$$u_0(t,x)\approx\frac{1}{2\pi}\Big\{s_{H,t}(t)*\frac{2^{5/2}a_2^{1/2}}{\xi_1^2(\theta_2')^{3/2}}(\theta_2-t)^{1/2}H(\theta_2-t)+$$

$$\dot{s}(t) * \frac{2^{5/2} a_2^{1/2}}{\xi_1^2 (\ddot{\theta}_2)^{3/2}} (t - \theta_2)^{1/2} H(t - \theta_2) \Big\} \tag{8.308}$$

将上式第一项中的 Hilbert 变换移到后一个函数上，则它的结果与式(8.307)相同。

§9 侧向非均匀介质的近似体波理论

在高频体波研究中，近似射线法始终是一个行之有效的最简单的方法。但在应用上有很多限制，在某些奇异区域上精度很差，因而必须对射线法的原理作应有的改进与推广，使限制减少，精度提高。也就是不但需要计算符合 Fermat 原理的射线，而且也需要计算不符合 Fermat 原理的射线。下面介绍两种经过改进与推广的射线法——Gauss 射线束法与 Chapman-Maslov 法。

1. Gauss 射线束法

它是在二维非均匀介质中，适合于高频体波，经过改进过的近似射线计算法。这个方法不但能计算在一般射线法中不能计算的地方，如焦散处、临界点处、阴影转变区等，而且还能避开在计算中最使人头痛的二点射线追踪问题。

其基本原理是：将二维非均匀介质中的波场分解为一些单条射线的贡献。这种贡献沿着每条射线，用抛物线型波动方程法计算。抛物线型波动方程是从原来的波动方程简化得来，这种简化从物理解释看，就是寻求物理上称之为 Gauss 光束(射线束)的解。在任意点上的波场就可以认为是到达该点邻近所有 Gauss 射线束贡献的总和。有二维波动方程

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2(x,z)} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \tag{8.309}$$

式中 $v(x,z)$ 是非均匀介质的速度，$\varphi(x,z,t)$ 是位移势，这里也可以是含有其他意义的物理量。

连结震源和接收点有任一条射线 Ω，再引入一个正交坐标系

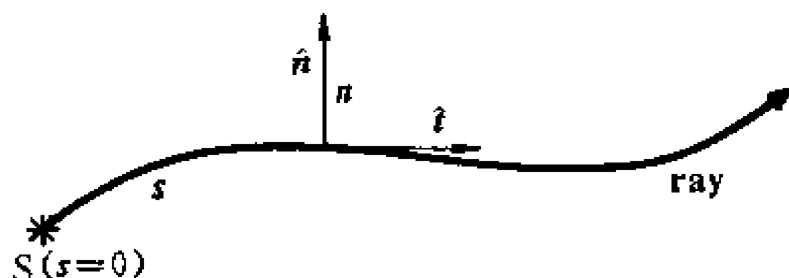


图 8.20 射线的中心坐标系(s,n)

(s,n)，称为射线-中心坐标系（图 8.20），坐标 s 是从射线上任意一点开始度量的、沿射线的弧长，n 代表在 s 处与射线垂直方向的距离坐标，坐标系中的单位矢量 $\hat{t}$ 相切于射线，单位矢量 $\hat{n}$ 垂直于射线，且总选择 $\hat{t}$ 和 $\hat{n}$ 在射线的同一侧，对于平面上的小长度元，用射线坐标表示为

$$\mathrm{d}r^2 = h^2\mathrm{d}s^2 + \mathrm{d}n^2 \tag{8.310}$$

其中

$$h = 1 + V^{-1}V_{,n}n \tag{8.311}$$

式(8.310)表示系统是正交的，标量因子分别为 h 和 1。式(8.311)中，我们已应用了

$$V = v(s,0), \qquad V_{,n} = \left[\frac{\partial v(s,n)}{\partial n}\right]_{n=0}$$

因而 V 和 $V_{,n}$ 只是 s 的函数，可表示为 $V(s)$。

在射线-中心坐标(s,n)中，波动方程可表示为

$$\frac{1}{h}\varphi_{,ss} + h\varphi_{,nn} - \frac{h}{v^2}\varphi_{,tt} + \varphi_{,s}\left(\frac{1}{h}\right)_{,s} + \varphi_{,n}h_{,n} = 0 \tag{8.312}$$

为了求解这个方程，采用抛物线型波动方程法，可得到一个非常接近于射线 Ω 的波动方程解。

如果只考虑时间谐变函数，抛物线型波动方程法就是假定方程(8.312)解的形式有

$$\varphi(s,n,t) = \exp\left\{-\mathrm{i}\omega\left[t - \int_{s_0}^{s} \frac{\mathrm{d}s}{V(s)}\right]\right\}U(s,n,\omega) \quad (8.313)$$

上式中的积分是沿着射线作的，所以，其中速度可表示为 $V(s)=v(s,0)$。将式(8.313)代入方程(8.312)中，就可得到关于 U 的微分方程，有

$$\frac{1}{h}\left\{\left[-\frac{\omega^2}{V^2}+\mathrm{i}\omega\left(\frac{1}{V}\right)_{,s}\right]U + \frac{2\mathrm{i}\omega}{V}U_{,s} + U_{,ss}\right\} +$$

$$hU_{,nn} + \frac{h}{v^2}\omega^2 U + \left(\frac{\mathrm{i}\omega}{V}U + U_{,s}\right)\left(\frac{1}{h}\right)_{,s} + U_{,n}h_{,n} = 0$$

$$(8.314)$$

我们已限定只研究高频和非常接近射线 Ω 的解，因而可假定 n 的量级有 $n \to O(\omega^{-\beta})$（如 $\beta=\frac{1}{2}$）。引入坐标变换

$$\nu = \omega^{1/2} n \quad (8.315)$$

则 ν 的量级为 $\nu \to O(\omega^0=1)$。这时方程(8.314)变为

$$\omega^2 h\left(\frac{1}{v^2}-\frac{1}{h^2V^2}\right)U + \omega\left[-\frac{\mathrm{i}}{hV^2}V_{,s}U + \frac{\mathrm{i}}{V}\left(\frac{1}{h}\right)_{,s} + \frac{2\mathrm{i}}{hV}U_{,s} + hU_{,\nu\nu}\right]$$

$$+ \omega^{1/2}U_{,\nu}h_{,n} + \frac{1}{h}U_{,ss} + U_{,s}\left(\frac{1}{h}\right)_{,s} = 0 \quad (8.316)$$

式中 $U=U(s,\nu,\omega)$。注意到式中的有些系数也可能是 ω 的函数，因而它们并不完全是以 ω 的显化形式表示的。当高频时，可以将系数展开，只保留 ω 一次以上项，略去低次项，如

$h\omega^2\left(\frac{1}{v^2}-\frac{1}{h^2V^2}\right) \approx -\frac{\omega}{V^3}\nu^2 V_{,nn}$，另一项近似相当于 $h \to 1$，$\left(\frac{1}{h}\right)_{,s} \to 0$。这样，就得到

$$\frac{2\mathrm{i}}{V}U_{,s} + U_{,\nu\nu} - \left(\frac{1}{V^3}\nu^2 V_{,nn} + \frac{\mathrm{i}}{V^2}V_{,s}\right)U = 0 \quad (8.317)$$

这个近似方程表示 U 与 ω 无直接相关，因而有 $U=U(s,\nu)$，相当于 $U(s,\nu,\omega)$ 展开为级数的主要项。当然也应注意到 $\nu=\sqrt{\omega}\,n$。式(8.317)是一个抛物线型微分方程，也称为抛物线型波动方程，这样，求解波动方程(8.309)的问题现在变为求解方程式(8.317)。为

进一步简化，引入函数变换

$$U(s,\nu) = \sqrt{V(s)}W(s,\nu) \tag{8.318}$$

将它代入式(8.317)，得

$$\frac{2i}{V}W_{,s} + W_{,\nu\nu} - \frac{1}{V^3}\nu^2 V_{,nn}W = 0 \tag{8.319}$$

这样，按式(8.313)，势函数 φ 写成

$$\varphi(s,n,t) = \sqrt{V(s)}\exp\left[-i\omega\left(t - \int_{s_0}^{s}\frac{dl}{V(l)}\right)\right]W(s,\nu) \tag{8.320}$$

采用 Babich and Kirpichnikova (1974)的方法求解方程式(8.319)。令解的形式为

$$W(s,\nu) = A(s)\exp\left(\frac{i}{2}\nu^2\Gamma(s)\right) \tag{8.321}$$

这里 $A(s)$和 $\Gamma(s)$都是未知函数。将此代入式(8.319)，有

$$i\left(\frac{2}{V}A_{,s}+A\Gamma\right)-A\nu^2\left(\frac{1}{V}\Gamma_{,s}+\Gamma^2+\frac{1}{V^3}V_{,nn}\right)=0 \tag{8.322}$$

可使

$$\Gamma_{,s} + V\Gamma^2 + V^{-2}V_{,nn} = 0 \tag{8.323}$$

及

$$A_{,s} + \frac{1}{2}VA\Gamma = 0 \tag{8.324}$$

将这两方程的解代入式(8.321)中，就得到了抛物线型方程式(8.319)的解。

方程(8.323)是一个非线性的一阶 Riccati 型常微分方程。可引入一个复函数 $g(s)$，将 $\Gamma(s)$表示为

$$\Gamma(s) = \frac{1}{Vg}g_{,s} \tag{8.325}$$

代入式(8.323)，则得到一个线性二阶常微分方程

$$Vg_{,ss} - V_{,s}g_{,s} + V_{,nn}g = 0 \tag{8.326}$$

令 $g_{,s}=Vf$，代入上式，上式变成两个一阶常微分方程，即

$$g_{,s} = Vf \tag{8.327}$$

及
$$f_{,s}=-V^{-2}V_{,nn}g \tag{8.328}$$
这样，式(8.325)又可写成
$$\Gamma=fg^{-1} \tag{8.329}$$
再求解方程(8.324)。因为有 $\Gamma=V^{-1}\mathrm{d}(\ln g)/\mathrm{d}s$，代入后不难求得解为
$$A(s)=\psi g^{-1/2}(s) \tag{8.330}$$
式中 ψ 是一个复积分常数，它沿着一条射线不变，但不同射线可以有不同的常数。用 p 表示射线参数，则可写成 $\psi=\psi(p)$。对于式中的 $g^{1/2}(s)$ 是作这样的多值性选择：在起始点 $s=s_0$ 处，使
$$g^{1/2}(s_0)=|g(s_0)|^{1/2}\exp\left[\frac{\mathrm{i}}{2}\arg g(s_0)\right],-\pi\leqslant\arg g(s_0)\leqslant\pi$$
因为在 $s\geqslant s_0$ 处，总能保证 $g(s)\neq0$，因而 $\arg g(s)$ 是连续的，且也选择 $g^{1/2}(s)=|g(s)|^{\frac{1}{2}}\exp\left[\frac{\mathrm{i}}{2}\arg g(s)\right]$。将上面讨论的 f,g,Γ,A 及 W 的一些关系统统代入式(8.320)，得到
$$\varphi(s,n,t)=\psi\left[\frac{V(s)}{g(s)}\right]^{1/2}\exp\left[-\mathrm{i}\omega\left(t-\int_{s_0}^{s}\frac{\mathrm{d}l}{V(l)}\right)+\frac{\mathrm{i}\omega f}{2g}n^2\right] \tag{8.331}$$
这就是二维介质中射线理论的 Gauss 射线束解。

注意到 $f=f(s)$ 和 $g=g(s)$ 是方程(8.327)和(8.328)的解，这是确定几何扩散的，也称动力学射线追踪系统。在经典的射线法中，$\Gamma(s)$，$f(s)$，$g(s)$ 都是实函数，且在焦散处 $g(s)$ 可以为零。现在讨论的是射线邻近的解，因而这些函数就是复值函数了，且还应该有 $\mathrm{Im}(f/g)>0$，这样可保证解集中在射线的邻近，为此，对方程(8.327)及(8.328)提供的初始条件也应为复值。

还应注意到，解(8.321)不是抛物线型波动方程的唯一解。让这个解记作
$$W_0(s,\nu)=\frac{1}{\sqrt{g(s)}}\exp\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\nu^2\frac{f}{g}\right) \tag{8.332}$$
由这个解，我们可构成无数个另外独立解 $W_k(s,\nu)$，$(k=1,2,\cdots)$，

它们也集中于射线邻近。这些解含有 Hermite 多项式

$$W_k(s,\nu)=\frac{1}{\sqrt{g(s)}}\left[\mathrm{i}\sqrt{\frac{g^*}{2g}}\right]^k H_k\left[\nu\sqrt{\mathrm{Im}\left(\frac{f}{g}\right)}\right]\exp\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\nu^2\frac{f}{g}\right) \tag{8.333}$$

这里 g^* 是 g 的复共轭函数。H_k 是 k 阶 Hermite 多项式。可以将式(8.333)直接代入方程式(8.319)予以验证。

下面对 Gauss 射线束的特征给予简要的说明。Gauss 射线束的振幅随离射线的距离而指数减小，这可从式(8.321)的结果中看出。这种指数减小是 Gauss 型的，即沿射线束的每一个横截面上，振幅分布呈铃状(图 8.21)。

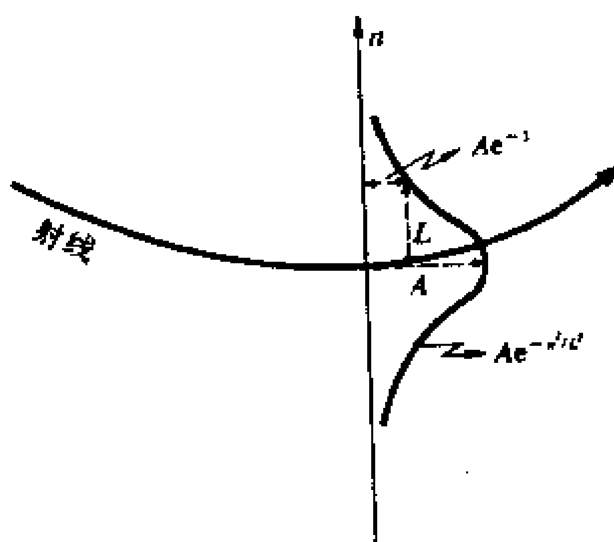


图 8.21　Gauss 射线束的振幅分布

再来讨论方程(8.327)和(8.328)的解 $g(s)$ 和 $f(s)$，它们各有两个线性独立解 $g_1(s)$，$g_2(s)$ 和 $f_1(s)$，$f_2(s)$，让它们构成一个基本解矩阵 $\Pi(s)$，有

$$\Pi(s)=\begin{bmatrix} g_1(s) & g_2(s) \\ f_1(s) & f_2(s) \end{bmatrix} \tag{8.334}$$

如果初始条件是实的，则上面两组解也是实的。例如，若上面所述的解是由实初始条件

$$\Pi(s_0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & V^{-1}(s_0) \end{bmatrix} \tag{8.335}$$

得到的，则式(8.334)的解也都是实的，由于沿着射线，$\det\Pi(s)$是不变的，则在式(8.335)的初始条件情况下，在射线任何 s 处有

$$\det\Pi(s) = g_1(s)f_2(s) - g_2(s)f_1(s) = V^{-1}(s_0) \tag{8.336}$$

当方程的解是复数时，也可用式(8.334)的两组实数解来表示，即可写成

$$g(s) = z_1 g_1(s) + z_2 g_2(s) \tag{8.337}$$

$$f(s) = z_1 f_1(s) + z_2 f_2(s) \tag{8.338}$$

其中 z_1 和 z_2 是复常数，这些常数可以通过 Gauss 射线束的某些重要性质来确定，这在下面的叙述中就可明白。

现在将 $\dfrac{f}{g} = \dfrac{z_1 f_1(s) + z_2 f_2(s)}{z_1 g_1(s) + z_2 g_2(s)}$ 代入式(8.331)中，并进行实部与虚部的分离，得到一个 Gauss 射线束的有用表达式

$$\varphi(s,n,t) = \psi\left[\frac{V(s)}{g(s)}\right]^{1/2} \exp\left\{-\mathrm{i}\omega[t - \tau(s)] + \frac{\mathrm{i}\omega}{2V}K(s)n^2 - \frac{n^2}{L^2(s)}\right\} \tag{8.339}$$

式中

$$K(s) = V(s)\mathrm{Re}\left[\frac{f(s)}{g(s)}\right] \tag{8.340}$$

$$L(s) = \left[\frac{\omega}{2}\mathrm{Im}\left(\frac{f(s)}{g(s)}\right)\right]^{-1/2} \tag{8.341}$$

$$\tau(s) = \int_{s_0}^{s} \frac{\mathrm{d}l}{V(l)} \tag{8.342}$$

它们有一定的物理意义：K 代表射线束相面的曲率，而 L 代表某一频率的射线束的有效半宽度。

可再引入一个复常数 $\varepsilon = z_1/z_2\ (z_2 \neq 0)$，则式(8.337)和式(8.338)可重写成

$$g = z_2(\varepsilon g_1 + g_2) \tag{8.343}$$

$$f = z_2(\varepsilon f_1 + f_2) \tag{8.344}$$

及
$$f/g = \frac{\varepsilon f_1 + f_2}{\varepsilon g_1 + g_2} \tag{8.345}$$

这样，相面曲率 $K(s)$ 和射线束的有效半宽度 $L(s)$ 只与一个复常数 ε 有关。在式(8.339)中的 $g(s)^{1/2}$ 会有 $z_2{}^{1/2}$ 的复量，将它并入复系数 ψ 中，这样 $\varphi(s, n, t)$ 中只出现两个复常数 ε 和 ψ。

也可用两个实常数 L_0 和 L_M 来替代复常数 ε，用如下定义：

$$\varepsilon = L_0 - \mathrm{i}\frac{\omega}{2V(s_0)}L_M^2 \tag{8.346}$$

因而 L_0 和 L_M 都有相同的长度量纲。考虑式(8.336)的关系后，也可得到

$$\mathrm{Im}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{\omega L_M^2}{2V^2(s_0)}\left[(L_0 g_1 + g_2)^2 + \left(\frac{\omega L_M^2 g_1}{2V(s_0)}\right)^2\right]^{1} \tag{8.347}$$

将它代入式(8.341)，有

$$L(s) = \left[L_M^2 g_1^2 + \left(\frac{2V(s_0)}{\omega L_M}\right)^2 (L_0 g_1 + g_2)^2\right]^{1/2} \tag{8.348}$$

现在可以利用射线束的重要特征，或说必须满足的条件来确定上面给出的常数。第一个条件是

$$g(s) \neq 0 \tag{8.349}$$

这个条件是保证沿着整条射线，射线束是正则的，即使在焦散处，也会有有限的幅度。第二个条件是：

$$\mathrm{Im}\left(\frac{f}{g}\right) > 0 \tag{8.350}$$

这条件保证了解集中在射线的邻近。

只要 $L_M \neq 0$，上述两个条件就能满足，因为第一个条件等效于 $g(s)g^*(s) \neq 0$，而

$$g(s)g^*(s) = \left[(L_0 g_1 + g_2)^2 + \left(\frac{\omega L_M^2 g_1}{2V(s_0)}\right)^2\right] \tag{8.351}$$

式中 g_1 不为零，所以只要 $L_M \neq 0$，就保证了 $g(s)g^*(s) \neq 0$。第二个条件从式(8.347)中很容易看出。

对于实常数 L_0 和 L_M 也可给予几何解释。为简单，只需考虑

常速度 V_0 的均匀介质情况。在式(8.335)的初始条件情况下，解方程(8.326)和(8.327)，得 $g_1(s)=1$，$g_2(s)=s-s_0$；$f_1(s)=0$，$f_2(s)=V_0^{-1}$，将它们代入式(8.348)，有

$$L(s) = \left[L_M^2 + \left(\frac{2V_0}{\omega L_M}\right)^2 (L_0 + s - s_0)^2\right]^{1/2} \tag{8.352}$$

此方程可写成如下形式

$$\frac{L^2}{L_M^2} - \frac{4V_0^2}{\omega^2 L_M^4}(L_0 + s - s_0)^2 = 1 \tag{8.353}$$

上式对于函数 $L=L(s)$ 来说，是一个双曲线型方程，在 $s=s_M=s_0-L_0$ 处有一个最小值。这 L_M 就是代表在 $s=s_M$ 处射线束的半宽度，即射线束的最小有效半宽度。L_0 是 $L=L(s)$ 达到最小值时，离起始点 $s=s_0$ 的距离。

我们再讨论一下在起始点 $s=s_0$ 有最小宽度时的射线束问题。此时

$$L_0 = 0,\ \epsilon = -\,\mathrm{i}\,\frac{\omega}{2V(s_0)}L_M^2 \tag{8.354}$$

若介质是均匀的，则有

$$L(s) = \left[L_M^2 + \left(\frac{2V_0}{\omega L_M}\right)^2 (s - s_0)^2\right]^{1/2} \tag{8.355}$$

若介质是非均匀的，则可从式(8.348)得

$$L(s) = \left[L_M^2 g_1^2 + \left(\frac{2V(s_0)}{\omega L_M}\right)^2 g_2^2\right]^{1/2} \tag{8.356}$$

至此可以看出，只要根据式(8.346)和 $L_M\neq 0$ 来选择 ϵ，对射线束的两个条件就会自动满足。选择 $L_M\neq 0$ 有较大的自由度。就计算的观点上来考虑，希望选择它在数值应用上最合适与方便，当然，最方便的就是尽可能使射线束狭窄。可以这样选择，使在任意接收点处的 $L(s)$ 达到最小值 $\left(\dfrac{\partial L(s)}{\partial L_M}=0\right)$。经这样选择后的 L_M 应该是

$$L_M^{\text{opt}} = \left(\frac{2V(s_0)}{\omega}\right)^{1/2} \left|\frac{g_2}{g_1}\right|^{1/2} \tag{8.357}$$

在均匀介质的特殊情况下，它简化为

$$L_M^{opt} = \left[\frac{2V_0}{\omega}(s - s_0)\right]^{1/2} \tag{8.358}$$

此为对 L_M 的一种选择值，其直观意义可见图 8.22。图 8.22 所示的是，在速度值为 V_0 的均匀介质中，对 L_M 值的三种选择的 L(s) 射线束图形（按式（8.353）解）。从图中可以看出，对于小的 L_M，射线束在 $s=s_0$ 附近非常狭窄，但它的宽度却快速地增加（大扩散），而对于大的 L_M 情况，射线束在起始点比较宽，但它们的宽度却只慢慢增加。因而对于任何 $s \neq s_0$ 点上，都会有一个最合适的起始宽度（见式（8.358）），即由它作为起始宽度计算时，可在 s 点达到最小宽度。

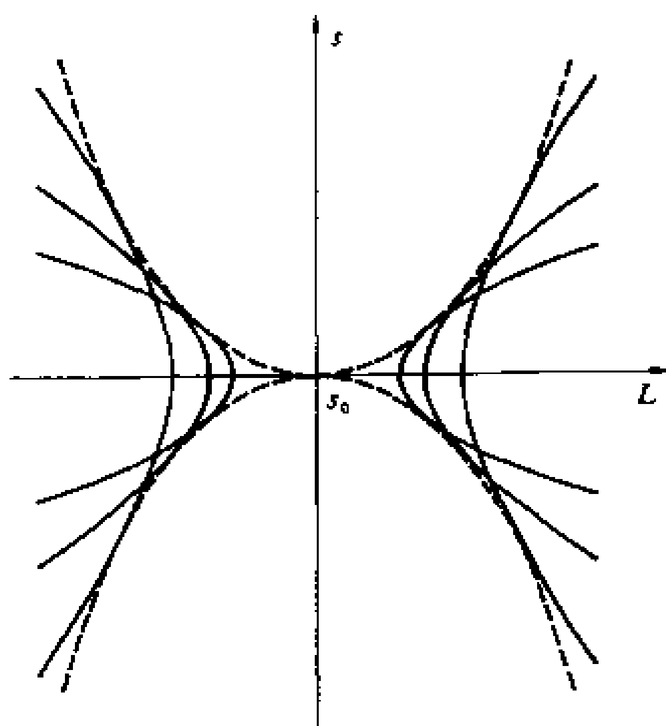


图 8.22 选择不同 L_M 的 Gauss 射线束及其包络

将式（8.358）代入式（8.355），就可得 Gauss 射线束包络线（图中的虚线）的公式，为

$$L^{\mathrm{env}}(s)=2\left[\frac{V_0(s-s_0)}{\omega}\right]^{1/2} \tag{8.359}$$

上面论述了二维 Gauss 射线束的基本原理与结果。Červeny 等(1982)应用这种方法进行过数值计算，也总结出几个具体步骤，这里就不再细说了。

至于用射线束理论处理三维非均匀介质的问题，这里介绍 Červeny 和 Pšenčik(1983)的文章。参照上面论述的二维问题的内容，就不难理解这是二维问题的自然推广。引入射线-中心坐标系 (s,n,m)。坐标 s 是沿着射线度量的弧长，射线上任何一个参考点都可当作起始点 s_0，而 n 和 m 是垂直于射线的平面上的一个直角坐标系，它的原点取在射线 Ω 与这垂直平面的交点上，因而，在这射线坐标系中，射线 Ω 的方程就具有 $n=m=0$，取射线-中心坐标的单位矢量为$(\hat{\boldsymbol{t}},\hat{\boldsymbol{e}}_n,\hat{\boldsymbol{e}}_m)$，$\hat{\boldsymbol{e}}_n$ 与 $\hat{\boldsymbol{e}}_m$ 的方向可任取，若取 $\hat{\boldsymbol{e}}_n$ 与射线法线(单位矢量为 $\hat{\boldsymbol{n}}$)有一夹角 θ，则有

$$\hat{\boldsymbol{e}}_n=\hat{\boldsymbol{n}}\cos\theta-\hat{\boldsymbol{b}}\sin\theta \tag{8.360}$$

$$\hat{\boldsymbol{e}}_m=\hat{\boldsymbol{n}}\sin\theta+\hat{\boldsymbol{b}}\cos\theta \tag{8.361}$$

式中 $\hat{\boldsymbol{b}}$ 是射线副法线的单位矢量。并规定角 θ 随射线上的点的位置不同而变化，即 $\theta(s)=\int_{s_0}^{s}T(l)\mathrm{d}l+\theta(s_0)$，$T$ 是射线的扭转。这样，一旦 $\theta(s_0)$选定后，射线上任意点 s 上的射线-中心坐标就被确定了。

介质中的 P、S 波速度可用射线-中心坐标系表示，如

$$v_{\mathrm{P}}(s,n,m)=\left(\frac{\lambda+2\mu}{\rho}\right)^{1/2} \tag{8.362}$$

$$v_{\mathrm{S}}(s,n,m)=\left(\frac{\mu}{\rho}\right)^{1/2} \tag{8.363}$$

要求这些速度及它们的一阶与二阶微商都是坐标的光滑函数。在射线 Ω 上的值也简单地表示为 $\alpha(s)=v_{\mathrm{P}}(s,0,0)$，$\beta(s)=v_{\mathrm{S}}(s,0,0)$，$\alpha_{,n}(s)=\left(\frac{\partial v_{\mathrm{P}}(s,n,m)}{\partial n}\right)_{n=m=0}$，$\beta_{,n}(s)=\left(\frac{\partial v_{\mathrm{S}}(s,n,m)}{\partial n}\right)_{n=m=0}$，及

$\alpha_{,nn}$，$\beta_{,nn}$，$\alpha_{,mm}$，$\beta_{,mm}$等。也可用速度一般性符号 V 表示。介质中的长度元在坐标系中表示为

$$dr^2 = h^2 ds^2 + dn^2 + dm^2 \tag{8.364}$$

其中

$$h = 1 + V^{-1}V_{,n}n - V^{-1}V_{,m}n \tag{8.365}$$

坐标(s,n,m)是正交的，标度因子是

$$h_s = h,\ h_n = 1,\ h_m = 1 \tag{8.366}$$

应该考虑到，在一般情况下，射线 Ω 是一条空间曲线，不同点处垂直于射线的平面，在离射线 Ω 一定距离外会相交，这就是说，在离射线 Ω 大距离处，射线 中心坐标系不是正则的。但我们的注意力只是集中在射线邻近的区域，在这邻域上不会发生相交现象，因而还是正则的，称这邻域为正则区域。

在三维问题中，直接讨论位移动力学方程(体积力为零)

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{u} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial c_j}(\lambda_{ij}\hat{\boldsymbol{n}}_i h_1h_2h_3/h_j) \tag{8.367}$$

式中采用正交坐标系(c_1, c_2, c_3)，标度因子为(h_1, h_2, h_3)，位移 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}(u_1, u_2, u_3)$。

$$\sigma_{ij} = \lambda\delta_{ij}\theta + 2\mu\varepsilon_{ij} \tag{8.368}$$

$$\left.\begin{aligned} \theta &= \sum_{r=1}^{3}\varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2}\left[\frac{h_i}{n_j}\frac{\partial}{\partial c_j}\left(\frac{u_i}{h_i}\right) + \frac{h_j}{h_i}\frac{\partial}{\partial c_i}\left(\frac{u_j}{h_j}\right)\right] + \frac{\delta_{ij}}{h_j}\sum_{r=1}^{3}\frac{u_r}{h_r}\frac{\partial h_i}{\partial c_r} \end{aligned}\right\} \tag{8.369}$$

$$\left.\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{n}}_j &= h_i \nabla c_j \\ \frac{\partial \hat{\boldsymbol{n}}_i}{\partial c_j} &= \frac{1}{h_i}\hat{\boldsymbol{n}}_j\frac{\partial h_j}{\partial c_i} - \delta_{ij}\sum_{r=1}^{3}\frac{1}{h_r}\hat{\boldsymbol{n}}_r\frac{\partial h_i}{\partial c_r} \end{aligned}\right\} \tag{8.370}$$

现在用射线-中心坐标系替代上面的曲线坐标系，此时 $c_1=s$，$c_2=n$，$c_3=m$，并以分量形式写出动力学方程，则有

$$\rho\ddot{u}_i = \frac{\lambda}{h_i}\theta_{,i} + 2\mu\sum_{j=1}^{3}\frac{1}{h_j}\varepsilon_{ij,j} + \frac{1}{h_i}\lambda_{,i}\theta -$$

$$\frac{2\mu}{hh_i}\varepsilon_{11}h_{,i} + \frac{1}{h}\sum_{j=1}\frac{\varepsilon_{ij}}{h_i}(2\mu hh_i/h_j)_{,j} \tag{8.371}$$

其中

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{h_j}u_{i,j} + \frac{1}{h_i}u_{j,i}\right) - \frac{1}{2h_ih_j}(u_ih_{i,j} + u_jh_{j,i}) + \frac{1}{h_j}\delta_{ij}\sum_{r=1}^{3}\frac{u_r}{h_r}h_{i,r} \tag{8.372}$$

将式(8.372)代入式(8.371)可得

$$\rho\ddot{u}_i = \sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\lambda+\mu}{h_ih_j}u_{j,ji} + \frac{\mu}{h_j^2}u_{i,jj}\right) + C_i \tag{8.373}$$

式中

$$C_i = \sum_{j=1}^{3}\left(\sum_{k=1}^{3}D_{ijk}u_{j,k} + E_{ij}u_j\right) \tag{8.374}$$

式中 D_{ijk}是三阶张量的分量，共有 27 个，但在高频近似中，只需要 5 个分量，D_{ijk}的其他分量与 E_{ij}的 9 个分量都不出现，这 5 个分量为：

$$D_{111} = h^{-1}[h^{-1}(\lambda+2\mu)]_{,1}\ D_{221} = D_{331} = h^{-1}\left(\frac{\mu}{h}\right)_{,1}\ D_{231} = D_{321} = 0$$

现在将式(8.373)中的脚标(1,2,3)改写为射线-中心坐标系中的(s,n,m)，则每个坐标分量的位移动力学方程为

$$\rho\ddot{u}_s = h^{-2}(\lambda+2\mu)u_{s,ss} + h^{-1}(\lambda+\mu)(u_{n,sn} + u_{m,sm}) +$$
$$\mu(u_{s,nn} + u_{s,mm}) + C_s \tag{8.375}$$

$$\rho\ddot{u}_n = h^{-2}\mu u_{n,ss} + (\lambda+\mu)(h^{-1}u_{s,sn} + u_{n,nn} + u_{m,mn} +$$
$$\mu(u_{n,nn} + \mu_{n,mm}) + C_n \tag{8.376}$$

$$\rho\ddot{u}_m = h^{-2}\mu u_{m,ss} + (\lambda+\mu)(h^{-1}u_{s,sm} + u_{n,nm} + u_{m,mm}) +$$
$$\mu(u_{m,nn} + u_{m,mm}) + C_m \tag{8.377}$$

式中 C_s，C_n，C_m 也按式(8.374)的规定。

考虑时间谐变波($e^{-i\omega t}$)及沿着射线 Ω，向 s 增加方向传播的波，即求所谓单一路径的弹性动力学方程的解，设解有如下形式：

$$u_j(s,n,m;t) = \exp\left\{-\mathrm{i}\omega\left(t - \int_{l_0}^{s} V^{-1}(l)\mathrm{d}l\right)\right\}U_j(s,n,m) \tag{8.378}$$

这里 $j=s,n$ 或 m，积分从起始点沿射线 Ω 进行。将它代入方程(8.375)～(8.377)中，得到

$$-\rho\omega^2 U_s = \frac{\lambda+2\mu}{h^2}\left[\left(-\frac{\omega^2}{V^2}+\mathrm{i}\omega\left(\frac{1}{V}\right)_{,s}\right)U_s + \frac{2\mathrm{i}\omega}{V}U_{s,s} + U_{s,ss}\right] + \frac{\lambda+\mu}{h}\left[\frac{\mathrm{i}\omega}{V}(U_{n,n}+U_{m,m}) + U_{n,sn} + U_{m,sm}\right] + \mu(U_{s,nn}+U_{s,mm}) + \frac{\mathrm{i}\omega}{V}(U_s D_{sss} + U_n D_{sns} + U_m D_{sms}) + \tilde{C}_s \tag{8.379}$$

$$-\rho\omega^2 U_n = \frac{\mu}{h^2}\left[\left(-\frac{\omega^2}{V^2}+\mathrm{i}\omega\left(\frac{1}{V}\right)_{,s}\right)U_n + U_{n,s}\frac{2\mathrm{i}\omega}{V} + U_{n,ss}\right] + (\lambda+\mu)\left[\frac{\mathrm{i}\omega}{hV}U_{s,n} + \frac{1}{h}U_{s,sn} + U_{n,nn} + U_{m,nm}\right] + \mu(U_{n,nn}+U_{n,mm}) + \frac{\mathrm{i}\omega}{V}(U_s D_{nss} + U_n D_{nns}) + \tilde{C}_n \tag{8.380}$$

将(8.380)方程的下标 n 与 m 交换，即可得到关于 U_m 的方程，式中的 $\tilde{C}_s$，$\tilde{C}_n$ 和 $\tilde{C}_m$ 也可按式(8.374)确定，只是要将式中的 u 用 U 替代。

现在作高频近似。设 n 与 m 的取值量级为 $n\to O(\omega^{-1/2})$，$m\to O(\omega^{-1/2})$。对于方程中的 ω^δ 只保留 $\delta\geqslant 1$ 的情况。也就是说，在高频情况下，只研究射线 Ω 的“边界层”。如果作变量变换。

$$\nu = \omega^{1/2}n, \eta = \omega^{1/2}m \tag{8.381}$$

此新变量的取值量级为：$\nu\to O(\omega^0=1)$，$\eta\to O(\omega^0=1)$。将方程(8.379)和(8.380)按式(8.381)作变量变换，略去 ω 低于一阶的项(如 $\omega^{1/2},\omega^0,\omega^{-1/2},\cdots$)，得到

$$-\omega^2 U_s = \frac{\lambda+2\mu}{\rho h^2}\left[\left(-\frac{\omega^2}{V^2}-\mathrm{i}\omega\left(\frac{1}{V}\right)_{,s}\right)U_s + \frac{2\mathrm{i}\omega}{V}U_{s,s}\right] +$$

$$\frac{\mathrm{i}\omega^{3/2}}{\rho h V}(\lambda+\mu)(U_{n,\nu}+U_{m,\eta})+\frac{\mu\omega}{\rho}(U_{s,\nu\nu}+U_{s,\eta\eta})+$$

$$\frac{\mathrm{i}\omega}{\rho V}(U_s D_{nss}+U_n D_{sns}+U_m D_{sms}) \tag{8.382}$$

$$-\omega^2 U_n=\frac{\mu}{\rho h^2}\left[\left(-\frac{\omega^2}{V^2}-\mathrm{i}\omega\left(\frac{1}{V}\right)_{,s}\right)U_n+\frac{2\mathrm{i}\omega}{V}U_{n,s}\right]+$$

$$\frac{\mathrm{i}\omega^{3/2}}{\rho h V}(\lambda+\mu)U_{s,\nu}+\frac{\lambda+\mu}{\rho}\omega(U_{n,\nu\nu}+U_{m,\nu\eta})+$$

$$\frac{\mu\omega}{\rho}(U_{n,\nu\nu}+U_{n,\eta\eta})+\frac{\mathrm{i}\omega}{\rho V}(U_s D_{nss}+U_n D_{nns}) \tag{8.383}$$

在U_n方程中将n与m交换，ν与η交换就得到关于U_m的方程。由于$\tilde{C}_s$、$\tilde{C}_n$和$\tilde{C}_m$都是$\omega^{1/2}$量级，因而全被略去。

现在对$U_i(i=s,n,m)$也展开为$\omega^{1/2}$的负幂级数，即

$$U_i=U_i^{(0)}+\omega^{-1/2}U_i^{(1)}+\omega^{-1}U_i^{(2)}\cdots \tag{8.384}$$

代入方程(8.382)和(8.383)中，而且只保留ω一次幂以上的项，可得

$$-\omega^2\left(\frac{\lambda+2\mu}{\rho h^2 V^2}-1\right)(U_s^{(0)}+\omega^{-1/2}U_s^{(1)}+\omega^{-1}U_s^{(2)})+$$

$$\frac{\mathrm{i}\omega^{3/2}(\lambda+\mu)}{\rho h V}[U_{n,\nu}^{(0)}+U_{m,\eta}^{(0)}+\omega^{-1/2}(U_{n,\nu}^{(1)}+U_{m,\eta}^{(1)})]+$$

$$\omega\left\{\mathrm{i}\,\frac{\lambda+2\mu}{\rho h^2}\left[\left(\frac{1}{V}\right)_{,s}U_s^{(0)}+\frac{2}{V}U_{s,s}^{(0)}\right]+\frac{\mu}{\rho}(U_{s,\nu\nu}^{(0)}+U_{s,\eta\eta}^{(0)})+\right.$$

$$\left.\frac{\mathrm{i}}{\rho V}(U_s^{(0)}D_{nss}+U_n^{(0)}D_{sns}+U_m^{(0)}D_{sms})\right\}=0 \tag{8.385}$$

$$-\omega^2\left(\frac{\mu}{\rho h^2 V^2}-1\right)(U_n^{(0)}+\omega^{-1/2}U_n^{(1)}+\omega^{-1}U_n^{(2)})+$$

$$\frac{\mathrm{i}\omega^{3/2}(\lambda+\mu)}{\rho h V}(U_{s,\nu}^{(0)}+\omega^{-1/2}U_{s,\nu}^{(1)})+$$

$$\omega\left\{\mathrm{i}\,\frac{\mu}{\rho h^2}\left[\left(\frac{1}{V}\right)_{,s}U_n^{(0)}+\frac{2}{V}U_{n,s}^{(0)}\right]+\frac{\lambda+\mu}{\rho}(U_{n,\nu\nu}^{(0)}+U_{m,\nu\eta}^{(0)})+\right.$$

$$\left.\frac{\mu}{\rho}(U_{n,\nu\nu}^{(0)}+U_{n,\eta\eta}^{(0)})+\frac{\mathrm{i}}{\rho V}(U_s^{(0)}D_{nss}+U_n^{(0)}D_{nns})\right\}=0 \tag{8.386}$$

第三个关于U_m的方程，可将式(8.386)中下标n与m交换而直接得出。

这些方程就是单一路径弹性动力学方程高频近似的最后形式。方程中的μ,ρ和h一般都会与三个坐标(s,n,m)有关。由这些方程得到的解，只适用于射线非常邻近的区域。

如何求解上面给出的微分方程系统，可采用熟知的抛物线型波动方程法。下面分别讨论P波情况与S波情况。

(1)P波情况

在射线法的零阶近似中，P波引起的位移只是在射线的切线方向，由此可认为在射线束的情况下，沿着射线Ω的位移分量最为重要，即U_s为主分量，U_n和U_m为附加分量。将V换成α，动力学方程中的系数都展成n和m的幂级数形式，根据式(8.381)，很自然我们将方程的系数都展成$\omega^{-1/2}$的幂级数形式。

现在考察几个系数的展开与它们的近似结果。先看式(8.385)中的第一个系数$\frac{\lambda+2\mu}{\rho h^2\alpha^2}-1=\frac{v_P^2(s,n,m)}{h^2\alpha^2}-1$。将$v_P(s,n,m)$展开为$n$和$m$的幂级数，有

$$v_P(s,n,m)\approx\alpha(s)+n\alpha_{,n}+m\alpha_{,m}+\frac{1}{2}(n^2\alpha_{,nn}+2nm\alpha_{,nm}+m^2\alpha_{,mm})$$

或者写成矩阵形式

$$v_P(s,n,m)\approx\alpha(s)+\alpha_{,n}n+\alpha_{,m}m+\frac{1}{2}\boldsymbol{q}^T\mathbf{V}^a\boldsymbol{q}\quad(8.387)$$

其中

$$\mathbf{V}^a=\begin{pmatrix}\alpha_{,nn} & \alpha_{,nm}\\ \alpha_{,nm} & \alpha_{,mm}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{q}=\begin{pmatrix}n\\ m\end{pmatrix}\quad(8.388)$$

$\mathbf{V}^a$是由垂直于射线Ω的平面上的P波速的二阶微商构成，是2×2实数对称矩阵。再运用式(8.365)，将v_P写成

$$v_P(s,n,m)\approx\alpha h\left(1+\frac{1}{2\alpha h}\boldsymbol{q}^T\mathbf{V}^a\boldsymbol{q}\right)$$

这样，第一个系数就有近似式

$$\frac{\lambda + 2\mu}{\rho h^2 \alpha^2} - 1 \approx \frac{1}{\alpha h} \boldsymbol{q}^{\mathrm{T}} \mathbf{V}^{\alpha} \boldsymbol{q} \tag{8.389}$$

也可用坐标(ν,η)表示，因而引入新的矢量

$$\boldsymbol{g} = \omega^{1/2} \boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} \nu \\ \eta \end{pmatrix} \tag{8.390}$$

使式(8.389)改写成

$$\frac{\lambda + 2\mu}{\rho h^2 \alpha^2} - 1 \approx \frac{1}{\alpha h \omega} \boldsymbol{g}^{\mathrm{T}} \mathbf{V}^{\alpha} \boldsymbol{g} \tag{8.391}$$

可知此系数是 ω 的一次形式而不是二次。

对式(8.386)的第一个系数，作同样分析可得

$$\frac{\mu}{\rho h^2 V^2} - 1 \approx \frac{\beta^2 - \alpha^2}{\alpha^2} - \omega^{1/2} H_1^{\alpha} \tag{8.392}$$

其中

$$H_1^{\alpha} = \frac{2\beta^2}{\alpha^2} \left[\left(\frac{\alpha_{,n}}{\alpha} - \frac{\beta_{,n}}{\beta} \right) \nu + \left(\frac{\alpha_{,m}}{\alpha} - \frac{\beta_{,m}}{\beta} \right) \eta \right] \tag{8.393}$$

类似地，对方程(8.385)和(8.386)中的系数作上面的近似之后，只保留 ω 一次以上项，就得到近似方程为

$$\frac{\mathrm{i}\omega^{3/2}}{\alpha} (U_{n,\nu}^{(0)} + U_{m,\eta}^{(0)}) + \frac{\omega}{\alpha^2 - \beta^2} \Big\{ U_s^{(0)} [\mathrm{i}\rho^{-1} (\rho\alpha)_{,s} - \frac{1}{\alpha} \boldsymbol{g}^{\mathrm{T}} \mathbf{V}^{\alpha} \boldsymbol{g}] + 2\mathrm{i}\alpha U_{s,s}^{(0)} + \beta^2 (U_{s,\nu\nu}^{(0)} + U_{s,\eta\eta}^{(0)}) + \frac{\mathrm{i}}{\alpha} (\alpha^2 - \beta^2)(U_{n,\nu}^{(1)} + U_{m,\eta}^{(1)}) + \frac{\mathrm{i}}{\alpha\rho} (U_n^{(0)} D_{sns} + U_m^{(0)} D_{sms}) \Big\} = 0 \tag{8.394}$$

$$\omega^2 \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2} U_n^{(0)} + \omega^{3/2} \left\{ \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha} \left(\frac{1}{\alpha} U_n^{(1)} + \mathrm{i} U_{s,\nu}^{(0)} \right) + H_1^{\alpha} U_n^{(0)} \right\} = 0 \tag{8.395}$$

$$\omega^2 \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2} U_m^{(0)} + \omega^{3/2} \left\{ \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha} \left(\frac{1}{\alpha} U_m^{(1)} + \mathrm{i} U_{s,\eta}^{(0)} \right) + H_1^{\alpha} U_m^{(0)} \right\} = 0 \tag{8.396}$$

由式(8.395)及(8.396)，可简单地得到解

$$\left.\begin{aligned} U_n^{(0)} &= 0, \qquad U_n^{(1)} = -\mathrm{i}\alpha U_{s,\nu}^{(0)} \\ U_m^{(0)} &= 0, \qquad U_m^{(1)} = -\mathrm{i}\alpha U_{s,\eta}^{(0)} \end{aligned}\right\} \tag{8.397}$$

这样，位移的附加分量是

$$\left.\begin{aligned} U_n &= -\mathrm{i}\alpha\omega^{-1/2}U_{s,\nu}^{(0)} \\ U_m &= -\alpha\omega^{-1/2}U_{s,\eta}^{(0)} \end{aligned}\right\} \tag{8.398}$$

现在再来讨论方程(8.394)。其第一项有$U_{n,\nu}^{(0)}+U_{m,\eta}^{(0)}=0$，这已由解(8.397)保证了。重要的是第二项。将式(8.397)代入，则得

$$\frac{2\mathrm{i}}{\alpha}U_{s,s}^{(0)} + U_{s,\nu\nu}^{(0)} + U_{s,\eta\eta}^{(0)} + U_s^{(0)}\left\{\frac{\mathrm{i}}{\alpha}[\ln(\alpha\rho)]_{,s} - \frac{1}{\alpha^3}\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}\mathbf{V}^{\alpha}\boldsymbol{g}\right\} = 0 \tag{8.399}$$

这是一个抛物线型方程。它的解可假定为

$$U_s^{(0)}(s,\nu,\eta) = [\alpha(s)\rho(s)]^{-1/2}W^{\alpha}(s,\nu,\eta) \tag{8.400}$$

将它代入式(8.399)中，得到关于W^{α}的方程为

$$\frac{2\mathrm{i}}{\alpha}W_{,s}^{\alpha} + W_{,\nu\nu}^{\alpha} + W_{,\eta\eta}^{\alpha} - \frac{1}{\alpha^3}(\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}\mathbf{V}^{\alpha}\boldsymbol{g})W^{\alpha} = 0 \tag{8.401}$$

关于这个抛物线型方程的解法，在讨论了S波的情况后再统一解决。一旦有了W^{α}，就可写出位移矢量解的最后结果

$$\boldsymbol{u}(s,\nu,\eta,t) = u_s(s,\nu,\eta,t)\hat{\boldsymbol{t}} + u_n(s,\nu,\eta,t)\hat{\boldsymbol{e}}_n + u_m(s,\nu,\eta,t)\hat{\boldsymbol{e}}_m \tag{8.402}$$

式中位移分量有

$$u_s(s,\nu,\eta,t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha(s)\rho(s)}}\exp\left\{-\mathrm{i}\omega\left[t-\int_0^s\frac{\mathrm{d}l}{\alpha(l)}\right]\right\}W^{\alpha}(s,\nu,\eta) \tag{8.403}$$

$$u_n(s,\nu,\eta;t) = -\mathrm{i}\omega^{-1/2}\sqrt{\frac{\alpha(s)}{\rho(s)}}\exp\left\{-\mathrm{i}\omega\left[t-\int_0^s\frac{\mathrm{d}l}{\alpha(l)}\right]\right\}\frac{\partial W^{\alpha}(s,\nu,\eta)}{\partial\nu} \tag{8.404}$$

$$u_m(s,\nu,\eta;t) = -\mathrm{i}\omega^{-1/2}\sqrt{\frac{\alpha(s)}{\rho(s)}}\exp\left\{-\mathrm{i}\omega\left[t-\int_0^s\frac{\mathrm{d}l}{\alpha(l)}\right]\right\}\frac{\partial W^{\alpha}(s,\nu,\eta)}{\partial\eta} \tag{8.405}$$

应注意到 $\nu=\omega^{1/2}n$ 及 $\eta=\omega^{1/2}m$，因而式中的函数 $W^{e}(s,\nu,\eta)$ 是与频率 ω 有关的。

(2)S 波情况

对于 S 波，U_n 和 U_m 是位移的主分量，U_s 为附加分量。这时，主分量垂直于射线，而附加分量平行于射线。

将 $V=\beta$ 代入方程，类似于 P 波的分析，得方程中系数的近似展开为

$$\frac{\mu}{\rho h^2\beta^2}-1\approx\frac{1}{\beta h\omega}(\mathbf{g}^{\mathrm{T}}\mathbf{V}^{\beta}\mathbf{g}) \tag{8.406}$$

$$\frac{\lambda+2\mu}{\rho h^2\beta^2}-1\approx\frac{\alpha^2-\beta^2}{\beta^2}+\omega^{-1/2}H_1^{\beta} \tag{8.407}$$

其中 $H_1^{\beta}=\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{4}H_1^{\alpha}$，而 $\mathbf{V}^{\beta}$ 是一个 2×2 实矩阵，它由垂直于射线 Ω 平面上的 S 波速的二次微商构成，为

$$\mathbf{V}^{\beta}=\begin{pmatrix}\beta_{,nn} & \beta_{,nm}\\ \beta_{,nm} & \beta_{,mm}\end{pmatrix} \tag{8.408}$$

动力学方程为

$$-\omega^2\frac{\alpha^2-\beta^2}{\beta^2}U_s^{(0)}+\omega^{3/2}\left\{\frac{\alpha^2-\beta^2}{\beta}\left[\mathrm{i}(U_{n,\nu}^{(0)}+U_{m,\eta}^{(0)})-\frac{1}{\beta}U_s^{(1)}\right]-H_1^{\beta}U_s^{(0)}\right\}=0 \tag{8.409}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{i}\omega^{3/2}}{\beta}U_{s,\nu}^{(0)}+\frac{\omega}{\alpha^2-\beta^2}\left\{U_n^{(0)}\left[\frac{\mathrm{i}}{\rho}(\beta\rho)_{,s}-\frac{1}{\beta}(\mathbf{g}^{\mathrm{T}}\mathbf{V}^{\beta}\mathbf{g})\right]+2\mathrm{i}\beta U_{n,s}^{(0)}+\right.\\&(\alpha^2-\beta^2)(U_{n,\nu\nu}^{(0)}+U_{m,\eta\nu}^{(0)})+\beta^2(U_{n,\nu\nu}^{(0)}+U_{n,\eta\eta}^{(0)})+\\&\left.\frac{\mathrm{i}}{\beta\rho}U_s^{(0)}D_{nss}+\frac{\mathrm{i}}{\beta}U_{s,\nu}^{(1)}(\alpha^2-\beta^2)\right\}=0\end{aligned} \tag{8.410}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{i}\omega^{3/2}}{\beta}U_{s,\eta}^{(0)}+\frac{\omega}{\alpha^2-\beta^2}\left\{U_m^{(0)}\left[\frac{\mathrm{i}}{\rho}(\beta\rho)_{,s}-\frac{1}{\beta}(\mathbf{g}^{\mathrm{T}}\mathbf{V}^{\beta}\mathbf{g})\right]+2\mathrm{i}\beta U_{m,s}^{(0)}+\right.\\&(\alpha^2-\beta^2)(U_{n,\eta\nu}^{(0)}+U_{m,\eta\eta}^{(0)})+\beta^2(U_{m,\nu\nu}^{(0)}+U_{m,\eta\eta}^{(0)})+\\&\left.\frac{\mathrm{i}}{\beta\rho}U_s^{(0)}D_{mss}+\frac{\mathrm{i}}{\beta}U_{s,\eta}^{(1)}(\alpha^2-\beta^2)\right\}=0\end{aligned} \tag{8.411}$$

由方程(8.409),立即可得解

$$U_s^{(0)} = 0,\quad U_s^{(1)} = \mathrm{i}\beta(U_{n,\nu}^{(0)} + U_{m,\eta}^{(0)}) \tag{8.412}$$

对于(8.410)和(8.411)方程,$U_n^{(0)}$和 $U_m^{(0)}$ 有同一的形式,假设为

$$U_n^{(0)}(s,\nu,\eta) = U_m^{(0)}(s,\nu,\eta) = \frac{1}{\sqrt{\beta(s)\rho(s)}}W^\beta(s,\nu,\eta) \tag{8.413}$$

式中的 $W^\beta(s,\nu,\eta)$满足的抛物线型方程为

$$\frac{2\mathrm{i}}{\beta}W_{,s}^\beta + W_{,\nu\nu}^\beta + W_{,\eta\eta}^\beta - \frac{1}{\beta^3}(\mathbf{g}^\mathrm{T}\mathbf{V}^\beta\mathbf{g})W^\beta = 0 \tag{8.414}$$

位移的三个分量分别为

$$u_s(s,\nu,\eta;t) = \mathrm{i}\omega^{-1/2}\sqrt{\frac{\beta(s)}{\rho(s)}}\exp\left\{-\mathrm{i}\omega\left[t - \int_0^s \frac{\mathrm{d}l}{\beta(l)}\right]\right\}\cdot$$
$$\left(\frac{\partial W^\beta(s,\nu,\eta)}{\partial\nu} + \frac{\partial W^\beta(s,\nu,\eta)}{\partial\eta}\right) \tag{8.415}$$

及
$$u_n(s,\nu,\eta;t) = u_m(s,\nu,\eta;t)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\beta(s)\rho(s)}}\exp\left\{-\mathrm{i}\omega\left[t - \int_0^s \frac{\mathrm{d}l}{\beta(l)}\right]\right\}W^\beta(s,\nu,\eta)$$
$$\tag{8.416}$$

最后,对 P 波情况和 S 波情况,都归并为求解抛物线型方程(8.401)及(8.414)的问题,将它们写成统一形式,有

$$\frac{2\mathrm{i}}{V}W_{,s} + W_{,\nu\nu} + W_{,\eta\eta} - \frac{1}{V^3}(\mathbf{g}^\mathrm{T}\mathbf{V}\mathbf{g})W = 0 \tag{8.417}$$

对于 P 波,式中 $V=\alpha,\mathbf{V}=\mathbf{V}^\alpha$;对于 S 波,则 $V=\beta,\mathbf{V}=\mathbf{V}^\beta$。$W$ 则分别为 W^α 与 W^β。

求解方程(8.417),可采用量子力学中的抛物线型波动方程解法(见 Kirpichnikova, 1971)。设解的形式为

$$W(s,\nu,\eta) = A(s)\exp\left[\frac{\mathrm{i}}{2}(\mathbf{g}^\mathrm{T}\mathbf{M}(s)\mathbf{g})\right] \tag{8.418}$$

其中 $\mathbf{M}(s)$一般是 2×2 复对称矩阵,$A(s)$是一个复标量函数,它们都只与 s 有关。这样,W 的微商值简单地可求得:

$$W_{,s}=\left[\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}s}+\frac{\mathrm{i}A}{2}\left(\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}\frac{\mathrm{d}\mathbf{M}}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{g}\right)\right]\exp\left[\frac{\mathrm{i}}{2}(\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\boldsymbol{g})\right] \tag{8.419}$$

$$W_{,nn}+W_{,mm}=[\mathrm{i}A\mathrm{tr}(\mathbf{M})-(A\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}^{2}\boldsymbol{g})]\exp\left[\frac{\mathrm{i}}{2}(\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\boldsymbol{g})\right] \tag{8.420}$$

将式(8.418)～(8.420)代入式(8.417)，则有

$$\left(\frac{2}{V}\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}s}+A\,\mathrm{tr}(\mathbf{M})\right)+\mathrm{i}A\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}\left(\frac{1}{V}\frac{\mathrm{d}\mathbf{M}}{\mathrm{d}s}+\mathbf{M}^{2}+\frac{1}{V^{3}}\mathbf{V}\right)\boldsymbol{g}=0 \tag{8.421}$$

此方程等效于如下两个方程：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathbf{M}+V\mathbf{M}^{2}+\frac{1}{V^{2}}\mathbf{V}=0 \tag{8.422}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}A+\frac{1}{2}AV\,\mathrm{tr}(\mathbf{M})=0 \tag{8.423}$$

由这两个方程解得 $\mathbf{M}$ 及 A，代入式(8.418)，就得到抛物线型方程(8.417)的一个解。这是 Gauss 射线束的零阶振型解。抛物线型方程更一般的解(高阶振型)会含有 Hermite 多项式，因此往往称射线束法为 Hermite -Gauss 射线束法。

关于 $\mathbf{M}$ 的方程(8.422)，是一个一阶非线性常微分方程，也称 Riccati 型方程。为解这个方程，先作线性化变换，设

$$\mathbf{M}=\frac{1}{V}\frac{\mathrm{d}\mathbf{Q}}{\mathrm{d}s}\mathbf{Q}^{-1} \tag{8.424}$$

其中 $\mathbf{Q}$ 是一个新的 2×2 阶矩阵，且有 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathbf{Q}^{-1}=-\mathbf{Q}^{-1}\frac{\mathrm{d}\mathbf{Q}}{\mathrm{d}s}\mathbf{Q}^{-1}$，将它们代入式(8.422)中，有

$$V\frac{\mathrm{d}^{2}}{\mathrm{d}s^{2}}\mathbf{Q}-V_{,s}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathbf{Q}+\mathbf{V}\mathbf{Q}=0 \tag{8.425}$$

它是二阶线性常微分方程。将它分解为两个一阶常微分方程，即

$$\mathbf{P}=\frac{1}{V}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathbf{Q} \tag{8.426}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathbf{P}=-\frac{1}{V^{2}}\mathbf{V}\mathbf{Q} \tag{8.427}$$

从这方程组中解得 **P** 和 **Q**,**M** 就可表示为

$$\mathbf{M} = \mathbf{P}\mathbf{Q}^{-1} \tag{8.428}$$

方程(8.426)和(8.427)组成的方程组也可写成矩阵形式,即让 4×2 阶矩阵 **X** 代表

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{P} \end{pmatrix} \tag{8.429}$$

这样,方程组可表示为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathbf{X} = \mathbf{H}\mathbf{X} \tag{8.430}$$

这里 **H** 是一个 4×4 实值矩阵,为

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \mathbf{O} & V\mathbf{I} \\ -V^{-2}\mathbf{V} & \mathbf{O} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & V & 0 \\ 0 & 0 & 0 & V \\ -\frac{1}{V^2}V_{11} & -\frac{1}{V^2}V_{12} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{V^2}V_{12} & -\frac{1}{V^2}V_{22} & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{8.431}$$

由式(8.424)知 **M** 的迹为

$$\mathrm{tr}(\mathbf{M}) = V^{-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[\ln(\det\mathbf{Q})] \tag{8.432}$$

将它代入关于 A 的方程(8.423)中,得到

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}s} + \frac{1}{2}A\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[\ln(\det\mathbf{Q})] = 0 \tag{8.433}$$

这方程的解是

$$A(s) = \frac{\psi}{[\det\mathbf{Q}(s)]^{1/2}} \tag{8.434}$$

式中 ψ 一般是一个与 s 无关的复常数。

将 **M** 与 A 代入式(8.418)中,有

$$W(s,\nu,\eta) = \frac{\psi}{(\det\mathbf{Q}(s))^{1/2}}\exp\left[\frac{\mathrm{i}}{2}(\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}(s)\boldsymbol{g})\right] \tag{8.435}$$

或 $$W(s,\nu,\eta)=\frac{\psi}{(\det\mathbf{Q}(s))^{1/2}}\exp\left[\frac{\mathrm{i}}{2}(\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{Q}^{-1}\boldsymbol{g})\right] \quad (8.436)$$

矩阵 **M**、**P** 及 **Q** 都是复矩阵，因而式(8.435)还可写成

$$W(s,\nu,\eta)=\frac{\psi}{(\det\mathbf{Q}(s))^{1/2}}\exp\left[\frac{\mathrm{i}}{2}\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}\mathrm{Re}\mathbf{M}(s)\boldsymbol{g}-\frac{1}{2}\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}\mathrm{Im}\mathbf{M}(s)\boldsymbol{g}\right] \quad (8.437)$$

复值矩阵 **Q**、**P** 及 **M** 在某些条件下可以代表 Gauss 射线束，因而称这些条件为 Gauss 射线束存在条件。Gauss 射线束存在条件有以下三个：

①Gauss 射线束集中条件：$\mathrm{Im}\mathbf{M}(s)$必须是一个沿射线 Ω 的正定矩阵，如果这个条件满足，则解(8.437)集中于 Ω。

② 矩阵 **M** 的对称条件：沿整条射线，矩阵 $\mathbf{M}(s)$必须对称。但 **P** 与 **Q** 可以是非对称的。

③Gauss 射线束的正则条件：矩阵 $\mathbf{Q}(s)$沿整条射线都必须正则，也就是 $\det\mathbf{Q}(s)\neq 0$。这样，保证了矩阵 $\mathbf{M}(s)=\mathbf{P}\mathbf{Q}^{-1}$存在，且也保证解(8.437)在所有射线点上都正则，甚至在焦散点及震源点都正则。

这些条件要求在射线某一点 $s=s_0$ 上能满足(但在后面将证明，这些条件在 $s=s_0$ 处满足时，在整条射线上都满足)，因而这可帮助我们选择起始条件。

在 **Q**、**P** 和 **M** 是实值解的情况，有 $\mathrm{Im}\mathbf{M}(s)=0$，这种情况下的解(8.435)～(8.437)称作平行轴射线解，或称作平行轴射线近似。实值矩阵 $\mathbf{M}(s)$代表走时场二阶微商的矩阵，而$(\det\mathbf{Q})^{1/2}$则为几何扩散。在焦散处，几何扩散为零，因而解 $W(s,\nu,\eta)$会有奇异性。这种平行轴射线解存在的唯一条件就是实值矩阵 **M** 必须是对称的。

在 Gauss 射线束情况下(即 **Q**、**P** 与 **M** 都为复值)，关于选定 $s=s_0$ 处的起始条件问题，可作下面的讨论。

将式(8.429)的矩阵 **X** 分解成为两个 4×1 阶矩阵，即 **X**＝

$(\mathbf{X}_1、\mathbf{X}_2)$，这时式(8.430)可写成：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathbf{X}_i = \mathbf{H}\,\mathbf{X}_i \qquad (i = 1,2) \tag{8.438}$$

它有 4 个线性独立的实数解，记作 $\Pi_j(j=1,2,3,4)$，Π_j 也是 4×1 阶矩阵，使这 4 个解构成一个 4×4 的基本实值矩阵，有

$$\Pi(s) = (\Pi_1,\Pi_2,\Pi_3,\Pi_4) \tag{8.439}$$

并在射线 Ω 的起始点 s_0 上，给基本矩阵赋值为

$$\Pi(s_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{8.440}$$

根据 Liouville 定理(见 Kamke，1959)，在射线任意点 s 上，由于 $\mathrm{tr}\mathbf{H}(s)=0$，有 $\det\Pi(s)=\det\Pi(s_0)$，进一步，当矩阵 $\mathbf{H}$ 的所有元素都是 s 的连续函数时(包括速度的二次微商 $V_{,ij}$)，则在任意点 s 处解 $\mathbf{X}_1$ 和 $\mathbf{X}_2$ 都是存在的。因而对方程(8.438)的任何实值或复值解，都可用上述的线性独立解 Π_1,Π_2,Π_3 和 Π_4 乘以任意实常数或复常数，再进行线性组合来表示。如

$$\mathbf{X}(s) = \Pi(s)\mathbf{C} \tag{8.441}$$

式中 $\mathbf{C}$ 是一个 4×2 的常数矩阵、如果考虑的是 Gauss 射线束，则 $\mathbf{C}$ 中元素都为复常数，称作 Gauss 射线束的起始参数。而 $\mathbf{C}$ 被称为 Gauss 射线束的起始参数矩阵。

我们也可将 $\Pi(s)$和 $\mathbf{C}$ 给予如下分解：

$$\Pi(s) = \begin{pmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} \\ \Pi_{21} & \Pi_{22} \end{pmatrix},\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_1 \\ \mathbf{C}_2 \end{pmatrix} \tag{8.442}$$

其中 $\Pi_{ij}(i,j=1,2)$和 $\mathbf{C}_i(i=1,2)$都是 2×2 正则矩阵。这样式(8.441)可重新写成

$$\mathbf{Q}(s) = \Pi_{11}\mathbf{C}_1 - \Pi_{12}\mathbf{C}_2 \tag{8.443}$$

$$\mathbf{P}(s) = \Pi_{21}\mathbf{C}_1 + \Pi_{22}\mathbf{C}_2 \tag{8.444}$$

至于矩阵 $\mathbf{M}$，则为

$$\mathbf{M} = \mathbf{P}\,\mathbf{Q}^{-1} = (\Pi_{21}\mathbf{C}_1 + \Pi_{22}\mathbf{C}_2)(\Pi_{11}\mathbf{C}_1 + \Pi_{12}\mathbf{C}_2)^{-1} \tag{8.445}$$

很清楚，如果 **P** 和 **Q** 都右乘一个非奇异的 2×2 常数矩阵 $\tilde{\mathbf{C}}$，**M** 不会改变。如用 $\tilde{\mathbf{C}}=\mathbf{C}_1^{-1}$ 右乘并令 $\mathbf{C}_2\tilde{\mathbf{C}}=\mathbf{C}_2$，这时 **M** 可表示为

$$\mathbf{M} = (\Pi_{21}\mathbf{I} + \Pi_{22}\mathbf{C}_2)(\Pi_{11}\mathbf{I} + \Pi_{12}\mathbf{C}_2)^{-1} \tag{8.446}$$

现在，可以对 $\mathbf{C}_2$ 作出解释，按式(8.440)，在 $s=s_0$ 处有 $\Pi_{11}=\Pi_{22}=\mathbf{I}$，$\Pi_{12}=\Pi_{21}=0$，这样，从式(8.446)得出

$$\mathbf{M}(s_0) = \mathbf{C}_2 \tag{8.447}$$

因而，Gauss 射线束的起始参数矩阵 **C** 可表示为

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{M}(s_0) \end{pmatrix} \tag{8.448}$$

我们已假定 $\mathbf{M}(s_0)$是一个正则对称矩阵，而且有正定的虚部。

同样的方法，如用 $\tilde{\mathbf{C}}=\mathbf{C}_2^{-1}$ 右乘式(8.445)，则会得到 $\mathbf{C}_1=\mathbf{M}^{-1}(s_0)$，$\mathbf{C}_2=\mathbf{I}$。这时，**C** 有

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}^{-1}(s_0) \\ \mathbf{I} \end{pmatrix} \tag{8.449}$$

式(8.448)与(8.449)对起始参数的两种特定选择都不会影响 $\mathbf{M}(s)$，但会改变$\mathbf{Q}(s)$和$\mathbf{P}(s)$。再看式(8.435)，它只包含矩阵 $\mathbf{M}(s)$和因子 $\det\mathbf{Q}(s)$；因为有 $\det(\mathbf{Q}\tilde{\mathbf{C}})=\det\mathbf{Q}\,\det\tilde{\mathbf{C}}$，所以在特定选择中，只是在解中引入了一个常数乘子$(\det\tilde{\mathbf{C}})^{-1/2}$，可以把这常数乘子归并到常数 ψ 中，因而不论何种特定选择都不会影响 Gauss 射线束的表达式。

$\mathbf{M}(s_0)$是一个 2×2 阶正则对称矩阵，且它具有正定虚部，因而它由三个复常数完全给定。换句话说，Gauss 射线束完全由三个复值起始参数确定，即有六个实的起始参数。而虚部参数不是完全任意的，要形成一个正定矩阵 $\mathrm{Im}\mathbf{M}(s_0)$。

这里要证明两个沿着射线 Ω 不变的表达式，它们是 $\mathbf{Q}^*\mathbf{P}-\mathbf{Q}\mathbf{P}^*$ 和 $\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}-\mathbf{Q}\mathbf{P}^{\mathrm{T}}$ 由式(8.426)和(8.427)可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\mathbf{Q}^*\mathbf{P} - \mathbf{P}^*\mathbf{Q}) = -V^{-2}(\mathbf{Q}^*\mathbf{V}\mathbf{Q} - \mathbf{Q}^*\mathbf{V}^*\mathbf{Q}) = 0$$

式中 $\mathbf{V}$ 是实对称矩阵，即 $\mathbf{V}=\mathbf{V}^*$。上式表明 $\mathbf{Q}^*\mathbf{P}-\mathbf{P}^*\mathbf{Q}$ 沿射线不变。同样可证明

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}-\mathbf{P}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q})=0$$

即 $\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}-\mathbf{P}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}$ 沿射线不变。这两个不变量的值都可在 $s=s_0$ 处取得。如取式(8.448)初始值，用式(8.443)和(8.444)关系，有

$$\mathbf{Q}^*\mathbf{P}-\mathbf{P}^*\mathbf{Q}=2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}\mathbf{M}(s_0) \tag{8.450}$$

及

$$\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}-\mathbf{P}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}=\mathbf{0} \tag{8.451}$$

这两个不变量的关系，在平行轴射线近似中($\mathrm{Im}\mathbf{M}(s)=0$)也成立。

现在再来证明 Gauss 射线束存在的三个条件，在起始点 $s=s_0$ 满足时，在射线 Ω 任意点都会满足。

先证明正则性条件，即假定 $\mathrm{Im}\mathbf{M}(s_0)$是一个正定矩阵，则矩阵 $\mathbf{Q}$ 是正则的，即沿整条射线都有 $\det\mathbf{Q}(s)\neq 0$。运用反证法，若 $\mathbf{Q}$ 是奇异的，则会有一个非零矢量 $\boldsymbol{b}$，使

$$\mathbf{Q}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{O} \tag{8.452}$$

对式(8.450)两边右乘 $\boldsymbol{b}$，左乘 $\boldsymbol{b}^*$，得

$$(\mathbf{Q}\boldsymbol{b})^*\mathbf{P}\boldsymbol{b}-(\mathbf{P}\boldsymbol{b})^*\mathbf{Q}\boldsymbol{b}=2i\boldsymbol{b}^*\mathrm{Im}\mathbf{M}(s_0)\boldsymbol{b} \tag{8.453}$$

此式左边由式(8.452)知应为零；而右边因 $\mathrm{Im}\mathbf{M}(s_0)$是正定的，所以 $\boldsymbol{b}$ 怎么选择都会得到正值。因而这等式是不成立的，从而说明 $\mathbf{Q}$ 不能是奇异的，而只能是正则的。

再来证明矩阵 $\mathbf{M}$ 的对称性。对式(8.451)左乘$(\mathbf{Q}^{\mathrm{T}})^{-1}$，右乘 $\mathbf{Q}^{-1}$，得

$$(\mathbf{Q}^{\mathrm{T}})^{-1}\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{Q}^{-1}-(\mathbf{Q}^{\mathrm{T}})^{-1}\mathbf{P}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}\,\mathbf{Q}^{-1}=\mathbf{0} \tag{8.454}$$

也可化简为

$$\mathbf{P}\mathbf{Q}^{-1}-(\mathbf{P}\mathbf{Q}^{-1})^{\mathrm{T}}=\mathbf{0} \tag{8.455}$$

上式表明 $\mathbf{P}\mathbf{Q}^{-1}$是对称的，而 $\mathbf{M}=\mathbf{P}\mathbf{Q}^{-1}$，这就证明了 $\mathbf{M}$ 是对称的。

最后再证明集中条件。对式(8.450)左乘$(\mathbf{Q}^*)^{-1}$，右乘 $\mathbf{Q}^{-1}$，得

$$\mathbf{P}\mathbf{Q}^{-1}-(\mathbf{P}\mathbf{Q}^{-1})^*=2\mathrm{i}(\mathbf{Q}^*)^{-1}(\mathrm{Im}\mathbf{M}(s_0)\mathbf{Q}^{-1} \tag{8.456}$$

按式(8.428)、$\mathbf{M}$ 的虚部有 $\mathrm{Im}\mathbf{M}(s)=\frac{1}{2i}[\mathbf{PQ}^{-1}-(\mathbf{PQ}^{-1})^*]$，再据式(8.456)，得

$$\mathrm{Im}\mathbf{M}(s)=(\mathbf{Q}^*)^{-1}\mathrm{Im}\mathbf{M}(s_0)\mathbf{Q}^{-1} \tag{8.457}$$

我们知道，正定矩阵可以分解，即 $\mathrm{Im}\mathbf{M}(s_0)=\mathbf{N}_0^{\mathrm{T}}\mathbf{N}_0$。另外，在任何点 s 上，只要 $\mathbf{Q}$ 存在，则 $\mathbf{Q}^{-1}$一定正则。对式(8.457)作运算，有 $\mathrm{Im}\mathbf{M}(s)=(\mathbf{Q}^*)^{-1}\mathbf{N}_0^{\mathrm{T}}\mathbf{N}_0\mathbf{Q}^{-1}=(\mathbf{N}_0\mathbf{Q}^{-1})^*(\mathbf{N}_0\mathbf{Q}^{-1})$。令 $\mathbf{A}=\mathbf{N}_0\mathbf{Q}^{-1}$($\mathbf{N}_0$ 是实矩阵)，由于 $\mathbf{Q}^{-1}$是正则的，则 A 也是正则的。这样乘积 $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ 是正定的，从而证明了 $\mathrm{Im}\mathbf{M}(s)$是正定的。

应该说明，上述证明只限于 Gauss 射线束情况，不适用于平行轴射线近似。

最后，我们将 Gauss 射线束公式归并一下，重复强调它的主要特征，并简要地讨论它的极限情况，即平行轴射线近似法。

将坐标变量(ν,η)回复到(n,m)，位移矢量可表示为

$$\boldsymbol{u}(s,n,m;t)=u_s(s,n,m;t)\hat{\boldsymbol{t}}+u_n(s,n,m;t)\hat{\boldsymbol{e}}_n+u_m(s,n,m;t)\hat{\boldsymbol{e}}_m \tag{8.458}$$

在 P 波情况下的 Gauss 射线束位移分量表达式为

$$u_s(s,n,m;t)=\frac{\psi_{\mathrm{P}}}{[\alpha(s)\rho(s)\det\mathbf{Q}(s)]^{1/2}}\times \exp\left\{-i\omega\left[t-\int_0^s\frac{dl}{\alpha(l)}\right]+\frac{i\omega}{2}\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}(s)\boldsymbol{g}\right\} \tag{8.459}$$

$$u_n(s,n,m;t)=\psi_{\mathrm{P}}\left(\frac{\alpha(s)}{\rho(s)\det\mathbf{Q}(s)}\right)^{1/2}(M_{11}n+M_{12}m)\times \exp\left\{-i\omega\left[t-\int_0^s\frac{dl}{\alpha(l)}\right]+\frac{i\omega}{2}\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}(s)\boldsymbol{g}\right\} \tag{8.460}$$

$$u_m(s,n,m;t)=\psi_{\mathrm{P}}\left(\frac{\alpha(s)}{\rho(s)\det\mathbf{Q}(s)}\right)^{1/2}(M_{12}n+M_{22}m)\times \exp\left\{-i\omega\left[t-\int_0^s\frac{dl}{\alpha(l)}\right]+\frac{i\omega}{2}\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}(s)\boldsymbol{g}\right\} \tag{8.461}$$

式中 ψ_{P} 是一个复常数，沿着射线 Ω 不变。主分量 $u_s\hat{\boldsymbol{t}}$ 平行中心射线 Ω 方向，附加分量 $u_n\hat{\boldsymbol{e}}_n$ 和 $u_m\hat{\boldsymbol{e}}_m$ 垂直于射线 Ω。也可将垂直平面

上的位移矢量写成

$$\boldsymbol{u}_{\perp}(s,n,m;t)=\psi_{P}\left(\frac{\alpha(s)}{\rho(s)\det\mathbf{Q}(s)}\right)^{1/2}\mathbf{M}(s)\boldsymbol{g}\times$$

$$\exp\left\{-\mathrm{i}\omega\left[t-\int_{0}^{s}\frac{\mathrm{d}l}{\alpha(l)}\right]+\frac{\mathrm{i}\omega}{2}\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}(s)\boldsymbol{g}\right\} \quad (8.462)$$

在 S 波情况下的 Gauss 射线束位移分量表达式为

$$u_{s}(s,n,m;t)=-\left(\frac{\beta(s)}{\rho(s)\det\mathbf{Q}(s)}\right)^{1/2}[\psi_{n}(M_{11}n+M_{12}m)+$$

$$\psi_{m}(M_{12}n+M_{22}m)]\times$$

$$\exp\left\{-\mathrm{i}\omega\left[t-\int_{0}^{s}\frac{\mathrm{d}l}{\beta(l)}\right]+\frac{\mathrm{i}\omega}{2}\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}(s)\boldsymbol{g}\right\} \quad (8.463)$$

$$u_{n}(s,n,m;t)=\left(\frac{\psi_{n}}{(\beta(s)\rho(s)\det\mathbf{Q}(s)}\right)^{1/2}\times$$

$$\exp\left\{-\mathrm{i}\omega\left[t-\int_{0}^{s}\frac{\mathrm{d}l}{\beta(t)}\right]+\frac{\mathrm{i}\omega}{2}\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}(s)\boldsymbol{g}\right\} \quad (8.464)$$

$$u_{m}(s,n,m;t)=\frac{\psi_{m}}{(\beta(s)\rho(s)\det\mathbf{Q}(s))^{1/2}}\times$$

$$\exp\left\{-\mathrm{i}\omega\left[t-\int_{0}^{s}\frac{\mathrm{d}l}{\beta(l)}\right]+\frac{\mathrm{i}\omega}{2}\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}(s)\boldsymbol{g}\right\} \quad (8.465)$$

式中 ψ_{n} 和 ψ_{m} 也是复常数，沿着射线 Ω 也是不变的。也可引入矢量符号

$$\boldsymbol{\psi}_{\mathrm{S}}=\begin{pmatrix}\psi_{n}\\ \psi_{m}\end{pmatrix} \quad (8.466)$$

这样就可将式(8.463)和(8.464)改写成

$$u_{s}(s,n,m;t)=-\left(\frac{\beta(s)}{\rho(s)\det\mathbf{Q}(s)}\right)^{1/2}(\boldsymbol{\psi}_{\mathrm{S}}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}(s)\boldsymbol{g})\times$$

$$\exp\left\{-\mathrm{i}\omega\left[t-\int_{0}^{s}\frac{\mathrm{d}l}{\beta(l)}\right]+\frac{\mathrm{i}\omega}{2}\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}(s)\boldsymbol{g}\right\} \quad (8.467)$$

$$\boldsymbol{u}_{\perp}(s,n,m;t)=\frac{\boldsymbol{\psi}_{\mathrm{S}}}{(\beta(s)\rho(s)\det\mathbf{Q}(s))^{1/2}}\times$$

$$\exp\left\{-\mathrm{i}\omega\left[t-\int_{0}^{s}\frac{\mathrm{d}l}{\beta(l)}\right]-\frac{\mathrm{i}\omega}{2}\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}(s)\boldsymbol{g}\right\} \quad (8.468)$$

这种情况下的主分量 $u_n\hat{e}_n$ 和 $u_m\hat{e}_m$ 垂直于中心射线 Ω，而附加分量 $u_t\hat{t}$ 平行于射线 Ω。

当上述两种情况表达式的复值矩阵 **M**、**Q** 和 **P** 在特定情况下变成实值时，也就是选择起始参数 **C** 为实值时，就变成了平行轴射线解。在一些实际情况中，不需要计算所有的线性独立解 $\Pi_j(j=1,2,3,4)$，比如在点源情况，只需计算 Π_3 和 Π_4；对于平面源只需计算 Π_1 和 Π_2，就是说只要这样两个线性独立解就可组合平行轴射线近似解。由上述结果我们也可知道，这些平行轴射线近似表达式不仅能计算中心射线 Ω 处的波场，也能计算射线邻近处的波场(即 $n\neq0$ 和/或 $m\neq0$)。这样，如要计算某点 A 处的波场，不必先确定出一条通过 A 点的射线，而只需有一条邻近它的射线即可。这就可避免经典射线法中最使人头痛的射线追踪问题。

2. Chapman-Maslov 法

它是射线法的伸延，或更确切地说是射线法与变换法的结合。这种方法基于 Maslov 数学理论((1965，1972)，由 Chapman (1982)详细地介绍到解侧向非均匀介质的地震波问题中来。从原理上说，是应用 Hamilton 正则方程表示出三维不均匀介质中的射线方程，一般情况下，射线路径是空间曲线，将这种三维位置空间的路径推广在六维相空间中考虑，这六维相空间由三个位置坐标和三个慢度分量构成。近似射线的振幅变化也可通过空间坐标的正则变换来给出。前面讨论的射线法中，波动方程和它们近似解都是在位置空间坐标中表示和进行，现在可用相空间中另外的坐标系来处理。这种坐标系就是用慢度坐标局部地或全部地替代位置坐标，在这种坐标系中，完全可按照射线法的求解步骤解得近似解，当然，求解过程与 Fourier 变换有关。下面介绍这种方法的求解过程，以及得到近似解后，如何避免 Fourier 反变换过程中的难点。

考虑最简单的标量波动方程

$$\nabla^2\varphi-v^{-2}(\boldsymbol{x})\partial_t^2\varphi=0 \tag{8.469}$$

对时间作 Fourier 变换，得

$$\nabla^2\bar{\varphi}+\omega^2 v^{-2}(\boldsymbol{x})\bar{\varphi}=0 \tag{8.470}$$

上述两方程都是在位置坐标空间中写出，现在要通过 Fourier 变换，用相空间中的另外坐标系重新表示(Maslov, 1972)。考虑这个空间是 $\boldsymbol{y}=(p,y,z)$，它是用慢度分量 p 替代原坐标中的 x。这样，在这个空间中的波函数 $\tilde{\bar{\varphi}}(\omega,\boldsymbol{y})$ 是原来的位置坐标空间中的波函数 $\bar{\varphi}(\omega,\boldsymbol{x})$ 的 Fourier 变换，即有

$$\tilde{\bar{\varphi}}(\omega,\boldsymbol{y})=\left(-\frac{\mathrm{i}\omega}{2\pi}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty}\bar{\varphi}(\omega,\boldsymbol{x})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega px}\mathrm{d}x\quad(\omega>0) \tag{8.471}$$

及反变换

$$\bar{\varphi}(\omega,\boldsymbol{x})=\left(\frac{\mathrm{i}\omega}{2\pi}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\bar{\varphi}}(\omega,\boldsymbol{y})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega px}\mathrm{d}p \tag{8.472}$$

根据上面的变换定义，可得到函数微商的变换关系

$$\mathrm{i}\omega p\tilde{\bar{\varphi}}(\omega,\boldsymbol{y})=\left(-\frac{\mathrm{i}\omega}{2\pi}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty}\partial_x\bar{\varphi}(\omega,\boldsymbol{x})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega px}\mathrm{d}x \tag{8.473}$$

及
$$\partial_p\tilde{\bar{\varphi}}(\omega,\boldsymbol{y})=\left(-\frac{\mathrm{i}\omega}{2\pi}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty}(-\mathrm{i}\omega x)\bar{\varphi}(\omega,\boldsymbol{x})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega px}\mathrm{d}x \tag{8.474}$$

还有更一般的函数乘积的变换，为

$$f((-\mathrm{i}\omega)^{-1}\partial_p)\tilde{\bar{\varphi}}(\omega,\boldsymbol{y})=\left(-\frac{\mathrm{i}\omega}{2\pi}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\bar{\varphi}(\omega,\boldsymbol{x})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega px}\mathrm{d}x \tag{8.475}$$

式中左边 $f((-\mathrm{i}\omega)^{-1}\partial_p)$ 是一个微分算子的函数，若 $f(x)$ 可展开为幂级数，则式(8.475)就可由式(8.474)得到。

按式(8.473)～(8.475)的关系，对波动方程(8.470)进行 Fourier 变换，则在新的变换空间中的方程为：

$$(-\omega^2p^2+\nabla_{\perp}^2)\tilde{\bar{\varphi}}+\omega^2u^2((-\mathrm{i}\omega)^{-1}\partial_p,\ y,z)\tilde{\bar{\varphi}}=0 \tag{8.476}$$

式中 $\nabla_{\perp}=(0,\partial_y,\partial_z)$，$u$ 是慢度，现在它是算子 ∂_p 和 y、z 的函数。式(8.476)可看作为在混合空间 $\boldsymbol{y}$ 中的波动方程，采用近似射线理论的办法，用如下形式的级数去凑解方程(8.476)，令

$$\tilde{\varphi}(\omega, \boldsymbol{y}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tilde{A}^{(n)}(\boldsymbol{y})}{(-\mathrm{i}\omega)^n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\tilde{T}(\boldsymbol{y})} \tag{8.477}$$

代入式(8.476)后，使 ω 的所有幂次项的系数等于零，就能得到相当的程函方程和传输方程，当然，现在考虑的式(8.476)中，会有一个既是频率又是微分算子的函数，因而会遇到一点困难。但当将 u^2 的幂级数展开形式代入时，就能顺利得到变换空间中的程函方程和传输方程，它们分别是

$$(\nabla_{-}\tilde{T})^2 - \tilde{u} + p^2 = 0 \tag{8.478}$$

及

$$2\nabla_{-}\tilde{A}^{(0)} \cdot \nabla_{-}\tilde{T} + \tilde{A}^{(0)}\nabla_{-}^2\tilde{T} + \partial_p\tilde{A}^{(0)}\partial_z\tilde{u}^2 + \frac{1}{2}\tilde{A}^{(0)}\partial_p\partial_z\tilde{u}^2 = 0 \tag{8.479}$$

其中

$$\tilde{u} = u(-\partial_p\tilde{T}, y, z) \tag{8.480}$$

同样，方程(8.478)及(8.479)中也含有一个微分算子的函数，如直接求解，会感到困难。我们可以采用力学中的方法，定义慢度矢量为

$$\boldsymbol{p} = \nabla T \tag{8.481}$$

式中 $T = T(\boldsymbol{x})$ 是位置坐标中的程函，这样，慢度值有

$$|\boldsymbol{p}| = |\nabla T| = v^{-1}(\boldsymbol{x}) = u(\boldsymbol{x}) \tag{8.482}$$

引进 Hamilton 算子，它定义为

$$H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}) = \frac{1}{2}[\boldsymbol{p}^2 - u^2(\boldsymbol{x})] \tag{8.483}$$

因而在位置空间中的程函方程相当于 $H = 0$，我们可以用特征线法求解这个方程，即特征线有

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\partial_{p_i}H} = \frac{\mathrm{d}T}{p_i\partial_{p_i}H} = -\frac{\mathrm{d}p_i}{\partial_{x_i}H} = \mathrm{d}\nu \tag{8.484}$$

式中新定义的 $\mathrm{d}\nu$ 与弧长 $\mathrm{d}s$ 有关，即 $\mathrm{d}\nu = v\mathrm{d}s$（注意 $\mathrm{d}T = u\mathrm{d}s$），由此可得 Hamilton 方程

$$\dot{x}_i = \partial_{p_i} H = p_i \quad (8.485)$$

$$\dot{p}_i = -\partial_{x_i} H = \frac{1}{2}\partial_{x_i} u^2 \quad (8.486)$$

这里上标“·”是代表沿射线的 dν，而不是对时间微商的意思。再引入 Lagrange 算子，用 Lagrange 变换来定义，有

$$L(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}) = -H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}) + \boldsymbol{p} \cdot \dot{\boldsymbol{x}} \quad (8.487)$$

不难证明 Lagrange 算子与 $\boldsymbol{p}$ 无关，这只要将 L 对 p_i 取微商，并用式(8.485)代入即可证明。Lagrange 算子的显式有

$$L(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}) = u(\boldsymbol{x}) |\dot{\boldsymbol{x}}| \quad (8.488)$$

Lagrange 算子是满足 Euler-Lagrange 方程的，因而沿射线的走时积分应满足 Fermat 原理。走时积分为

$$T(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0) = \int_{\nu_0}^{\nu} L(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}) \mathrm{d}\nu = \int_{s_0}^{s} u \mathrm{d}s \quad (8.489)$$

也有

$$T(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0) = \int_{\nu_0}^{\nu} (L + H) \mathrm{d}\nu = \int_{\nu_0}^{\nu} \boldsymbol{p} \cdot \dot{\boldsymbol{x}} \, \mathrm{d}\nu = \int_{\boldsymbol{x}_0}^{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{p} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x} \quad (8.490)$$

式中下角标“0”表示初始点 $\boldsymbol{x}_0$ 的值，无下标的就表示射线上任意点 $\boldsymbol{x}$ 的值。

由式(8.489)可有

$$\mathrm{d}_\nu T = L = \boldsymbol{p} \cdot \dot{\boldsymbol{x}} - H \quad (8.491)$$

在混合空间 $\boldsymbol{y}$ 中，类似地也可写出

$$\mathrm{d}_\nu \tilde{T} = \tilde{L} = (r\dot{y} + q\dot{z}) - H \quad (8.492)$$

或者

$$\mathrm{d}_\nu \tilde{T} = \mathrm{d}_\nu T - p\dot{x} \quad (8.493)$$

对式(8.493)积分，得到

$$\tilde{T}(\boldsymbol{y}) = T(x(\boldsymbol{y}), y, z) - p x(\boldsymbol{y}) \quad (8.494)$$

这里 $\tilde{T}(y)$ 是混合空间的程函，也是位置空间里相函数 $\tilde{T}(p)$ 的推

广，按慢度定义式(8.482)定义，p 是走时曲线的斜率，有

$$\partial_x T(\boldsymbol{x}) = p(\boldsymbol{x}) \tag{8.495}$$

因而由式(8.494)给出的 $\tilde{T}(\boldsymbol{y})$，还是像侧向均匀情况那样，代表延迟时间，走时 $T(\boldsymbol{x})$ 与延迟时间 $\tilde{T}(\boldsymbol{y})$ 的关系已由式(8.493)给出，而且也有对称于式(8.495)的关系，即

$$\partial_p \tilde{T}(\boldsymbol{y}) = -x(\boldsymbol{y}) \tag{8.496}$$

接着讨论在混合空间的幅度系数 $\tilde{A}^{(0)}(\boldsymbol{y})$。如果已经有了幅度函数，并且对幂级数式(8.477)只取零阶项，就可得到变换域上的解 $\tilde{\tilde{\varphi}}(\omega,\boldsymbol{y})$。像 WKBJ 方法那样，先对频率作反变换，然后再进行慢度反变换。可得到

$$\varphi(t,\boldsymbol{x}) \approx -\frac{1}{\sqrt{2}\,\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{Im}\left\{A(t) * \sum_{t=\tilde{\theta}(p,\boldsymbol{x})} \frac{\tilde{A}^{(0)}(\boldsymbol{y})}{|\partial_p \tilde{\theta}(p,\boldsymbol{x})|}\right\} \tag{8.497}$$

其中

$$\tilde{\theta}(p,\boldsymbol{x}) = \tilde{T}(\boldsymbol{y}) + px \tag{8.498}$$

或写作

$$\tilde{\theta}(p,\boldsymbol{x}) = T(x(\boldsymbol{y}),y,z) + p(x - x(\boldsymbol{y})) \tag{8.499}$$

像 WKBJ 地震图那样，式(8.497)中的求和是这样进行，即从 $t \approx \tilde{\theta}(p,\boldsymbol{x})$ 方程中解得 p 值，然后对所有的 p 值进行求和。表达式(8.497)在几何到达时，即 $\partial_p \tilde{\theta}(p,\boldsymbol{x})=0$ 时出现奇异性。这种几何到达的慢度值也可用如下水平范围方程求解，得

$$x - x(\boldsymbol{y}) = 0 \tag{8.500}$$

求解方程(8.500)是一个两点边界值问题，即要求确定出联结震源 $\boldsymbol{x}_0$ 和接收点 $\boldsymbol{x}$ 的射线。这也可以变成求在 $x=x(\boldsymbol{y})$ 情况下，方程(8.499)的解。即

$$\tilde{\theta}(p,\boldsymbol{x}) = T(\boldsymbol{x}) \tag{8.501}$$

对这些几何值作展开，就可得到式(8.497)的初动近似，有

$$\varphi(t,\boldsymbol{x}) \approx \sum_{x=x(y)} \mathrm{Re}\left\{ \frac{\tilde{A}^{(0)}(\boldsymbol{y})}{|\partial_p x(\boldsymbol{y})|^{1/2}} \Delta[t - T(\boldsymbol{x})] \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi[1-\mathrm{sgn}(\partial_p x(y))]/4} \right\} \tag{8.502}$$

要求式中的 $\tilde{A}^{(0)}(\boldsymbol{y})$，可将其与经典射线理论的结果作比较而类似得出。在射线理论中，射线的幅度系数 $A^{(0)}(\boldsymbol{x})$ 由求解传输方程得到，有

$$[A^{(0)}(\boldsymbol{x})]^2 = [A^{(0)}(\boldsymbol{x}_0)]^2 \frac{D(\boldsymbol{x}_0)}{D(\boldsymbol{x})} \tag{8.503}$$

这里 $D=uJ$，而 J 正比于过 $\boldsymbol{x}_0$ 和 $\boldsymbol{x}$ 基本射线管的横截面积。也可将比值用 Jacobi 算子表示，即

$$\frac{D(\boldsymbol{x})}{D(\boldsymbol{x}_0)} = \frac{u^2}{u_0^2} \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(x_0,y_0,z_0)} \tag{8.504}$$

或写成

$$\frac{D(\boldsymbol{x})}{D(\boldsymbol{x}_0)} = \frac{u^2}{u_0^2} \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{x}_0} \tag{8.505}$$

$J(\boldsymbol{x})$的零点发生焦散，这时式(8.503)的振幅系数变成无穷大。但焦散点两侧的射线幅度计算仍然有效，只是要考虑所谓 KMAH 指数因子 $\sigma(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0)$的修正。幅度系数可写成

$$A^{(0)}(\boldsymbol{x}) = A^{(0)}(\boldsymbol{x}_0) \frac{u(\boldsymbol{x}_0)}{u(\boldsymbol{x})} \left| \frac{\partial \boldsymbol{x}_0}{\partial \boldsymbol{x}} \right|^{1/2} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi \mathrm{sgn}(\omega)\sigma(x,x_0)/2} \tag{8.506}$$

KMAH 因子是一个整数。这个名称取自 4 个著作者(Keller (1958)，Maslov (1965)，Arnol'd (1967) 及 Hörmander(1971))名字的第一个字母。KMAH 因子从零开始，即 $\sigma(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_0)=0$；一条射线的两个相邻焦散点之间，它为常数，然后每经过一个焦散点时就增加一个整数，这个整数就是焦散处射线管失去的维数。当射线管横截面收缩成一条线时，则 KMAH 指数就增加 1，这时就引起 $\pi/2$ 的相位滞后；如果射线管收缩为一点(Jacobi 算子的二阶零点)，即射线管失去两维，则 KMAH 指数就增加 2，这时就有 π 的

相移。

将式(8.506)代入射线法的最后结果中，只取零阶近似，则得

$$\varphi(t,\boldsymbol{x}) \approx \sum \mathrm{Re}\{A^{(0)}(\boldsymbol{x})\Delta[t - T(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0)]\}$$

$$= \sum \left\{\frac{u(x_0)}{u(\boldsymbol{x})}\left|\frac{\partial \boldsymbol{x}_0}{\partial \boldsymbol{x}}\right|^{1/2}\mathrm{Re}[A^{(0)}(\boldsymbol{x}_0)\Delta(t - T(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0))\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\sigma(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0)/2}]\right\} \tag{8.507}$$

式中 $\Delta(t)=\delta(t)-\frac{\mathrm{i}}{\pi t}$，相当于 Dirac 函数 $\delta(t)$ 的解析时间级数；求和号的意思是震源 $\boldsymbol{x}_0$ 和接收处 $\boldsymbol{x}$ 之间所有多条射线解求和。

将式(8.507)与式(8.502)比较，它们必须一致。因而应有

$$\tilde{A}^{(0)}(\boldsymbol{y}) = A^{(0)}(\boldsymbol{x})\left|\partial_p x(\boldsymbol{y})\right|^{1/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi[1-\mathrm{sgn}(\partial_p x(\boldsymbol{y}))]/4} \tag{8.508}$$

$$= \frac{u(\boldsymbol{x}_0)}{u(\boldsymbol{x})}A^{(0)}(\boldsymbol{x}_0)\left|\frac{\partial \boldsymbol{x}_0}{\partial \boldsymbol{x}}\right|^{1/2}\left|\partial_p x(\boldsymbol{y})\right|^{1/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi\sigma(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0)/2-\mathrm{i}\pi[1-\mathrm{sgn}(\partial_p x(\boldsymbol{y}))]/4} \tag{8.509}$$

进一步写成

$$\tilde{A}^{(0)}(\boldsymbol{y}) = \frac{u(\boldsymbol{x}_0)}{u(\boldsymbol{x})}A^{(0)}(\boldsymbol{x}_0)\left|\frac{\partial \boldsymbol{x}_0}{\partial \boldsymbol{y}}\right|^{1/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi\sigma(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0)-\mathrm{i}\pi[1-\mathrm{sgn}(\partial_p x(\boldsymbol{y}))]/4} \tag{8.510}$$

这样，可以将式(8.509)的结果代入式(8.497)中，得到

$$\varphi(t,\boldsymbol{x}) \approx \frac{1}{\sqrt{2}\,\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{Im}\left\{\Lambda(t) * \sum_{t=\tilde{\theta}(p,\boldsymbol{x})}\frac{u(\boldsymbol{x}_0)}{u(x(\boldsymbol{y}),y,z)}A^{(0)}(\boldsymbol{x}_0)\cdot\left|\frac{\partial \boldsymbol{x}_0}{\partial \boldsymbol{x}}\right|^{1/2}\frac{|\partial_p x(\boldsymbol{y})|^{1/2}}{|\partial_p\tilde{\theta}(p,\boldsymbol{x})|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\sigma(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0)/2\quad \mathrm{i}\pi[1-\mathrm{sgn}(\partial_p x(\boldsymbol{y}))]/4}\right\} \tag{8.511}$$

从求解过程中可以看出，式(8.511)的初动近似与射线理论的结果是一致的，而且也能理解式(8.511)是 WKBJ 地震图的推广，因而可预期它具有更多的适用性。更详细的讨论可参读 Chapman 和 Drummond 的文章(1982)。

习题与思考题

1. 对于体波射线，当介质为成层构造时，从走时表达式(8.92)出发，推导出一层构造的首波走时表示。

2. 试述展平变换的条件及相应的公式。

3. 用类似于第三章关于等效体力的方法来证明：式(8.154)所表达的$\frac{\partial v}{\partial z}$的间断，在物理上是由应力的间断造成的。

4. 试述广义射线法的主要论点与运算步骤，并比较它与最速下降法的同异及优缺点。

5. 对于成层介质(图(8.12))的广角反射，有

$$T(p)=\frac{h_1-d_1}{\alpha_1\cos i_1}+\frac{2h_2}{\alpha_2\cos i_2}+\cdots+\frac{2h_n}{\alpha_n\cos i_n}+\frac{h_1-d_2}{\alpha_1\cos i_1}$$

$$\Delta(p)$$
$$=(h_1-d_1)\tan i_1+2h_2\tan i_2+\cdots+2h_n\tan i_n+(h_1-\alpha_2)\tan i_1$$

求证：(1) 当接收点变化时(在固定的深度上)，有 $p=\frac{\partial T}{\partial\Delta}$，则 Cagniard 路径 $\tau=pr+T-p\Delta$(参看式(8.216)。

(2) 有$\frac{\partial\tau}{\partial p}=r-\Delta(p)$，$\frac{\partial^2\tau}{\partial p^2}=-\frac{\partial\Delta}{\partial p}$，且对于一次反射而言，$\frac{\partial^2\tau}{\partial p^2}$总是负的。

(3) 按 $\tau=t_{反}+(p-p_0)\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}p}+\frac{(p-p_0)^2}{2}\frac{\mathrm{d}^2\tau}{\mathrm{d}p^2}+\cdots$($t_{反}$ 为广角反射波的到时)，则可看到当实 τ 一直增加到 $t_{反}$ 时，在 $p=p_0$ 处 Cagniard 路径 $p=p(\tau)$必须以直角离开实 p 轴。

(4) 在 $t_{反}$ 的时间附近，有

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\tau}\approx\frac{1}{(t_{反}-\tau)^{1/2}}\frac{1}{\left(2\frac{\mathrm{d}\Delta}{\mathrm{d}p}\right)^{1/2}}\qquad(\tau<t_{反})$$

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\tau} \approx \frac{i}{(\tau - t_{反})^{1/2}} \frac{1}{\left(2\frac{\mathrm{d}\Delta}{\mathrm{d}p}\right)^{1/2}} \qquad (\tau > t_{反})$$

从而得到$\frac{1}{t^{1/2}} * \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\left(2\frac{\mathrm{d}\Delta}{\mathrm{d}p}\right)^{1/2}}\left[i\pi H(t-t_{反}) - \ln\left(\frac{|t-t_{反}|}{t_{反}}\right)\right]$，用它得到广角反射的阶梯函数响应为

$$R_s\left[\frac{1}{\xi_1}\left(\frac{p}{r\frac{\mathrm{d}\Delta}{\mathrm{d}p}}\right)^{1/2}(\grave{\mathrm{P}}\acute{\mathrm{P}}_1)\cdots(\grave{\mathrm{P}}\acute{\mathrm{P}})_{n-1}(\grave{\mathrm{P}}\acute{\mathrm{P}})_{n-1}\cdots(\grave{\mathrm{P}}\acute{\mathrm{P}})_1\right]_{p=p_s} \times$$

$$\left[\mathrm{Re}(\grave{\mathrm{P}}\acute{\mathrm{P}})_n H(t - t_{反}) - \frac{\mathrm{Im}(\grave{\mathrm{P}}\acute{\mathrm{P}})_n}{\pi}\ln\left(\frac{|t - t_{反}|}{t_{反}}\right)\right]$$

第九章　滞弹性介质中和各向异性介质中的地震波传播

§1　介质的耗散参数

考虑一维的线性衰减机械振动子，在外力 $f(t)$ 作用下，给出此振动系统的运动方程是：

$$\ddot{x} + \frac{1}{Q}\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t) \tag{9.1}$$

式中 Q 是无量纲参数，且 $Q \gg 1$，是我们待研究的量；ω_0 是常数。如果给定初始条件 $x(0)=x_0, \dot{x}(0)=\dot{x}_0$，则方程(9.1)的解由两部分构成：$x(t)=x_1(t)+x_2(t)$，且 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 分别满足下列方程

$$\ddot{x}_1(t) + \frac{1}{Q}\omega_0\dot{x}_1(t) + \omega_0^2 x_1(t) = 0$$

$$x_1(0) = x_0, \dot{x}_1(0) = \dot{x}_0 \tag{9.2}$$

$$\ddot{x}_2(t) + \frac{1}{Q}\omega_0\dot{x}_2(t) + \omega_0^2 x_2(t) = f(t)$$

$$x_2(0) = 0, \ \dot{x}_2(0) = 0 \tag{9.3}$$

其物理含义是系统对输入 $f(t)$ 的总响应应包括固有阻尼运动与强迫运动两部分。

1. 固有阻尼运动(也称瞬态齐次解)

解出(9.2)方程，得

$$x_1(t) = Ae^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}}\sin(\omega t + \varphi_0) \tag{9.4}$$

其中

$$
\left.\begin{aligned}
&\omega = \omega_0\left(1 - \frac{1}{4Q^2}\right)^{1/2} \\
&A = \left\{x_0^2 + \left[\frac{\dot{x}_0 + (1/2Q)\omega_0 x_0}{\omega}\right]^2\right\}^{1/2} \\
&\sin\varphi_0 = \frac{x_0}{A}, \qquad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}
\end{aligned}\right\} \tag{9.5}
$$

可看出运动为按指数形式衰减的振荡(图 9.1),它与系统的固有参数有关。系统内存有初始能,恰如压紧的弹簧或充了电的电容器等。在 $t=0$ 时,这种能量释放而引起系统振动,此后消耗在克服摩擦力所作的功上。

振动呈现有周期性的零点,这个周期是 $T=T_0/(1-1/4Q^2)^{1/2}>T_0$, T_0 是振动的固有周期(即系统的自由振动 $\ddot{x}+\omega_0^2x=0$ 的周期),ω_0 是系统的固有频率,T 称为阻尼周期。在小阻尼情况,近似地有 $T\approx T_0$,幅度值的极大点与极小点依次有

$$
t_n = \frac{1}{\omega_0}[\arctan 2Q - \varphi_0 + n\pi],(n = 1,2,\cdots) \tag{9.6}
$$

从图 9.1 可推出,$x_1(t)$ 与 $\pm Ae^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}}$ 接触点的值为

$$
t_n^* = \frac{1}{\omega_0}\left[-\varphi_0 + \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\right] \tag{9.7}
$$

这样 t_n 比 t_n^* 滞后值为

$$
\delta = \frac{1}{\omega_0}\arctan\left(\frac{1}{2Q}\right) \tag{9.8}
$$

由于对应于 t_n 与 t_n^* 时的 $x_1(t)$ 值是相近的,因而用阻尼比 $\Delta=|x_1(t_n)/x_1(t_{n+2})|\approx e^{\frac{\omega_0 T}{2Q}}$ 来度量振幅衰减($T=t_{n+2}-t_n$)。定义对数缩减为

$$
\ln\Delta = \ln\left|\frac{x_1(t_n)}{x_1(t_{n+2})}\right| = \frac{\pi}{Q} \tag{9.9}
$$

式中量纲为一的参数 Q 称为系统的品质因子。另外衰减也可以用时

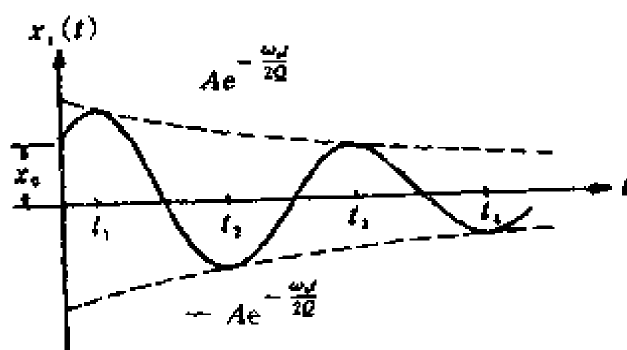


图 9.1　固有阻尼运动

间来度量。定义当振幅减小到初始值的$\frac{1}{e}$所需的时间为松弛时间 τ_0，$\tau_0=\frac{2Q}{\omega}$。用 τ_0 替代 Q 时，振动方程为 $\ddot{x}_1+\left(\frac{2}{\tau_0}\right)\dot{x}_1+\omega_0^2x_1=0$，对于小阻尼情况，有

$$\delta=\frac{1}{2Q\omega_0},\ \omega=\omega_0\left(1-\frac{1}{4Q^2}\right)^{1/2}\approx\omega_0\left(1-\frac{1}{8Q^2}\right) \qquad (9.10)$$

2. 强迫运动(也称稳态非齐次特解)

对于方程(9.3)，可解得

$$x_2(t)=\int_0^t f(\tau)G(t-\tau)\mathrm{d}\tau \qquad (9.11)$$

其中

$$G(t)=\frac{1}{\omega_0(1-h^2)^{1/2}}\sin[\omega_0(1-h^2)^{1/2}t]e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}} \qquad (9.12)$$

这里 $h=\frac{1}{2Q}$。此时的运动既与系统的固有特征有关，也与驱动力有关。之所以称为“稳态”，是因为式(9.11)所表示的运动部分特征，在瞬态之后，能一直维持下去而不衰减。$x_2(t)$也可包括它本身的瞬态过程，当然本身瞬态过程不是由原问题的初始条件产生，而是由于在某时刻的 $f(t)$不连续作用所引起。可给出一个实例来说明(图 9.2)。

设 $f(t)=a_0H(t)$

方程的解为

$$x_2(t)=\frac{a_0}{\omega_0^2}\left\{1-\frac{\sin[\omega_0(1-h^2)^{1/2}t+\theta_0]}{\sin\theta_0}e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}}\right\}H(t) \quad (9.14)$$

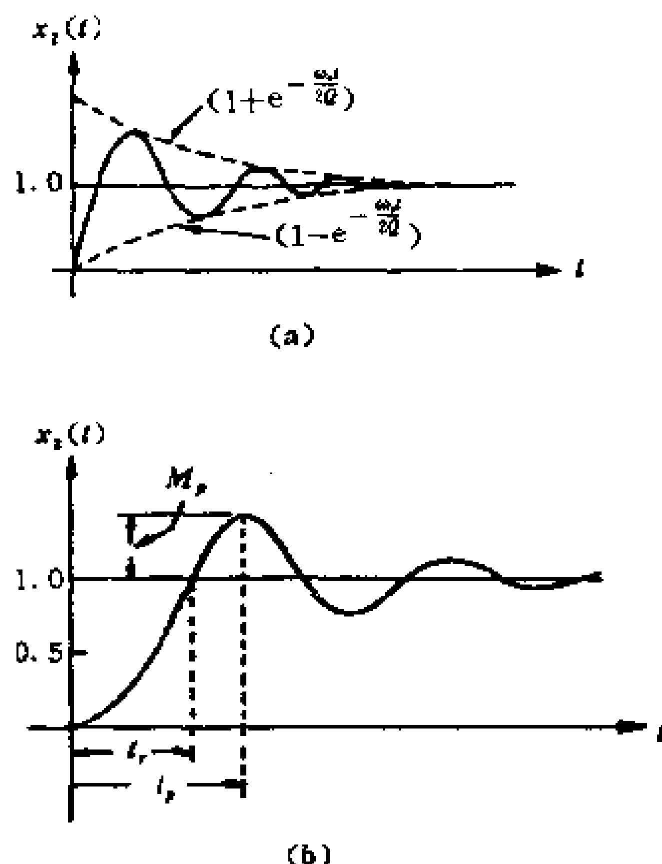


图 9.2　阻尼线性振子的阶梯响应 a)、b)

这里 $\sin\theta_0=(1-h^2)^{1/2}$。此即为系统的阶梯响应。图 9.2 是假定 $a_0=\omega_0^2$ 时的衰减振荡(a)及过冲参数(b)。

在 $Q\gg1$ 情况下，响应首次达到稳态水平时所需要的时间称为上升时间，它是

$$t_r=\frac{\pi-\arctan 2Q}{\omega_0} \tag{9.15}$$

而响应达到峰值时所需的峰值时间，可令式(9.14)对时间的微商为零得到，为

$$t_p=\frac{\pi}{\omega_0(1-h^2)^{1/2}} \tag{9.16}$$

所谓峰值过冲是在运动稳态水平以上的最大上升幅度，为

$$M_p=\frac{x_2(t_p)}{x_2(\infty)}-1=\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2Q}} \tag{9.17}$$

为得到没有瞬态过程的稳态解，可对方程(9.1)应用 Fourier 变换。因 $X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-i\omega t}dt, F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt$，且考虑初始条件 $x_0=0, \dot{x}_0=0$，则可解得 $X(\omega)=M(\omega)F(\omega)$，这里 $M(\omega)$ 是响应函数，为

$$M(\omega)=\left[(\omega_0^2-\omega^2)+i\frac{1}{Q}\omega\omega_0\right]^{-1}$$

$$=\frac{1}{\omega_0^2}\frac{\exp\left\{-i\arctan\left[\frac{\omega/\omega_0}{1-(\omega/\omega_0)^2}\frac{1}{Q}\right]\right\}}{\left[\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2+\left(\frac{\omega}{\omega_0}Q\right)^2\right]^{1/2}} \tag{9.18}$$

而驱动力作用后的位移滞后角度是

$$\arctan\left[\frac{\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_0}}{1-\omega^2/\omega_0^2}\right] \tag{9.19}$$

考查 $M(\omega)$ 随 ω 从 0 向 ω_0 增加时的变化情况，可知在 $\omega=\omega_0$ 时，作用力与响应有同步效果，这一临界情况称为共振，即

$$M(\omega_0)=\frac{Q}{\omega_0^2}e^{-i\frac{\pi}{2}} \tag{9.20}$$

当没有阻尼($Q\to\infty$)时，$M(\omega_0)$也趋于无穷。从如下方程

$$\frac{d}{d\kappa}[(1-\kappa^2)^2+(2h\kappa)^2]^{-1/2}=0, \left(\kappa=\frac{\omega}{\omega_0}\right) \tag{9.21}$$

可得峰值响应的频率为

$$\omega=\omega_p=\omega_0\left(1-\frac{1}{2Q^2}\right)^{1/2} \tag{9.22}$$

它既不是系统的自然频率，也不是阻尼频率。而峰值响应时，有

$$M(\omega_p)\approx\frac{Q}{\omega_0^2}e^{-i\arctan 2Q} \tag{9.23}$$

响应函数 $M(\omega)$有如下两个重要特征(图 9.3)：

(1)峰值仅当 $Q>\frac{1}{\sqrt{2}}$的情况下出现。当 $Q=\frac{1}{\sqrt{2}}$时，$\omega_p=0$，在

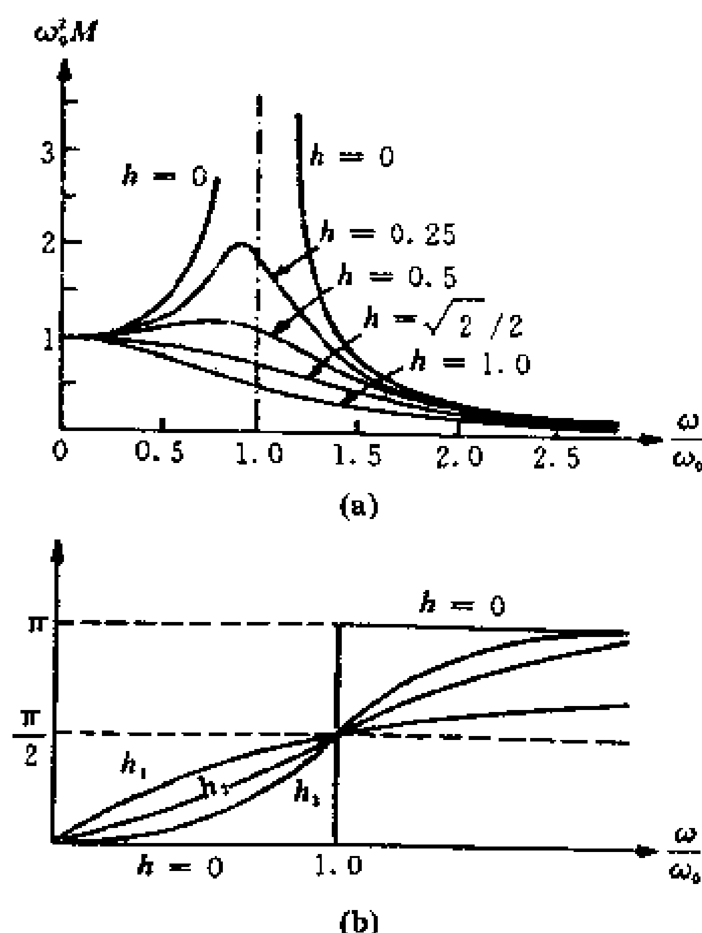


图 9.3 弱阻尼线性系统的稳态响应

(a)振幅响应;(b)相位响应

$\omega=0$ 处响应曲线平行于 ω 轴。当 $\frac{1}{Q}$ 减小时,峰值移近共振点 $\omega=\omega_0$。随着共振频率增加,峰值响应单调地减小。

(2)共振时位移相对于驱动力 $f(t)$ 滞后 $\frac{\pi}{2}$,这由式(9.19)可知。当低于共振频率时相位滞后小于 $\frac{\pi}{2}$,高于共振频率时则大于 $\frac{\pi}{2}$。当频率非常高时,惯性力项支配了运动,而驱动力与惯性力项实际上处在同位相,因而位移相对于驱动力有 π 的相位差,又由于相位函数 φ 的微商是

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\omega}=\left(\frac{2h}{\omega_0}\right)\frac{1+\kappa^2}{(1-\kappa^2)^2+4h^2\kappa^2} \tag{9.24}$$

在 $h=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，有 $\dot{\varphi}(0)=\dot{\varphi}(1)=\frac{\sqrt{2}}{\omega_0}$，其相位响应近似为频率的线性函数，而振幅响应是平的。

上面对一个简单的阻尼线性振动子的运动情况进行了叙述。下面转入讨论地球介质具有衰减特性时，地震波的传播问题。为此先讨论一下地震散射波的能量扩散。

在地震学中，由于非均匀介质中散射波的出现，即每一个内部界面上的反、折射都产生新的P、S波，可能的射线路径数会很快增加。强的散射会破坏地震波的方向性性质。在这种情况下，我们引入能流密度，假定它沿能量的梯度方向，其大小与梯度值成正比。令 $H(\boldsymbol{x},t;\omega)$ 是某一频率 ω 附近的一单位频率带上单位体积的地震能量，也称它为地震能量密度。已知能量密度 H，就不难计算能流密度了。

在非均匀介质中，散射波的出现使地震能量接近于扩散过程，因而需满足扩散方程

$$\frac{\partial H}{\partial t}=D\nabla^2 H \tag{9.25}$$

其中 D 是扩散系数。如果介质中在 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0$ 处存在瞬时点源，又考虑线性耗散存在，则式(9.25)变为

$$\frac{\partial H}{\partial t}=D\nabla^2 H-\frac{\omega}{Q}H-H_0\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\delta(t-t_0) \tag{9.26}$$

式中 $\left(-\frac{\omega}{Q}H\right)$ 项表示由地震能转换成热能的过程。H_0 是在给定的单位频率带范围内，震源给出的地震能量。应该指出，方程只是当频率足够高时成立，因而 ω 在方程中必像时间 t 那样以参数形式出现。

方程(9.26)在无限介质中的解为

$$H(\boldsymbol{x},t;\omega)=\frac{H_0}{[4\pi D(t-t_0)]^{3/2}}\exp\left\{-\frac{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|^2}{4D(t-t_0)}+\frac{\omega}{Q}(t-t_0)\right\} \tag{9.27}$$

将它在整个频率域上积分即得到总能量，包括 H_0、D 与 ω 有关的情况。

进一步，若将扩散系数考虑成由水平位移引起的扩散系数 D_H，及由垂直位移引起的扩散系数 D_V，那么，当不考虑震源项时，可得各向异性扩散方程为

$$\frac{\partial H}{\partial t} = D_H\left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2}\right) + D_V \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} - \frac{\omega}{Q}H \tag{9.28}$$

耗散介质中波的频散称为物质频散，因而必须讨论吸收介质中群速度概念及对它的限制。考虑带有耗散的一维波动方程

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2b\frac{\partial u}{\partial t} + au - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,(b > 0) \tag{9.29}$$

设行波形式的稳态解为

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \mathrm{Im}\left[Ae^{i\omega t} - x\left(\gamma + i\frac{\omega}{v}\right)\right] \\ &= Ae^{-\gamma x}\sin\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) \end{aligned} \tag{9.30}$$

其中 $v(\omega)$是相速度，$\gamma(\omega)$是空间衰减系数，且 A、$v(\omega)$及 $\gamma(\omega)$均是正实数。将式(9.30)代入式(9.29)中，得 $\gamma^2=\omega^2\left(\frac{1}{v^2}-\frac{1}{c^2}\right)+a$，及 $\gamma=bv$。因而解得

$$\left.\begin{aligned} v(\omega) &= \frac{c}{\xi\sqrt{\chi}} \\ \gamma &= \frac{\omega}{2Qv} = \frac{1}{\xi}\frac{\omega\sqrt{\chi}}{2cQ_0} \end{aligned}\right\} \tag{9.31}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} & Q(\omega) = Q_0\xi^2, \xi = \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{Q_0^2}\right)^{1/2}\right]^{1/2}, (\xi > 0) \\ & \chi = 1 - \frac{ac^2}{\omega^2}, Q_0 = \frac{\chi\omega}{2bc} \end{aligned}\right\} \tag{9.32}$$

为保证 $\gamma(\omega)>0$ 及 $v(\omega)>0$，要求 $\chi>0$ 与 $\xi>0$。观察式(9.32)中 χ 的表示式，在 $a\neq 0$ 的情况下，应可确定频率下限 $\omega>c\sqrt{a}$，而当 $\omega\to\infty$(上限)时，有 $\chi\to 1$，$\xi\to 1$，$v(\omega)\to c$，$\gamma\to bc$ 及 $\omega^2\left(\frac{1}{v^2}-\frac{1}{c^2}\right)\to$

(b^2c^2-a)。

按群速度定义，$U_g=\frac{d\omega}{dk}$或$\frac{1}{U_g}=\frac{1}{c}-\frac{\omega}{c^2}\frac{dc}{d\omega}$，这里$k=\frac{\omega}{v}-i\gamma$为复波数，可知

$$U_g=v\left[\frac{2\xi^2-1}{(\xi^2-1)+\left(\frac{1}{\chi}\right)}\right] \tag{9.33}$$

从式(9.33)可看出，如果$\omega>bc^2/\left(2+\sqrt{5}\right)^{1/2}$且$a=0$，则有$U_g>c$；而当$\omega\to\infty$时，有$U_g\to v\to c$。还应注意到，如果将波的传播因子写为$\exp\left[i\omega(t-nx/c)\right]$，这里$n=\left(\frac{c}{v}\right)\left[1-i\gamma\left(\frac{v}{\omega}\right)\right]$或$n^2(\omega)=1-(c^2/\omega^2)(a+2ib\omega)$，$n$表示复波数与实波数之比值，则具有复折射率意义。现在，就我们考虑的问题可表明，只有当耗散参数Q_0取大值($\xi\approx1$)时，衰减介质中的群速度U_g才可保持是介质中能流速度的物理意义。

这里再来讨论Q的物理意义。在讨论固有阻尼运动时，式(9.9)已定义了Q，它影响振动响应曲线的形状。若在响应曲线上求$|M(\omega)|$达到峰值的一半的点，则按式(9.18)，对于$Q\gg1$，有

$$\frac{Q}{2\omega_0^2}\approx\frac{1}{|\omega_0^2-\omega^2|} \tag{9.34}$$

而当ω接近于ω_0时，有$\omega_0^2-\omega^2\approx2\omega_0(\omega_0-\omega)$，代入式(9.34)可得

$$\frac{1}{Q}=\frac{\Delta\omega}{2\omega_0} \tag{9.35}$$

这里$\Delta\omega=|\omega_0-\omega|$是峰值一半时的响应曲线宽度，共振时的峰值大小为$Q/\omega_0^2$。若用功率响应来替代位移响应，则式(9.35)变成

$$\frac{1}{Q}=\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \tag{9.36}$$

从能量传输的角度来讨论，Q还可有另一种解释。若初始能量E_0通过阻尼线性系统传送，传输方程是

$$\ddot{x}+\frac{\omega_0}{Q}\dot{x}+\omega_0^2x=0$$

方程两边乘以 $\dot{x}$，得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{2}\dot{x}^2+\frac{1}{2}\omega_0^2x^2\right]=-\left(\frac{\omega_0}{Q}\right)\dot{x}^2=-P$$

式中 P 是功率损失。由于克服摩擦力要作功，损失率是 $(\omega_0/Q)\dot{x}^2$。我们来定义一个周期内的平均值，即 $\langle x\rangle=\frac{1}{T}\int_0^T x(t)\mathrm{d}t$，$\langle B\rangle=\frac{1}{2}\langle\dot{x}^2\rangle+\frac{1}{2}\omega_0^2\langle x^2\rangle$。由于传输方程的解是

$$x(t)=A\mathrm{e}^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}}\sin(\omega_0 t+\chi)$$

对这解作平均值计算，有

$$\langle x^2\rangle=\frac{A^2}{2}\mathrm{e}^{-\frac{\omega_0 T}{Q}},\langle B\rangle=\frac{A^2}{2}\omega_0^2\mathrm{e}^{-\frac{\omega_0 T}{Q}}$$

$$\langle\dot{x}^2\rangle=\frac{A^2}{2}\omega_0^2\mathrm{e}^{-\frac{\omega_0 T}{Q}},\langle P\rangle=\frac{\omega_0}{Q}\frac{A^2}{2}\omega_0^2\mathrm{e}^{-\frac{\omega_0 T}{Q}}$$

式中 T 表示周期。因而可得到 $\frac{\langle B\rangle}{T\langle P\rangle}=\frac{Q}{2\pi}$，由此可对 Q 作如下物理解释：

$$\frac{1}{Q}=\frac{1}{2\pi}\times\frac{\text{一周期内所损失的能量}}{\text{贮存在这个周期内的峰值能量}}\tag{9.37}$$

上式表明，Q 值是用来衡量系统的能量相对耗损的，从式(9.9)也能得出这一结论。

为明确，再将 Q 值定义写为

$$\frac{1}{Q(\omega)}=-\frac{\Delta E}{2\pi E}\tag{9.38}$$

式中 E 表示贮存在一周期内的峰值应变能，$-\Delta E$ 为一周期内的能量耗损，但这个定义很少有直接用途。通常能观测到的有驻波(固定波数)振幅随时间的衰减和行波(固定频率)振幅随空间的衰减。对于线性系统，波的振幅 $A\propto E^{1/2}$，因此可有

$$\frac{1}{Q(\omega)}=-\frac{1}{\pi}\frac{\Delta A}{A}\tag{9.38'}$$

那么，对于驻波，设振幅的初始值为 A_0，而在相继的时间 $\frac{2\pi}{\omega}, \frac{4\pi}{\omega}, \cdots, \frac{2n\pi}{\omega}$ 上，以系数 $\frac{\pi}{Q}$ 衰减的 $A=A(t)$ 是什么？显然 $A(t)=A_0\left(1-\frac{\pi}{Q}\right)^n$，这是对于 $t=\frac{2n\pi}{Q}$ 来讲的。当时间很长（即 n 值很大时），在极限情况下可得

$$A(t) = A_0\exp\left(-\frac{\omega t}{2Q}\right) \tag{9.39}$$

此 Q 值称为瞬时 Q 值。

对于行波 $A=A(x)$，而 $\Delta A=\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x}\lambda, \lambda=\frac{2\pi c}{\omega}$，将 ΔA 代入式(9.38′)得到 $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x}=-\frac{\omega}{2cQ}A$，即

$$A(x) = A_0\exp\left(-\frac{\omega x}{2cQ}\right) \tag{9.40}$$

此 Q 称为空间 Q 值。

对于简正振型，若用 Q^{T} 表示瞬时 Q，用 Q^{S} 表示空间 Q，可有 $(Q^{\mathrm{T}})^{-1}c=(Q^{\mathrm{S}})^{-1}U$。这里 c 表示相速度，U 表示群速度。

§2 线性粘弹性体

现在讨论用物理和数学模型来表征各类材料的粘弹性性质。

若介质无内部能量损失，其本构关系由虎克定律给出，此称为理想弹性体。而具有能量损失的材料（物体），称作滞弹性体。在给定时刻，应力分量与应变分量线性相关，可进行线性叠加，所以也称为线性滞弹性体。它在恒应力作用下会发生蠕变，而在恒应变状态下会发生松弛。下面作较详细的讨论。

在常应力作用下，材料缓慢地连续变形（图 9.4），当应力移去后，通过恢复过程，变形逐渐消失，此称为物体的蠕变。如果恢复是完全的，则称为弹性蠕变，当然这只是在应力比材料强度低时才存在。

如果恢复只是部分的，则认为是弹性流动，如果状态一点也不能恢复，则是流动。在这种流动中，若应变率与应力是线性关系，则称为粘性流动，否则称为塑性流动。以增加应变率形式出现的蠕变，最后以材料的破坏而告终。图 9.4 中曲线(1)表示瞬时弹性应变，(2)表示塑性变形而引起一永久应变，(3)表示粘弹性蠕变和恢复。

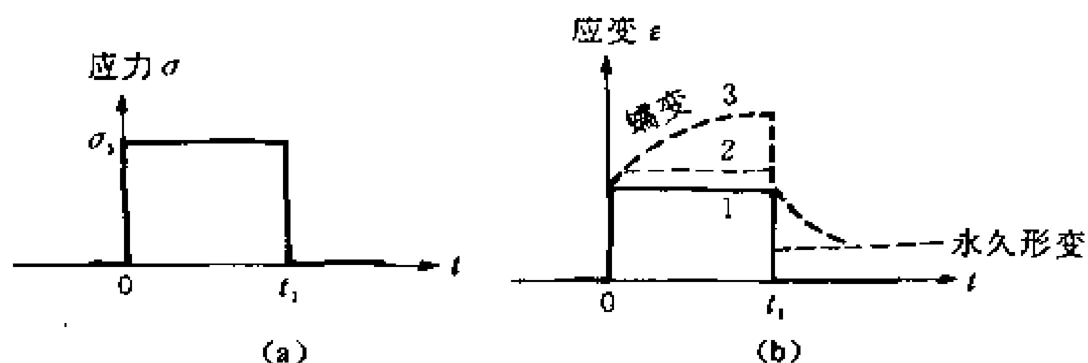


图 9.4 不同材料在常应力作用下的应变特征

在常应变状态下的粘弹性材料，其内部的应力会逐渐消失，这个过程称为松弛(图 9.5)。若松弛过程是完全的，称为弹性松弛蠕变；若松弛过程不完全，称为弹性松弛流动(a)。

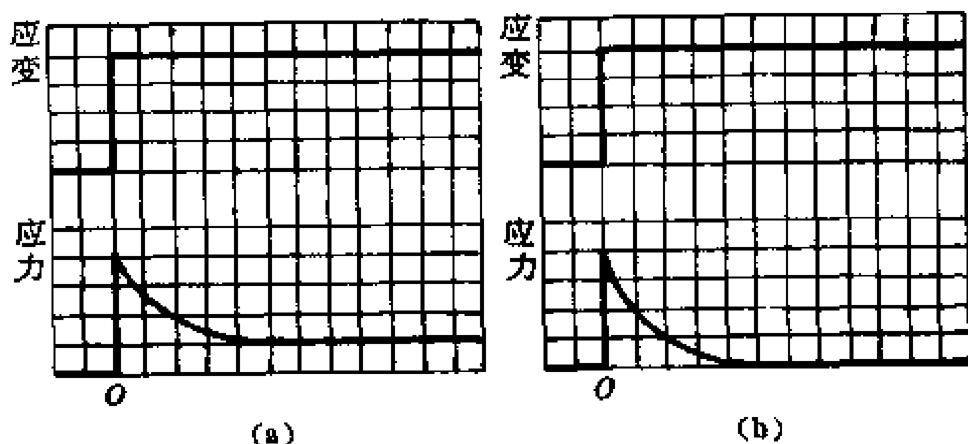


图 9.5 材料在常应变状态下的应力松弛特征

材料的蠕变和松弛特性按图 9.6 所示装置测量。图 9.6a 是一固

定载荷作用在试件上，测量它在不同时刻的长度相对变化，图 9.6b 是保持试件初始变形而用标定过的弹簧测定载荷。

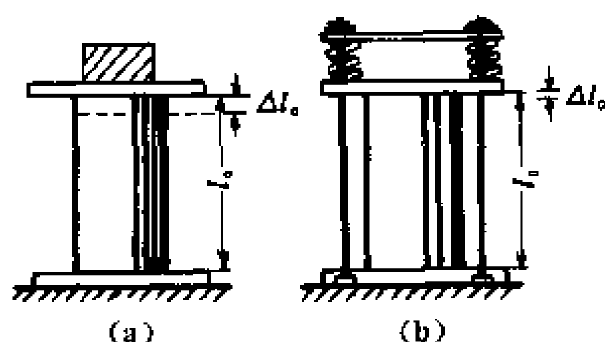


图 9.6 粘弹性特性试验装置略图

可用最简单的一维机械模型来表征粘弹性材料的特征，类似于电路回路，即用基本元件的并联和串联构成复杂模型，表征各种材料的复杂的粘弹性性质。

线性弹性体最简单的模型是线性弹簧，受力时产生拉伸变形，变形大小与力成正比，而且具有瞬时性，即立即变形与立即恢复（图 9.7a），时间对弹簧的伸缩无影响，这也是弹性固体的特征。其受切应力作用时也具有这种瞬时的弹性特性。

另一种基本元件是线性阻尼器，它相当于粘性流体（图 9.7b）。这种元件所具有的性质是，其伸长率（即活塞速度）与作用力成正比。当作用一阶梯形常应力时，它将以定常速率连续地变形。当受剪切力时，则用剪切应变率代替拉伸率，切应力代替正应力，有同样的粘性流体特性，但当保持阶梯形常应变时，则应力是一个时间脉冲函数 $\delta^{+}(t)$，$\delta^{+}(t)=2H(t)\delta(t)$。因为无限大的应力是不真实的，因而不可能有瞬时有限变形的阻尼器。

由上述两种基本元件可构成两种基本粘弹性材料的模型。储存在弹簧中的能量，即应变势能是 $\sigma^2/2\mu$，而消耗在阻尼器中的能量速率是 $(1/\eta)\sigma^2$，这里 μ 为弹性模量，η 为粘性系数，σ 为应力。在复杂的弹簧——阻尼器系统中，我们必须对所有弹簧和阻尼器求和。

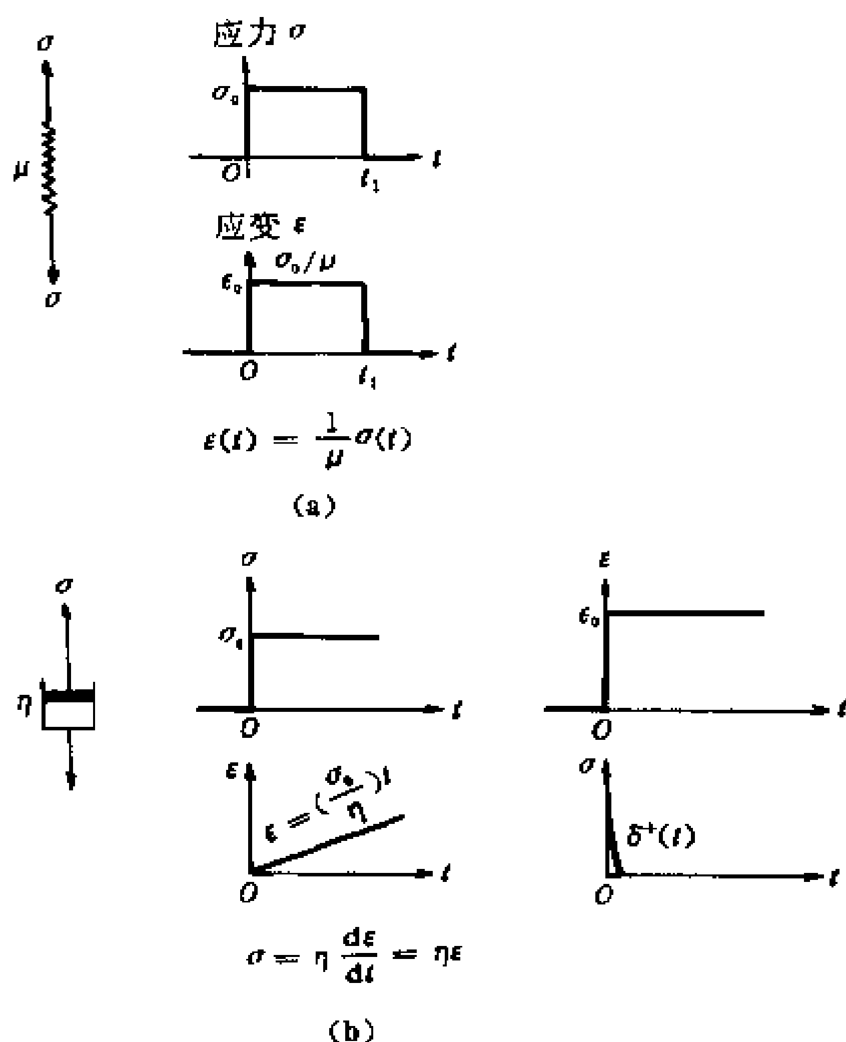


图 9.7　粘弹性模型的基本元件及应力-应变响应

Maxwell 模型是基本粘弹性模型之一。它由一个线性弹簧和一个阻尼器串联而成(图 9.8)。一个给定的应力要同时产生两类应变:一是弹性应变 $\varepsilon_1=(1/\mu)\sigma$,一是应变率 $\dot{\varepsilon}_2=\left(\frac{1}{\eta}\right)\sigma$,因而总的应变率是

$$\dot{\varepsilon}=\dot{\varepsilon}_1+\dot{\varepsilon}_2=\frac{1}{\mu}\dot{\sigma}+\frac{1}{\eta}\sigma \tag{9.41}$$

定义松弛时间是 $\tau_0=\frac{\eta}{\mu}$,则方程(9.41)的解为

$$\sigma=\mu e^{-\frac{t}{\tau_0}}\left[\varepsilon(0)+\int_0^t\dot{\varepsilon}(t)e^{\frac{t}{\tau_0}}dt\right] \tag{9.42}$$

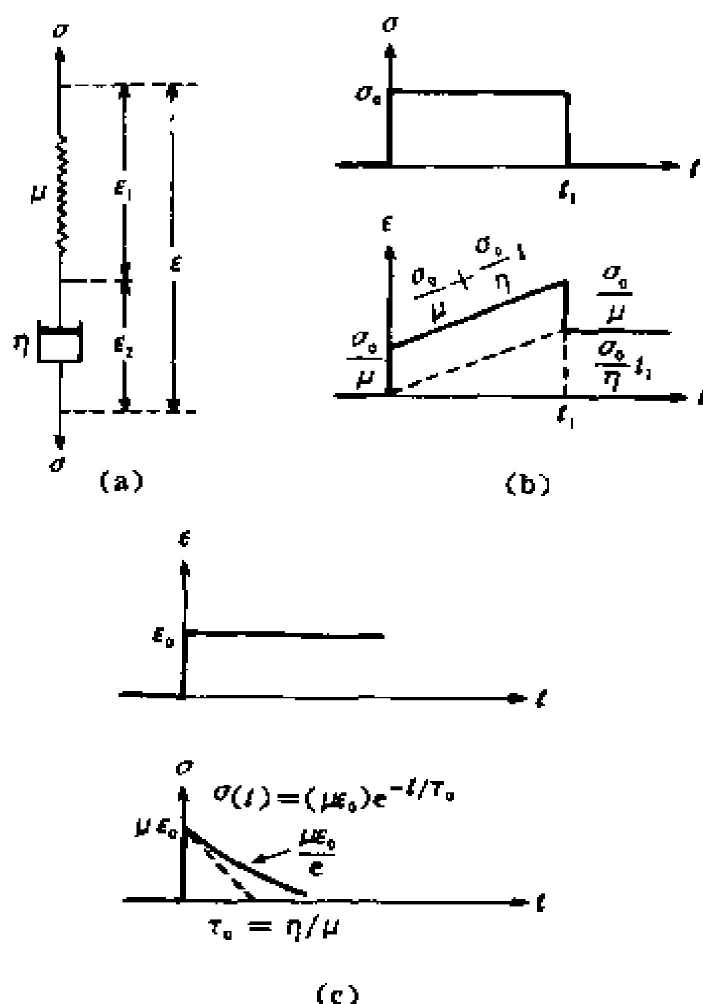


图 9.8　Maxwell 模型

用分部积分，可得到解的另一种形式

$$\frac{\sigma}{\mu} = \varepsilon - \frac{1}{\tau_0}\int_0^t \varepsilon(t')\mathrm{e}^{-\frac{(t-t')}{\tau_0}}\mathrm{d}t' \tag{9.43}$$

也可直接对方程(9.41)进行积分，用应力表示应变为

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{\mu}\sigma(t) + \frac{1}{\eta}\int_0^t \sigma(t')\mathrm{d}t' \tag{9.44}$$

下面介绍几种情况：

(1)阶梯应力 $\sigma=\sigma_0 H(t)$。代入式(9.44)，得

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{\mu}\left(1 + \frac{t}{\tau_0}\right)H(t),\sigma_c = \sigma(0) \tag{9.45}$$

(2)"方形"应力 $\sigma=\sigma_0[H(t)-H(t-t_1)]$,应变为

$$\varepsilon(t)=\begin{cases}\dfrac{\sigma_0}{\mu}\left(1+\dfrac{t}{\tau_0}\right)H(t), & (t<t_1)\\[2mm] \dfrac{\sigma_0}{\eta}t_1, & (t>t_1)\end{cases} \tag{9.46}$$

当 $t_1\to\infty$ 时,就变成阶梯应力情况。当 t_1 是有限值时(图 9.8b),线性蠕变一直到 $t=t_1$ 时刻,$t>t_1$ 后则是永久的残余变形,即使应力消失,它也保留下来。

(3)谐变应力 $\sigma=\sigma_0\sin\omega_0 t$,从式(9.44)得

$$\begin{aligned}\varepsilon(t)&=\frac{\sigma_0}{\mu}\left[\sin\omega_0 t-\frac{1}{Q}\cos\omega_0 t+\frac{1}{Q}\right]\\&=\frac{\sigma_0}{\mu}\left[\left(1+\frac{1}{Q^2}\right)^{1/2}\sin(\omega_0 t-\varphi_0)+\frac{1}{Q}\right]\end{aligned} \tag{9.47}$$

式中 $\tan\varphi_0=\dfrac{1}{Q}$,$Q=\omega_0\tau_0=\omega_0\dfrac{\eta}{\mu}$。应变比作用应力滞后角度为 $\arctan\dfrac{1}{Q}\approx\dfrac{1}{Q}$。

(4)阶梯应变 $\varepsilon=\varepsilon_0 H(t)$,从式(9.43)得应力结果为

$$\sigma(t)=\mu\varepsilon_0 e^{-\frac{t}{\tau_0}} \tag{9.48}$$

即出现应力松弛现象(图9.8c)。在 $t=0$ 时,应力率是 $\dot{\sigma}(0)=-\sigma_0(\mu/\eta)=-(\sigma_0/\tau_0)$,$t=0$ 处曲线的切线与时间轴交于 τ_0。当模型突然承受拉伸,尔后维持不变的情况,两个元件在所有时刻都承受相同的力作用,但最初的拉伸只在弹簧中出现,这是因为在非常短的时间内,有限的力不会引起阻尼器产生有限伸长。随着时间推移,弹簧要收缩,为了使整个系统保持常伸长,这时只有拉长阻尼器。当弹簧收缩到它自己的平衡位置,内部变形过程就中止,同时拉力也已完全松弛了。

Kelvin-Voigt 模型是基本粘弹性模型之二,由弹簧和阻尼器并联而成(图 9.9)。如果对模型作用一个常力并保持下去(比如在 $t=0$ 时刻挂一个荷重),由于与弹簧并联的阻尼器不会发生瞬时移动,故

应力不立即产生位移，变形只能是逐渐形成，最终达到伸长的最大值。当应力突然降到零，应变再次要滞后，这是由于阻尼器的指数松

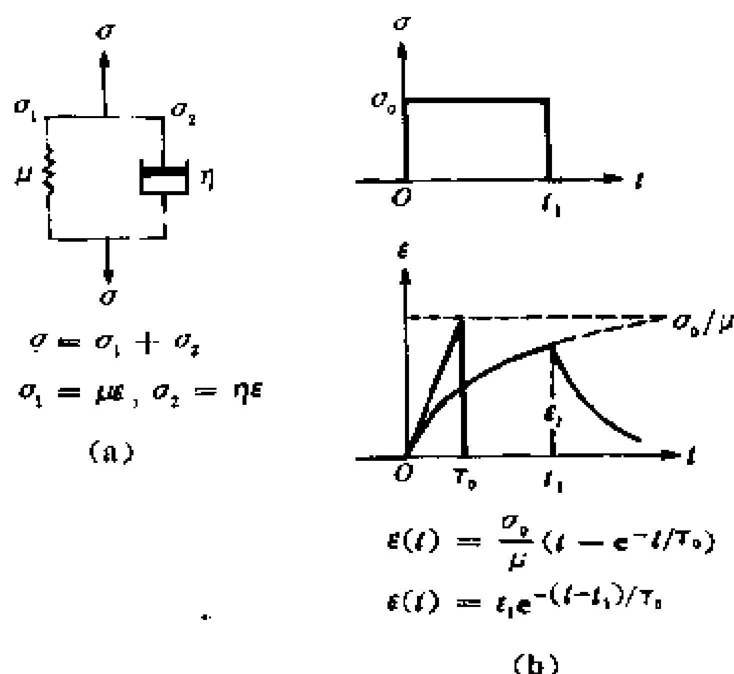


图 9.9 Kelvin—Voigt 模型

弛之故。在全部回复后，没有永久变形存在。此模型的基本方程为

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 = \mu\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon} \tag{9.49}$$

模型中的两基本元件的应变相同而所受的应力不同，当给定总的 $\sigma(t)$，从方程(9.49)解出

$$\varepsilon(t) = \varepsilon(0)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau_0}} + \frac{1}{\eta}\int_0^t \sigma(t')\mathrm{e}^{-\frac{(t-t')}{\tau_0}}\mathrm{d}t' \tag{9.50}$$

下面介绍几种情况：

(1)常应力下的蠕变，$\sigma=\sigma_0 H(t)$，$\varepsilon(0)=0$，由式(9.50)得

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{\mu}(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau_0}}) \tag{9.51}$$

表示 $\varepsilon(t)$ 逐渐趋近于 σ_0/μ 值(图 9.9b)。一开始，应力完全由阻尼器元件承担。随着此粘性元件伸长，应力逐渐传递到弹性元件上，最后全部应力都由弹性元件来承担。初始应变率是 $\dot{\varepsilon}(0)=\sigma_0/\eta$，如果应

变按此速率增加，则在 τ_0 时刻就会达到渐近值，当然实际上不会如此。

若 $\sigma(t)=\sigma_0[H(t)-H(t-t_1)]$，代入式(9.50)，得到 $t>t_1$ 时有

$$\varepsilon(t)=\frac{\sigma_0}{\mu}e^{-\frac{t}{\tau_0}}\left(e^{\frac{t_1}{\tau_0}}-1\right)=\varepsilon_1 e^{-\frac{(t-t_1)}{\tau_0}} \tag{9.52}$$

这种情况由图 9.9b 所示。

(2)常应变下的松弛，$\varepsilon=\varepsilon_0 H(t)$，由方程(9.49)解得

$$\sigma(t)=\varepsilon_0[\mu H(t)+\eta\delta(t)] \tag{9.53}$$

这表明此类模型不发生与时间有关的松弛。式中存在 δ 函数说明要突然使阻尼器产生应变需要有一个无限大的应力作用。对于 $t>0$，所有的应力都由弹簧承担。

更复杂的模型是三参数固体(标准线性体)模型，它由一个 Voigt 体(μ_1,η_1)和一个弹簧(μ_2)串联而成(图 9.10a)。它具有瞬时弹性应变 $\varepsilon(0)=\frac{\sigma_0}{\mu_2}$，对于应力 $\sigma=\sigma_0 H(t)$ 作用，有 $\varepsilon(\infty)=\sigma_0\left(\frac{1}{\mu_1}+\frac{1}{\mu_2}\right)$。模型给出的应力与应变关系是

$$\sigma=\mu_1\varepsilon_1+\eta_1\dot{\varepsilon}_1=\mu_2\varepsilon_2,\varepsilon=\varepsilon_1+\varepsilon_2 \tag{9.54}$$

消去 ε_1 和 ε_2，则有

$$\sigma+\tau_\sigma\dot{\sigma}=M_R(\varepsilon+\tau_\varepsilon\dot{\varepsilon}) \tag{9.55}$$

其中 $\tau_\sigma=\frac{\eta_1}{\mu_1+\mu_2}$，$\tau_\varepsilon=\frac{\eta_1}{\mu_1}>\tau_\sigma$，$M_R=\frac{\mu_1\mu_2}{\mu_1+\mu_2}$，可求得方程(9.55)的解为

$$\varepsilon(t)=\frac{1}{M_R}\left[\sigma(t)-\left(1-\frac{\tau_\sigma}{\tau_\varepsilon}\right)\right]\int_0^t e^{-\frac{(t-t')}{\tau_\varepsilon}}\dot{\sigma}(t')\mathrm{d}t' \tag{9.56}$$

给定 $\sigma=\sigma_0 H(t)$，代入式(9.56)得到

$$\begin{aligned}\varepsilon(t)&=\frac{\sigma_0}{M_R}\left[1-\left(1-\frac{\tau_\sigma}{\tau_\varepsilon}\right)e^{-\frac{t}{\tau_\varepsilon}}\right]H(t)\\&=\frac{\sigma_0}{\mu_2}\left[1+\left(\frac{\tau_\varepsilon}{\tau_\sigma}-1\right)\left(1-e^{-\frac{t}{\tau_\varepsilon}}\right)\right]H(t)\end{aligned} \tag{9.57}$$

且有极限值

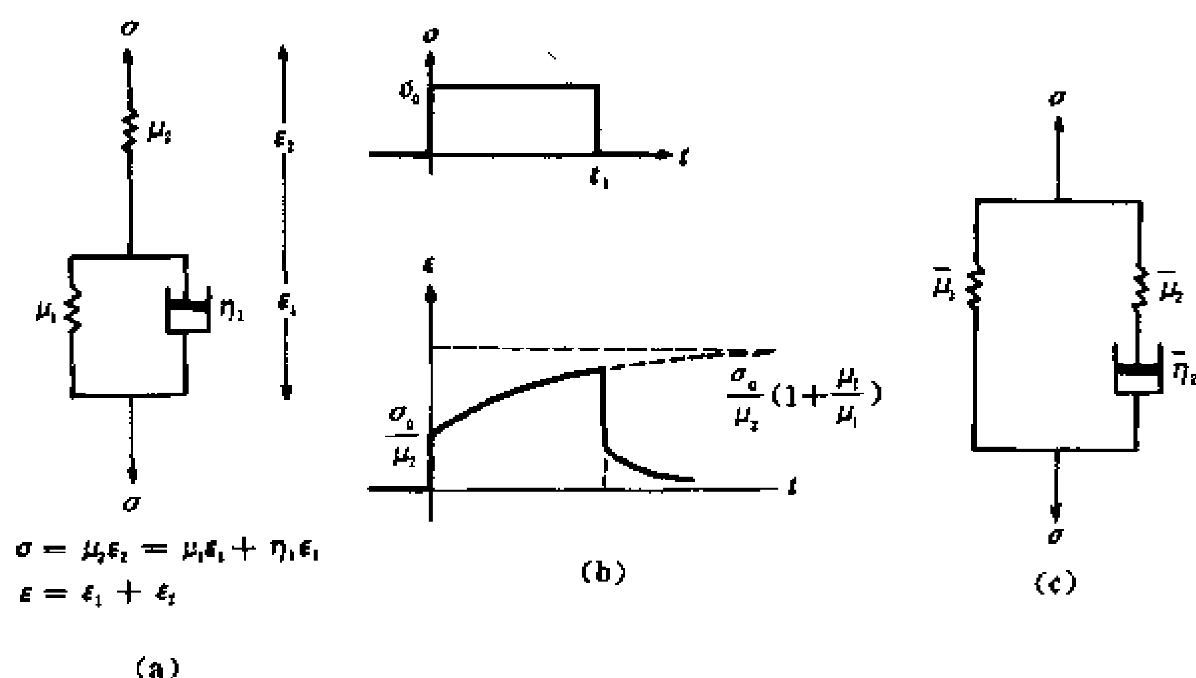


图 9.10　标准线性体模型

$$\varepsilon(\infty) = \frac{\sigma_0}{M_R}, \varepsilon(0) = \frac{\sigma_0}{\mu_2} \tag{9.58}$$

如图 9.10b 所示。从图 9.10b 看到，应力与应变的比值最终达到 M_R，称它为松弛弹性模量，应力与应变比值的初始值是 μ_2，这是弹性模量。

如果给定 $\varepsilon = \varepsilon_0 H(t)$，则松弛的应力是

$$\sigma(t) = M_R \varepsilon_0 \left[1 + \left(\frac{\tau_\varepsilon}{\tau_\sigma} - 1 \right) e^{-\frac{t}{\tau_\sigma}} \right] H(t) \tag{9.59}$$

相应的也有 $\sigma(0) = \mu_2 \varepsilon_0, \sigma(\infty) = M_R \varepsilon_0$。

在谐变应力 $\sigma = S e^{i\omega t}$ 作用下，所引起的应变也应是谐变的，有 $\varepsilon = E e^{i\omega t}$，将它们代入式(9.55)中，有

$$S(1 + i\omega\tau_\sigma) = M_R E(1 + i\omega\tau_\varepsilon) \tag{9.60}$$

因而

$$\frac{S}{E} = M_R \frac{1 + i\omega\tau_\varepsilon}{1 + i\omega\tau_\sigma} = \mu_2 \frac{\mu_1 + i\omega\eta_1}{(\mu_1 + \mu_2) + i\omega\eta_1} = K e^{i\delta} \tag{9.61}$$

$$\tan\delta = \frac{\omega(\tau_\epsilon - \tau_\sigma)}{1 + \omega^2\tau_\epsilon\tau_\sigma} = \frac{1}{Q} \tag{9.62}$$

这里 τ_σ 称为应力松弛时间，τ_ϵ 称为应变松弛时间，δ 角表明应变滞后于应力的量值，也是阻尼的一种表征。图 9.10c 表示此模型元件的另一组合。

将上述三种粘弹性模型作统一描述。当在阶梯应力 $\sigma_0 H(t)$ 作用下，其应变响应为

$$\epsilon(t) = \sigma_0\varphi_c(t)H(t) \tag{9.63}$$

这里称 $\varphi_c(t)$ 为蠕变柔度，它表征单位应力作用下产生的蠕变应变。对于弹性体、Maxwell 体、Kelvin-Voigt 体及三参数固体，它们的 $\varphi_c(t)$ 值分别为 $\frac{1}{\mu}$，$\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\eta}t$，$\frac{1}{\mu}\left[1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau_0}}\right]$ 及 $\frac{1}{M_R}\left[1-\left(1-\frac{\tau_\sigma}{\tau_\epsilon}\right)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau_\epsilon}}\right]$。

同理，在常应变 $\epsilon(t)=\epsilon_0 H(t)$ 状态下，其应力

$$\sigma(t) = \epsilon_0\psi_c(t)H(t) \tag{9.64}$$

$\psi_c(t)$ 为单位应变状态下所对应的应力，称为松弛模量，对于上述 4 种材料 $\psi_c(t)$ 分别为 μ、$\mu\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau_\sigma}}$、$\mu H(t)+\eta\delta(t)$ 及 $M_R\left[1+\left(\frac{\tau_\epsilon}{\tau_\sigma}-1\right)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau_\sigma}}\right]$。

进一步，可以引入有限个 Kelvin-Voigt 体和（或）Maxwell 体作串联或并联的组合，构成更为复杂的模型。我们先考虑由 N 个 Maxwell 体串联而成的模型，它们本构方程是

$$\dot{\epsilon} = \dot{\sigma}\left[\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\mu_i}\right] + \sigma\left[\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\eta_i}\right]$$

这组合模型相当于一个新的 Maxwell 模型，它的相当参数为 $\mu=\left[\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\mu_i}\right]^{-1}$，$\eta=\left[\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\eta_i}\right]^{-1}$。类似地可有由 N 个 Kelvin-Voigt 体并联而成的模型，其本构方程为

$$\sigma = \epsilon\sum_{i=1}^{N}\mu_i + \dot{\epsilon}\sum_{i=1}^{N}\eta_i$$

新的模型参数为 $\mu=\sum_{i=1}^{N}\mu_i$，$\eta=\sum_{i=1}^{N}\eta_i$。

如果模型由 Kelvin-Voigt 体串联而成(图 9.11),称为广义 K-V 模型。在每一个 K-V 体中,应力 σ 都相同。若对此模型作用一阶梯应

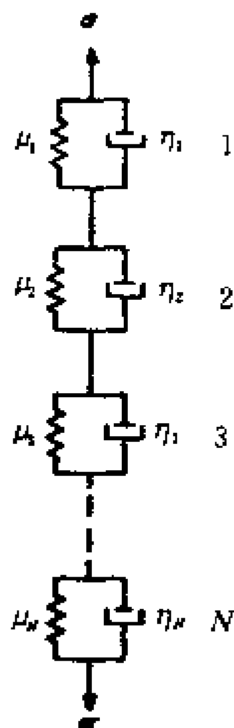


图 9.11　广义 K-V 模型

力 $\sigma=\sigma_0 H(t)$,则总的蠕变应变是每个 K-V 体的蠕变应变之和,有

$$\varepsilon(t)=\sigma_0\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\mu_i}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau_i}}\right)H(t) \tag{9.65}$$

式中 $\tau_i=\eta_i/\mu_i$ 是第 i 个滞后时间,刚度的倒数 $J_i=\dfrac{1}{\mu_i}$ 称为柔度。若每个 K-V 体的柔度都很小($J_i\to 0$),而系统的总柔度 $\sum J_i$ 却趋于一常量且大于零,则式(9.65)变成为

$$\varepsilon(t)=H(t)\sigma_0\int_0^{\infty}J(\tau)(1-\mathrm{e}^{\frac{t}{\tau}})\mathrm{d}\tau \tag{9.66}$$

式中函数 $J(\tau)$是滞后谱,它是滞后时间的分布函数。同样方法,对无限多个 Maxwell 体的串联系统,松弛应力可表示为

$$\sigma(t)=H(t)\varepsilon_0\int_0^{\infty}y(\tau)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\mathrm{d}\tau \tag{9.67}$$

其中 $y(\tau)$ 称为松弛谱。

在最一般情况下，应力-应变关系为

$$P\sigma(t) = S\epsilon(t) \tag{9.68}$$

式中 P、S 是微分算子，分别表示

$$P = p_0 + p_1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + \cdots + p_L \frac{\mathrm{d}^L}{\mathrm{d}t^L}$$

$$S = s_0 + s_1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + \cdots + S_M \frac{\mathrm{d}^M}{\mathrm{d}t^M}$$

及在 $t=\pm\infty$ 有

$$\sigma = \dot{\sigma} = \ddot{\sigma} = \cdots = \sigma^{(L-1)} = 0$$

$$\epsilon = \dot{\epsilon} = \ddot{\epsilon} = \cdots = \epsilon^{(M-1)} = 0$$

对式(9.68)作 Fourier 变换并运用上述条件，可有

$$P^* \sigma^*(\omega) = S^* \epsilon^*(\omega) \tag{9.69}$$

其中

$$P^* = P^*(\mathrm{i}\omega) = \sum_{l=0}^{L} P_l(\mathrm{i}\omega)^l$$

$$S^* = S^*(\mathrm{i}\omega) = \sum_{m=0}^{M} s_m(\mathrm{i}\omega)^m$$

$$\sigma^*(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t$$

$$\epsilon^*(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t$$

将 p_0 归一化，使 $p_0=1$，并由式(9.69)得

$$\epsilon^*(\omega) = \frac{P^*(\mathrm{i}\omega)}{S^*(\mathrm{i}\omega)}\sigma^*(\omega) = J^*(\mathrm{i}\omega)\sigma^*(\omega)$$

$$= \frac{1 + p_1(\mathrm{i}\omega) + p_2(\mathrm{i}\omega)^2 + \cdots + p_L(\mathrm{i}\omega)^L}{s_0 + s_1(\mathrm{i}\omega) + s_2(\mathrm{i}\omega^2) + \cdots + s_M(\mathrm{i}\omega)^M}\sigma^*(\omega) \tag{9.70}$$

这里 $J^*(\mathrm{i}\omega)$ 是一个复数，因而称为复蠕变柔度，对它可以写成因子分解形式，有

$$J^*(\mathrm{i}\omega) = \sum_{r=1}^{M} \frac{\alpha_r}{\beta_r + (\mathrm{i}\omega)}, \quad (M \geqslant L) \tag{9.71}$$

将式(9.71)代入式(9.70)，再作逆 Fourier 变换，应用卷积定理，得

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^{t} \sigma(\tau) J(t-\tau) \mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{t} \sigma(\tau) \sum_{r=1}^{M} \alpha_r \mathrm{e}^{-\beta_r(t-\tau)} \mathrm{d}\tau \tag{9.72}$$

式中

$$J(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} J^*(\mathrm{i}\omega) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \mathrm{d}\omega \tag{9.73}$$

当应力具有谐变形式 $\sigma = \sigma_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$ 时，它引起的应变也应有谐变形式，但有相位差，即 $\varepsilon = \tilde{\varepsilon} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$，$(\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta})$。将它们代入式(9.68)中，得

$$\sigma_0(1 + p_1(\mathrm{i}\omega) + p_2(\mathrm{i}\omega)^2 + \cdots + p_L(\mathrm{i}\omega)^L)$$

$$= \tilde{\varepsilon}(s_0 + s_1(\mathrm{i}\omega) + s_2(\mathrm{i}\omega)^2 + \cdots + s_M(\mathrm{i}\omega)^M)$$

或者写成

$$\frac{\tilde{\varepsilon}}{\sigma_0} = \frac{1 + p_1(\mathrm{i}\omega) + \cdots + p_L(\mathrm{i}\omega)^L}{s_0 + s_1(\mathrm{i}\omega) + \cdots + s_M(\mathrm{i}\omega)^M} = J^*(\mathrm{i}\omega) = J_1^*(\omega) - \mathrm{i}J_2^*(\omega) \tag{9.74}$$

很清楚，有

$$|J^*(\mathrm{i}\omega)| = \frac{\varepsilon_0}{\sigma_0}, \tan\delta = \frac{J_2^*}{J_1^*} \tag{9.75}$$

同样地，对于应变输入为 $\varepsilon = \varepsilon_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$ 的情况，应力响应是 $\sigma = \tilde{\sigma} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} = \sigma_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t + \delta)}$，也有关系

$$\frac{\tilde{\sigma}}{\varepsilon_0} = Y^*(\mathrm{i}\omega) = \frac{s_0 + s_1(\mathrm{i}\omega) + \cdots + s_M(\mathrm{i}\omega)^M}{1 + p_1(\mathrm{i}\omega) + \cdots + p_L(\mathrm{i}\omega)^L} = Y_1^*(\omega) + \mathrm{i}Y_2^*(\omega) \tag{9.76}$$

$Y^*(\mathrm{i}\omega)$ 称为复松弛模量，有

$$|Y^*(\mathrm{i}\omega)| = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}, \tan\delta = \frac{Y_2^*}{Y_1^*} \tag{9.77}$$

可看出，对于类似的粘弹性体，有

$$\left.\begin{aligned}
&J^*(i\omega)Y^*(i\omega) = 1 \\
&|J^*(i\omega)| = \frac{1}{|Y^*(i\omega)|} \\
&\tan\delta = \frac{Y_2^*}{Y_1^*} = \frac{J_2^*}{J_1^*}
\end{aligned}\right\} \tag{9.78}$$

下面讨论复蠕变柔度与 Q 值的关系。令应力 $\sigma=\sigma_0\sin\omega t$，则应变与应变率分别为 $\varepsilon=\varepsilon_0\sin(\omega t-\delta)$ 及 $\dot{\varepsilon}=\varepsilon_0\omega\cos(\omega t-\delta)$，在一个周期内的能量损失是

$$\Delta W = \int_0^T \sigma(t)\left(\frac{\partial\varepsilon}{\delta t}\right)\mathrm{d}t = \pi\sigma_0\varepsilon_0\sin\delta = \pi\varepsilon_0^2 Y_2^*(\omega) \tag{9.79}$$

物体中一个周期内贮存的最大平均能量是在应力和应变处于同相位的时候($\delta=0$)，它是

$$W = \frac{1}{T}\int_0^T \sigma\varepsilon\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T \sigma_0\varepsilon_0\sin^2\omega t\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sigma_0\varepsilon_0$$

因而有

$$\frac{1}{Q} = \frac{1}{2\pi}\frac{\Delta W}{W} = \sin\delta = \frac{J_2^*/J_1^*}{[1+(J_2^*/J_1^*)^2]^{1/2}} \tag{9.80}$$

上面只从阶梯形式或谐变荷载的情况下考虑问题。对于一般荷载作用的情况，可应用线性叠加原理。如在 τ 时刻将应力 σ (τ) 作用到粘弹性材料中，并维持 $\delta\tau$ 时间，在稍后的 t 时刻，它是 σ (τ) M ($t-\tau$) $\delta\tau$，M (t) 称为记忆函数，则在 $\tau=-\infty$ 时刻至 $\tau=t$ 时刻，所引起的总应变为

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^{t} \sigma(\tau)M(t-\tau)\mathrm{d}\tau \tag{9.81}$$

如果假定所有的应力与应变都具有因果性，即 $t<0$ 时它们都为零，则式(9.81)的下限应为 $\tau=0$。

也可用另外的方法得到式(9.81)。设从 $t=\tau_1$ 时刻开始，作用着一个常应力 $\sigma(t)=\sigma_1 H(t-\tau_1)$，则蠕变应变 $\varepsilon(t)=\sigma_1\varphi_c(t-\tau_1)H(t-\tau_1)$。若在 τ_1 时刻之后，又有 N 个阶梯应力 $\Delta\sigma_n=\sigma_{n+1}-\sigma_n$ 分别在 $\tau_N>\tau_{N-1}>\cdots>\tau_{n+1}>\tau_n\cdots>\tau_1$ 时刻逐个地作用，它们引起的总应变为

$$\varepsilon(t)=\sum_{n=1}^{N}\varepsilon_n(t-\tau_n)=\sum_{n=1}^{N}\Delta\sigma_n\varphi_c(t-\tau_n)H(t-\tau_n) \tag{9.82}$$

当 N 无限增加，在极限情况下，可有

$$\varepsilon(t)=\int_0^t\varphi_c(t-\tau)\mathrm{d}\sigma(t)=\int_0^t\varphi_c(t-\tau)\frac{\mathrm{d}\sigma(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}\tau \tag{9.83}$$

分部积分后可得

$$\varepsilon(t)=\varepsilon_\infty\frac{\sigma(t)}{\sigma_0}-\int_0^t\sigma(\tau)\frac{\partial\varphi_c(t-\tau)}{\partial\tau}\mathrm{d}\tau \tag{9.84}$$

与式(9.81)比较，有

$$M(t)=\varepsilon_\infty\sigma_0^{-1}\delta(t)+\frac{\partial\varphi_c(t)}{\partial t} \tag{9.85}$$

同理，对于任意给定应变 $\varepsilon(t)$，也可得到应力松弛，有

$$\sigma(t)=\int_0^t\psi_c(t-\tau)\frac{\mathrm{d}\varepsilon(t)}{\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}\tau \tag{9.86}$$

现在将上述一维粘弹性情况推广到三维问题中去。从三维广义 Hooke 定律出发，材料的粘性张量具有牛顿流体特性，对于最一般的各向异性介质，Kelvin-Voigt 体的应力-应变关系为

$$\sigma_{ij}=c_{ijlm}\varepsilon_{lm}+D_{ijlm}\frac{\partial\varepsilon_{lm}}{\partial t} \tag{9.87}$$

式中 c_{ijlm}是 4 阶弹性模量张量，D_{ijlm}是 4 阶粘性张量。在各向同性材料中，这粘性张量像弹性模量张量一样，简化为两个独立的量，即 stokes 粘性常数 λ与 η，其中 λ是体积粘性系数，η 是剪切粘性系数。现在，我们重新引入两个粘性系数 λ'和 μ'，它们与 Stokes 粘性系数有一定关系，因而介质的力学特性由 4 个参数 λ、μ 和 λ'、μ'而给定。那么，现在的粘弹性力学问题，完全可以用纯粹弹性力学问题来对应处理，只要用 $\lambda+\lambda'\frac{\partial}{\partial t}$，$\mu+\mu'\frac{\partial}{\partial t}$去替代 λ、μ 即可。这样，应力-应变关系为

$$\sigma_{ij}(\boldsymbol{x},t)=\left(\lambda+\lambda'\frac{\partial}{\partial t}\right)\delta_{ij}\varepsilon_{kk}(\boldsymbol{x},t)+2\left(\mu+\mu'\frac{\partial}{\partial t}\right)\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{x},t) \tag{9.88}$$

对于均匀材料，运动方程的矢量形式是

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2}=\boldsymbol{F}+\alpha^2\left(1+\tau_1\frac{\partial}{\partial t}\right)\operatorname{grad}(\operatorname{div}\boldsymbol{u})-\beta^2\left(1+\tau_2\frac{\partial}{\partial t}\right)\operatorname{curl}(\operatorname{curl}\boldsymbol{u}) \tag{9.89}$$

式中 $\tau_1=\frac{\lambda'+2\mu'}{\lambda+2\mu}$，$\tau_2=\frac{\mu'}{\mu}$。这种 Kelvin-Voigt 介质也包括下列特殊情况，即对于刚体有 $\lambda'=\mu'=0$，$\lambda=\mu=\infty$；对于理想流体有 $\lambda\operatorname{div}\boldsymbol{u}=p$，$\mu=\mu'=\lambda'=0$；对于弹性体有 $\mu'=\lambda'=0$，对于牛顿流体，$\lambda\operatorname{div}\boldsymbol{u}=-p$，$\mu=0$，$\mu'=\eta$，$\lambda'=\bar{\lambda}-\frac{2}{3}\eta$；对于 Stokes 流体，$\lambda\operatorname{div}\boldsymbol{u}=-p$，$\mu=0$，$\mu'=\eta$，$\lambda'=-\frac{2}{3}\eta$。

现在再来考虑一个弹性体积膨胀，而剪切具有 Maxwell 体特征的三维问题，即

$$\frac{1}{2\mu}\dot{\sigma}_{ij}+\frac{1}{2\eta}\sigma_{ij}=\dot{\epsilon}_{ij},(i\neq j;i,j=1,2,3) \tag{9.90}$$

式中 μ 为剪切弹性模量，η 是剪切粘性系数。在常应变条件下，松弛应力是 $\sigma_{ij}(t)=\sigma_{ij}(0)e^{-\frac{t}{\tau_0}}$，这里 $\tau_0=\eta/\mu$ 是应力松弛时间。而给定任意剪切应力，方程(9.90)的解是

$$\epsilon_{ij}(t)=\left[\epsilon_{ij}(0)-\frac{1}{2\mu}\sigma_{ij}(0)\right]+\frac{1}{2\mu}\sigma_{ij}(t)+\frac{1}{2\mu\tau_0}\int_0^t\sigma_{ij}(t')\mathrm{d}t' \tag{9.91}$$

当 $t<\tau_0$ 时，积分项与 σ_{ij} 相比较是小的，因而 Hooke 定律占优势，即物体表现的是弹性。当 $t>\tau_0$ 时，在小应力作用下会有较大的应变，这时物体表现为粘性流。特别注意到，在常应力作用下，应变是 $\epsilon_{ij}(t)=\epsilon_{ij}(0)+(1/2\eta)\sigma_{ij}(0)t$，因而物体有流动性。

考虑沿 y 方向传播的平面剪切波位移 $u(y,t)$，其运动方程为 $\rho\frac{\partial^2\mu}{\partial t^2}=\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial y}$，且 $\epsilon_{12}=\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y}$，将本构关系(9.90)代入，得

$$\frac{1}{\beta^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\tau_0\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{1}{\beta^2}\frac{\partial^2\mu}{\partial t^2}\right] \tag{9.92}$$

对于各向同性的粘弹性材料，弹性情况的本构关系可用剪切模量 μ 及体积压缩模量 K 来表示，即 $\sigma_{kk}(t)=3K\varepsilon_{kk}(t)$，$\sigma_{ij}(t)=2\mu\varepsilon_{ij}(t)$，$(i\neq j)$，推广之，用一维应力松弛公式(9.86)，则可得到用体积形变和剪切形变表示的本构关系，为

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{kk}(x,t)&=\int_0^t\psi_k(t-\tau)\frac{\partial\varepsilon_{kk}(x,\tau)}{\partial\tau}\mathrm{d}\tau\\ \sigma_{ij}(x,t)&=\int_0^t\psi_\beta(t-\tau)\frac{\partial\varepsilon_{ij}(x,t)}{\partial\tau}\mathrm{d}\tau,(i\neq j)\end{aligned}\right\}\tag{9.93}$$

可以将它们合并起来，写成单一的表达式，即

$$\sigma_{ij}(x,t)=\int_0^t\psi_\beta(t-\tau)\dot{\varepsilon}_{ij}(x,\tau)\mathrm{d}\tau+\frac{1}{3}\delta_{ij}$$
$$\int_0^t[\psi_k(t-\tau)-\psi_\beta(t-\tau)]\dot{\varepsilon}_{kk}(x,\tau)\mathrm{d}\tau\tag{9.94}$$

可以看到，当弹性情况时，$\psi_k(t)=3KH(t)$，$\psi_\beta(t)=2\mu H(t)$。对式(9.93)分部积分，得

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{kk}(x,t)&=3K_\infty\varepsilon_{kk}(x,t)+\int_0^t\varepsilon_{kk}(x,t-\tau)\dot{\psi}_k(\tau)\mathrm{d}\tau\\ \sigma_{ij}(x,t)&=2\mu_\infty\varepsilon_{ij}(x,t)+\int_0^t\varepsilon_{ij}(x,t-\tau)\dot{\psi}_\beta(\tau)\mathrm{d}\tau(i\neq j)\end{aligned}\right\}\tag{9.95}$$

其中

$$\psi_k(t=0)=\psi_k(\omega=\infty)=3K_\infty,\psi_\beta(0)=2\mu_\infty$$

注意到此三维情况的本构关系中，已引入两个时间函数：体积松弛函数 $\psi_k(t)$ 与剪切松弛函数 $\psi_\beta(t)$。

同样，可引入两个蠕变函数 φ_β 和 φ_k，使应变用应力表示，有

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_{kk}(x,t)&=\frac{1}{3K_\infty}\sigma_{kk}(x,t)+\int_0^t\sigma_{kk}(x,t-\tau)\dot{\varphi}_k(\tau)\mathrm{d}\tau\\ \varepsilon_{ij}(x,t)&=\frac{1}{2\mu_\infty}\sigma_{ij}(x,t)t\int_0^t\sigma_{ij}(x,t-\tau)\dot{\varphi}_\beta(\tau)\mathrm{d}\tau,(i=j)\end{aligned}\right\}\tag{9.96}$$

也可将它们合并起来写成单一的形式，即

$$\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{x},t) = \frac{1}{2\mu_\infty}\sigma_{ij}(\boldsymbol{x},t) - \frac{\lambda_\infty}{6K_\infty\mu_\infty}\delta_{ij}\sigma_{kk}(\boldsymbol{x},t) + \int_0^t \dot{\varphi}_\beta(\tau)\sigma_{ij}(\boldsymbol{x},t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$+ \frac{1}{3}\delta_{ij}\int_0^t [\dot{\varphi}_k(\tau) - \dot{\varphi}_\beta(\tau)]\sigma_{kk}(x,t-\tau)\mathrm{d}\tau \qquad (9.97)$$

其中

$$\lambda_\infty = \frac{1}{3}(3K_\infty - 2\mu_\infty)$$

如果对式(9.94)进行分部积分，可得到与式(9.97)类似的公式，为

$$\sigma_{ij}(\boldsymbol{x},t) = 2\mu_\infty\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{x},t) + \lambda_\infty\delta_{ij}\varepsilon_{kk}(\boldsymbol{x},t) + \int_0^t \dot{\psi}_\beta(\tau)\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{x},t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$+ \frac{1}{3}\delta_{ij}\int_0^t [\dot{\psi}_k(\tau) - \dot{\psi}_\beta(\tau)]\varepsilon_{kk}(x,t-\tau)\mathrm{d}\tau \qquad (9.98)$$

§3 波在无限粘弹性介质中的传播

应用三维本构关系(9.98)及 Cauchy 几何关系，粘弹性情况的运动方程就不难推得，它的矢量形式是

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t^2} =$$

$$\alpha_\infty^2 \mathrm{grad\ div}\left\{\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) + \int_0^t \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t-\tau)\left[\frac{\dot{K}(\tau) + \frac{4}{3}\dot{\mu}(\tau)}{K_\infty + \frac{4}{3}\mu_\infty}\right]\mathrm{d}\tau\right\} -$$

$$\beta_\infty^2 \mathrm{curl\ curl}\left\{\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) + \int_0^t \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t-\tau)\frac{\dot{\mu}(\tau)}{\mu_\infty}\mathrm{d}\tau\right\} \qquad (9.99)$$

式中 $\psi_\beta(t) = 2\mu(t)$，$\psi_\beta(0) = 2\mu_\infty$，$\beta_\infty^2 = \frac{\mu_\infty}{\rho}$，$\psi_k(t) = 3K(t)$，$\psi_k(0) = 3K_\infty$，$\alpha_\infty^2 = \frac{K_\infty + \frac{4}{3}\mu_\infty}{\rho}$。运用 Fourier 变换，得到变换域上的方程

$$\tilde{\alpha}^2\mathrm{grad}(\mathrm{div}\boldsymbol{U}) - \tilde{\beta}^2\mathrm{curl}(\mathrm{curl}\ \boldsymbol{U}) + \omega^2\boldsymbol{U} = 0 \qquad (9.100)$$

式中

$$U(x,\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)e^{-i\omega t}dt,\ \lim_{t\to\infty}\frac{\partial u}{\partial t} = 0,$$

且

$$\left.\begin{aligned}
\tilde{\alpha}^2(\omega) &= \frac{1}{\rho}\left\{K_\infty + \frac{4}{3}\mu_\infty - \int_0^\infty\left[\dot{K}(t) + \frac{4}{3}\dot{\mu}(t)\right]e^{-i\omega t}dt\right\} \\
\tilde{\beta}^2(\omega) &= \frac{1}{\rho}\left[\mu_\infty + \int_0^\infty\dot{\mu}(t)e^{-i\omega t}dt\right]
\end{aligned}\right\} \quad (9.101)$$

对于地球介质，在非常高和非常低的频率段都呈现弹性特性，但高频响应具有瞬时性，因而它更能作为普通弹性体来解释。可以认为粘弹性体中与频率有关的本构参数，在 $\omega\to\infty$ 时，趋近于弹性参数值，如

$$\psi_k(0) = 3K_\infty,\psi_\beta(0) = 2\mu_\infty \quad (9.102)$$

这里 K_∞ 是弹性体积模量，μ_∞ 是弹性剪切模量。相应的波速记作 α_∞ 和 β_∞。

我们通过实值 ρ 和 ω 来定义复弹性模量、复波数和复波速，它们是

$$\left.\begin{aligned}
\tilde{\mu}(\omega) &= \mu_\infty + \int_0^\infty\dot{\mu}(t)e^{-i\omega t}dt = \mu + i\mu^* \\
\tilde{K}(\omega) &= K_\infty + \int_0^\infty\dot{K}(t)e^{-i\omega t}dt = K + iK^* \\
\tilde{\alpha}(\omega) &= \left[\frac{\tilde{K}(\omega) + \frac{4}{3}\tilde{\mu}(\omega)}{\rho}\right]^{1/2} = \alpha + i\alpha^* \\
\tilde{\beta}(\omega) &= \left[\frac{\tilde{\mu}(\omega)}{\rho}\right]^{1/2} = \beta + i\beta^*
\end{aligned}\right\}$$

(9.103)

也称 $\tilde{\mu}(\omega)$ 为动力剪切模量。动力波数为

$$\left.\begin{aligned}
&\tilde{K}_\alpha = \frac{\omega}{\tilde{\alpha}(\omega)} = K_\alpha - iK_\alpha^*, &&\tilde{K}_\beta = \frac{\omega}{\tilde{\beta}(\omega)} = K_\beta - iK_\beta^* \\
&K_\alpha^* = \gamma_\alpha(\omega) > 0, &&K_\beta^* = \gamma_\beta(\omega) > 0 \\
&K_\alpha = \frac{\omega}{c_\alpha(\omega)}, &&K_\beta = \frac{\omega}{c_\beta(\omega)}
\end{aligned}\right\}$$

(9.104)

其中

$$
\left.\begin{aligned}
c_\alpha(\omega) &= \frac{1}{\mathrm{Re}\left\{\rho/\left[\tilde{K}(\omega)+\frac{4}{3}\tilde{\mu}(\omega)\right]\right\}^{1/2}} \\
c_\beta(\omega) &= \frac{1}{\mathrm{Re}\left[\rho/\tilde{\mu}(\omega)\right]^{1/2}} \\
\gamma_\alpha(\omega) &= -\omega\mathrm{Im}\left[\frac{\rho}{\tilde{K}(\omega)+\frac{4}{3}\tilde{\mu}(\omega)}\right]^{1/2} \\
\gamma_\beta(\omega) &= -\omega\mathrm{Im}\left[\frac{\rho}{\tilde{\mu}(\omega)}\right]^{1/2}
\end{aligned}\right\} \tag{9.105}
$$

再用

$$
\frac{1}{Q_\alpha}=\frac{K^{*}+\frac{4}{3}\mu^{*}}{K+\frac{4}{3}\mu},\frac{1}{Q_\beta}=\frac{\mu^{*}}{\mu} \tag{9.106}
$$

将 Q_β^{-1} 代入式(9.103)和(9.105)中,分别得到

$$
\left.\begin{aligned}
&\tilde{\mu}(\omega)=\mu\left(1+\frac{\mathrm{i}}{Q_\beta}\right)=\mu(1+\frac{1}{Q_\beta^2})^{1/2}\exp[\mathrm{i}(\arctan Q_\beta^{-1})] \\
&c_\beta(\omega)=\sqrt{2}\left[\frac{\mu}{\rho}\right]^{1/2}\left[\left(1+\frac{1}{Q_\beta^2}\right)^{3/2}-\left(1+\frac{1}{Q_\beta^2}\right)\right]^{1/2}Q_\beta \\
&\gamma_\beta(\omega)=\omega\left(\frac{\rho}{\mu}\right)^{1/2}\left[\frac{\left(1+\frac{1}{Q_\beta^2}\right)^{-1/2}-\left(1+\frac{1}{Q_\beta^2}\right)^{-1}}{2}\right]^{1/2} \\
&\frac{\gamma_\beta(\omega)c_\beta(\omega)}{Q_\beta\omega}=\left(1+\frac{1}{Q_\beta^2}^{1/2}\right)-1,\frac{1}{Q_\beta}=\frac{2(\gamma_\beta c_\beta/\omega)}{1-(\gamma_\beta c_\beta/\omega)^2}
\end{aligned}\right\} \tag{9.107}
$$

将 Q_α^{-1} 代入式(9.103)和(9.105)中,则会得到类似的 $C_\alpha(\omega)$,$\gamma_\alpha(\omega)$ 和 $\tilde{K}_\alpha(\omega)$的表达式。

对于 Q_β 较大的情况,近似有

$$
\frac{1}{Q_\beta}\approx\frac{2\gamma_\beta(\omega)c_\beta(\omega)}{\omega} \tag{9.108}
$$

也可定义复折射率,有

$$\tilde{n}_\alpha(\omega) = \frac{\tilde{K}_\alpha}{K_\alpha(\infty)} = \frac{\alpha_\infty}{\tilde{\alpha}(\omega)}, \tilde{n}_\beta(\omega) = \frac{\tilde{K}_\beta(\omega)}{K_\beta(\infty)} = \frac{\beta_\infty}{\tilde{\beta}(\omega)} \tag{9.109}$$

其中

$$K_\alpha(\infty) = \frac{\omega}{\alpha_\infty}, K_\beta(\infty) = \frac{\omega}{\beta_\infty} \tag{9.110}$$

式(9.109)也可写成

$$\left.\begin{aligned} \tilde{n}_\alpha(\omega) &= \frac{\alpha_\infty}{c_\alpha(\omega)} - \mathrm{i}\,\frac{\alpha_\infty}{\omega}\gamma_\alpha(\omega) \\ \tilde{n}_\beta(\omega) &= \frac{\beta_\infty}{c_\beta(\omega)} - \mathrm{i}\,\frac{\beta_\infty}{\omega}\gamma_\beta(\omega) \end{aligned}\right\} \tag{9.111}$$

它们也有另一种形式

$$\tilde{n}_\alpha(\omega) = \left[\frac{K_\infty + \frac{4}{3}\mu_\infty}{\tilde{K}(\omega) + \frac{4}{3}\tilde{\mu}(\omega)}\right]^{1/2} = \left[1 - \int_0^\infty B_\alpha(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t\right]^{-1/2} \tag{9.112}$$

$$\tilde{n}_\beta(\omega) = \left[\frac{\mu_\infty}{\tilde{\mu}(\omega)}\right]^{1/2} = \left[1 - \int_0^\infty B_\beta(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t\right]^{-1/2} \tag{9.113}$$

这里

$$\left.\begin{aligned} B_\alpha(t) &= -\frac{\dot{K}(t) + \frac{4}{3}\dot{\mu}(t)}{K_\infty + \frac{4}{3}\mu_\infty} > 0 \\ B_\beta(t) &= -\frac{\dot{\mu}(t)}{\mu_\infty} > 0 \end{aligned}\right\} \tag{9.114}$$

若将上述的 P、S 波参数合起来，构成统一的形式，如

$$\int_0^\infty B(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t = M(\omega) - \mathrm{i}H(\omega) \tag{9.115}$$

则有

$$\frac{1}{Q(\omega)} = \frac{H(\omega)}{1 - M(\omega)} = \frac{\int_0^{\infty} B(t)\sin\omega t\mathrm{d}t}{1 - \int_0^{\infty} B(t)\cos\omega t\mathrm{d}t} \tag{9.116}$$

及

$$\tilde{n}(\omega) = [1 - M(\omega)]^{-1/2}\left(1 + \frac{\mathrm{i}}{Q}\right)^{-1/2} \tag{9.117}$$

在高频时，$M(\omega)$和 $H(\omega)$都趋于零，因而 $1/Q(\omega)$也很小，这时可得下列近似公式：

$$\left.\begin{aligned} &\gamma(\omega) \approx \frac{\omega}{2c_{\infty}}H(\omega), c(\omega) \approx c_{\infty}\left(1 + \frac{3}{8Q^2}\right) \\ &\tilde{n}(\omega) \approx 1 - \frac{\mathrm{i}}{2Q}, \qquad \frac{1}{Q(\omega)} \approx \frac{2\gamma(\omega)c_{\infty}}{\omega} \ll 1 \end{aligned}\right\} \tag{9.118}$$

这里 c_{∞}代表 α_{∞}或 β_{∞}。

在处理粘弹性问题时，最重要的方法是相当性原理的应用。试看粘弹性介质的谱 Navier 方程(9.100)，它在形式上与线性弹性介质中的 Navier 方程相当，只是用复模量替代了 Lamé 常数，因而弹性介质中的 Navier 方程的任何形式解都给粘弹性问题提供了一个相当解。这就是相当性原理的实质性内容。

举一个准静态问题作为实例。若作用在粘弹性材料上的外力是缓慢变化的，即为准静态问题，此时惯性力项可略去不计，这样，Navier 方程的时间关系通过蠕变函数及松弛函数表现出来。在数学上它相当于弹性情况下的静力平衡方程。只是对于粘弹性材料，弹性常数与频率有关，方程的解会包含有作用力谱函数 $f(\omega)$及 $\tilde{\mu}(\omega)$、$\tilde{K}(\omega)$。这种考虑也可应用于脉冲形式的荷载，当然只研究系统的长时间特征，而不是瞬时反应，再进行反变换就可得到时间域上的显化形式解。如下问题也称为粘弹性介质的 Boussinesq 问题，如图 9.12 所示。在一半无限空间，其表面是 xy 平面，z 轴指向空间内部。在表面坐标原点处作用一个集中力$(\frac{F_0}{\rho})\boldsymbol{k}$，那么，以位移形式表示的静态

平衡方程为

$$\nabla^2 \boldsymbol{u} + \frac{1}{1-2\nu}\mathrm{grad}(\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}) = -\boldsymbol{k}\,\frac{F_0}{\mu}\delta(x)\delta(y) \quad (9.119)$$

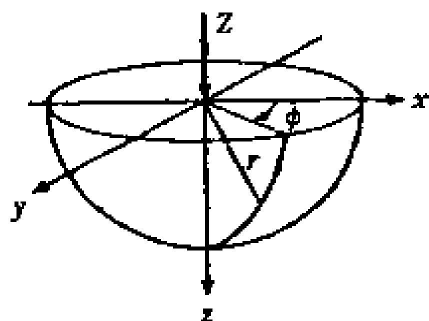


图 9.12 粘弹性介质的 Boussinesq 问题

在弹性情况下，方程的解为

$$\left.\begin{aligned} u_x &= \frac{F_0}{4\pi\mu}\left[\frac{z}{R^3} - \frac{1-2\nu}{R(R+z)}\right]x \\ u_y &= \frac{F_0}{4\pi\mu}\left[\frac{z}{R^3} - \frac{1-2\nu}{R(R+z)}\right]y \\ u_z &= \frac{F_0}{4\pi\mu}\left[\frac{z^2}{R^3} + \frac{2(1-\nu)}{R}\right] \end{aligned}\right\} \quad (9.120)$$

其应力分量为

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{rz} &= -\frac{3F_0}{2\pi}\frac{rz^2}{R^5}, \sigma_{zz} = -\frac{3F_0}{2\pi}\frac{z^3}{R^5} \\ \sigma_{rr} &= \frac{F_0}{2\pi}\left[-\frac{3r^2z}{R^5} + \frac{1-2\nu}{R(R+z)}\right] \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \frac{1-2\nu}{2\pi}F_0\left[\frac{z}{R^3} - \frac{1}{R(R+z)}\right] \\ \sigma_{r\varphi} &= \sigma_{z\varphi} = 0 \end{aligned}\right\} \quad (9.121)$$

对于粘弹性情况，作用力 $F(t)=F_0H(t)$，按相当性原理，在频率域的解（以 σ_{rr} 为例）有

$$\tilde{\sigma}_{rr}(r,z;\omega) = \frac{\tilde{F}(\omega)}{2\pi}\left[\frac{1-2\tilde{\nu}(\omega)}{R(R+z)} - \frac{3r^2z}{R^5}\right] \tag{9.122}$$

其中

$$\tilde{\nu}(\omega) = \frac{\tilde{\lambda}(\omega)}{2[\tilde{\lambda}(\omega)+\tilde{\mu}(\omega)]} \tag{9.123}$$

作反变换，得

$$\sigma_{rr}(r,z;t) = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{G(t)}{R(R+z)} - \frac{3r^2z}{R^5}F(t)\right] \tag{9.124}$$

这里

$$\left.\begin{aligned} G(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{F}(\omega)[1-2\tilde{\nu}(\omega)]e^{i\omega t}d\omega = \int_0^t F(t-\tau)\xi(\tau)d\tau \\ \xi(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[1-2\tilde{\nu}(\omega)]e^{i\omega t}d\omega \end{aligned}\right\} \tag{9.125}$$

如果介质的剪切粘弹性特征是 Kelvin-Voigt 型，而体积膨胀是弹性的，这种情况下有

$$\left.\begin{aligned} \tilde{\mu}(\omega) &= \mu + i\omega\eta \\ \tilde{K}(\omega) &= K \\ 1-2\tilde{\nu}(\omega) &= \frac{3(\mu+i\omega\eta)}{3K+\mu+i\omega\eta} \end{aligned}\right\} \tag{9.126}$$

代入式(9.125)中，得

$$\begin{aligned} G(t) &= \frac{F_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{i\omega}\,\frac{3(\mu+i\omega\eta)}{3K+\mu+i\omega\eta}e^{i\omega t}d\omega \\ &= \frac{3F_0}{3K+\mu}\left[\mu + 3Ke^{-\frac{(3K+\mu)}{\eta}t}\right]H(t) \end{aligned} \tag{9.127}$$

接着我们讨论平面波问题。同样，动力学方程(9.100)也可简化到求解 Helmholtz 方程，即

$$\nabla^2\psi + \tilde{K}(\omega)\psi = 0 \tag{9.128}$$

式中 $\tilde{K}(\omega)=\tilde{K}_\alpha(\omega)$ 或 $\tilde{K}_\beta(\omega)$。因而方程(9.100)的三个独立矢量解

是$\nabla\psi_\alpha$,curl($\boldsymbol{b}\psi_\beta$)和 curl curl($\boldsymbol{b}\psi_\beta$)。

Helmcholtz 方程(9.128)的一般解代表一平面波,设它的形式为

$$\psi = Be^{i\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{x}} \tag{9.129}$$

这里

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{P} - i\boldsymbol{A} \tag{9.130}$$

称 $\boldsymbol{P}$ 为传播矢量,$\boldsymbol{A}$ 为衰减矢量,波的相速度是 $\omega/|\boldsymbol{P}|$。$\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{A}$ 不一定是平行的,它们之间的夹角为 χ,将解(9.129)代入方程(9.128)中,有

$$\begin{aligned}(\tilde{K}(\omega))^2 &= (K - iK^*)^2 = |\boldsymbol{K}|^2 \\ &= |\boldsymbol{P}|^2 - |\boldsymbol{A}|^2 - 2i|\boldsymbol{P}||\boldsymbol{A}|\cos\chi\end{aligned} \tag{9.131}$$

矢量 $\boldsymbol{P}$ 垂直于等相面,有 $\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{x}=\text{const}$,而矢量 $\boldsymbol{A}$ 垂直于等幅面,有 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x}=\text{const}$,如果 $\chi=0$,则称为均匀平面波,否则称为不均匀平面波。由式(9.131)可知

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{Re}(\tilde{K}^2) &= K^2 - (K^*)^2 = |\boldsymbol{P}|^2 - |\boldsymbol{A}|^2 \\ \operatorname{Im}(\tilde{K}^2) &= -2KK^* = -2|\boldsymbol{P}||\boldsymbol{A}|\cos\chi\end{aligned}\right\} \tag{9.132}$$

令

$$\begin{aligned}\frac{\operatorname{Im}(\tilde{K}^2)}{\operatorname{Re}(\tilde{K}^2)} &= -\frac{2(K^*/K)}{1-(K^*/K)^2} \\ &= -\frac{2|\boldsymbol{A}|/|\boldsymbol{P}|}{1-|\boldsymbol{A}|^2/|\boldsymbol{P}|^2}\cos\chi = -\frac{1}{Q}\end{aligned} \tag{9.133}$$

由于在传播方向上的振幅应为有限值,故得

$$0 \leqslant \chi \leqslant \frac{\pi}{2} \tag{9.134}$$

在弹性介质中,$\operatorname{Im}(\tilde{K}^2)=0$,从式(9.132)中可知,有 $A=0$ 或者 $\chi=\frac{\pi}{2}$。而在粘弹性介质中,平面波等相面速度为

$$v = \frac{\omega}{|\boldsymbol{P}|^2}\boldsymbol{P} \tag{9.135}$$

由方程(9.132)可解得

$$|\boldsymbol{P}| = \left[\frac{1}{2}\mathrm{Re}(\tilde{K}^2)\right]^{1/2}\left[\left(1 + \frac{1}{Q^2\cos\chi}\right)^{1/2} + 1\right]^{1/2} \tag{9.136}$$

$$|\boldsymbol{A}| = \left[\frac{1}{2}\mathrm{Re}(\tilde{K}^2)\right]^{1/2}\left[\left(1 + \frac{1}{Q^2\cos^2\chi}\right)^{1/2} - 1\right]^{1/2} \tag{9.137}$$

当介质已知时，也就是给定 $\tilde{K}^2(\omega)$ 及 χ，由式(9.136)和(9.137)确定 $|\boldsymbol{P}|$、$|\boldsymbol{A}|$，就可得到势函数 ψ，再用 ψ_a 和 ψ_β 去计算 Hansen 矢量 $\boldsymbol{L}$、$\boldsymbol{M}$、$\boldsymbol{N}$，就可确定质点运动。无论是 P 波还是 S 波，其质点运动都是椭圆形的。

再来考虑平面粘弹性波的能量。设位移随时间为谐波形式，即 $\boldsymbol{U}=\boldsymbol{U}_0e^{i\omega t}=\boldsymbol{u}+i\boldsymbol{u}^*$，则粘弹性介质中的波动方程有

$$\left(\tilde{K}+\frac{1}{3}\tilde{\mu}\right)\nabla\Theta + \tilde{\mu}\nabla^2\boldsymbol{U} = \rho\frac{\partial^2\boldsymbol{U}}{\partial t^2} \tag{9.138}$$

其中 $\Theta=\mathrm{div}\boldsymbol{U}=\theta+i\theta^*$，$\tilde{K}(\omega)=K+iK^*$，$\tilde{\mu}=\mu+i\mu^*$，且 ρ 是实数，并有 $\dot{\boldsymbol{u}}=-\omega\boldsymbol{u}^*$，$\mathrm{Re}\{\tilde{\mu}(\omega)\nabla^2\boldsymbol{U}\}=\mu\nabla^2\boldsymbol{u}+\frac{1}{\omega}\mu^*\nabla^2\dot{\boldsymbol{u}}$，这样，波动方程(9.138)的实部是

$$\left(K+\frac{1}{3}\mu\right)\nabla\theta + \mu\nabla^2\boldsymbol{u} - \frac{1}{\omega}\left\{\left(K^* - \frac{1}{3}\mu^*\right)\nabla\dot{\theta} + \mu^*\nabla^2\dot{\boldsymbol{u}}\right\} = \rho\ddot{\boldsymbol{u}} \tag{9.139}$$

在方程两边乘以 $\dot{\boldsymbol{u}}$，并利用如下关系

$$\dot{\boldsymbol{u}}\cdot\nabla\theta = \mathrm{div}(\theta\dot{\boldsymbol{u}}) - \theta\mathrm{div}\dot{\boldsymbol{u}} = \mathrm{div}(\theta\dot{\boldsymbol{u}}) - \frac{1}{2}\frac{\partial\theta^2}{\partial t}$$

$$= (\theta\dot{u}_k)_{,k} - \frac{1}{2}\frac{\partial\theta^2}{\partial t} \tag{9.140}$$

$$\dot{\boldsymbol{u}}\cdot\nabla^2\boldsymbol{u} = (u_{i,j}\dot{u}_j)_{,i} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(u_{i,j}u_{j,i}) \tag{9.141}$$

再对整个体积 V 作积分，最后应用 Gauss 定理，得

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V H\mathrm{d}V + \int_V D\mathrm{d}V = -\int_S \Sigma_k \eta_k \mathrm{d}S \qquad (9.142)$$

S 是体积 V 的边界表面，$\hat{n}$ 是它的单位外法线。式(9.142)中

$$\left.\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}\left[\rho\dot{u}_k\dot{u}_k + \left(K + \frac{1}{3}\mu\right)\theta^2 + \mu(u_{i,j}u_{j,i})\right] \\ D &= \frac{1}{\omega}\left[\left(K^* + \frac{1}{3}\mu^*\right)\dot{\theta}^2 + \mu^*(\dot{\mu}_{i,j}\dot{u}_{j,i})\right] \end{aligned}\right\} \qquad (9.143)$$

及

$$\left.\begin{aligned} \Sigma_i &= \Sigma_i^{(1)} + \Sigma_i^{(2)} \\ \Sigma_i^{(1)} &= -\left[\left(K + \frac{1}{3}\mu\right)\theta\dot{u}_i + \mu u_{i,j}\dot{u}_j\right] \\ \Sigma_i^{(2)} &= -\frac{1}{\omega}\left[\left(K^* + \frac{1}{3}\mu^*\right)\dot{\theta}\dot{u}_i + \mu^*\dot{u}_{i,j}\dot{u}_j\right] \end{aligned}\right\} \qquad (9.144)$$

H 是单位体积总机械能，D 是单位体积机械能耗散率，$\boldsymbol{\Sigma}$ 是能流密度，它分为两部分，$\boldsymbol{\Sigma}^{(1)}$是界面 S 内外介质间的功率交换，而 $\boldsymbol{\Sigma}^{(2)}$是通过界面 S 的能量对流速率。由热力学第二定律知，耗散能的总量是随时间而增加的，而式(9.143)中，$\dot{\theta}^2$ 和 $\dot{u}_{i,j}\dot{u}_{j,i}$为非负值，故要求

$$\mu^*(\omega) \geqslant 0, K^*(\omega) \geqslant 0 \qquad (9.145)$$

计算式(9.143)中的 H 和 D，必须给出 $\boldsymbol{u}$ 的表达式，如给出 P 波势

$$\psi_\alpha = B_\alpha \mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}_\alpha\cdot\boldsymbol{x}+\mathrm{i}(\omega t-\boldsymbol{P}_\alpha\cdot\boldsymbol{x})} \qquad (9.146)$$

则相应的实位移是

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_\mathrm{P} &= \mathrm{Re}\{\boldsymbol{U}_\mathrm{P}\} = \mathrm{Re}\{\nabla\psi_\alpha\} = \mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}_\alpha\cdot\boldsymbol{x}}\mathrm{Re}\left\{-\mathrm{i}\boldsymbol{K}_\alpha B_\alpha \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-\boldsymbol{P}_\alpha\cdot\boldsymbol{x})}\right\} \\ &= \mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}_\alpha\cdot\boldsymbol{x}}|B_\alpha\tilde{K}_\alpha(\omega)|\mathrm{Re}\left\{\frac{\boldsymbol{P}_\alpha - \mathrm{i}\boldsymbol{A}_\alpha}{\tilde{K}_\alpha(\omega)}\cdot\right. \\ &\quad \left.\exp\left[\mathrm{i}\left(\omega t - \boldsymbol{P}_\alpha\cdot\boldsymbol{x} + \arg(\tilde{K}_\alpha B_\alpha) - \frac{\pi}{2}\right)\right]\right\} \end{aligned} \qquad (9.147)$$

如果引入下列符号

$$\left.\begin{aligned}\zeta(t) &= \omega t - \boldsymbol{P}_\alpha \cdot \boldsymbol{x} + \arg(\tilde{K}_\alpha B_\alpha) - \frac{\pi}{2} \\ W_\alpha &= |B_\alpha \tilde{K}_\alpha(\omega)| e^{-A_\alpha \cdot x} \\ \tilde{K}_\alpha(\omega) &= K_\alpha - iK_\alpha^*\end{aligned}\right\} \tag{9.148}$$

及矢量

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{e}_1 &= \frac{K_\alpha \boldsymbol{P}_\alpha + K_\alpha^* \boldsymbol{A}_\alpha}{|\tilde{K}_\alpha|^2} \\ \boldsymbol{e}_2 &= \frac{-K_\alpha^* \boldsymbol{P}_\alpha + K_\alpha \boldsymbol{A}_\alpha}{|\tilde{K}_\alpha|^2}\end{aligned}\right\} \tag{9.149}$$

则式(9.147)变为如下简单形式

$$\boldsymbol{u}_\mathrm{P} = W_\alpha[\boldsymbol{e}_1 \cos\zeta(t) + \boldsymbol{e}_2 \sin\zeta(t)] \tag{9.150}$$

很容易推得 $\boldsymbol{e}_1$ 和 $\boldsymbol{e}_2$ 之间有如下关系

$$\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 = 0, \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_2 = 1 \tag{9.151}$$

式(9.150)表明,P 波的质点运动是在 $\boldsymbol{P}_\alpha$ 和 $\boldsymbol{A}_\alpha$ 平面上的椭圆,它的长轴是 $W_\alpha|\boldsymbol{e}_1|$,短轴是 $W_\alpha|\boldsymbol{e}_2|$,转动方向是从 $\boldsymbol{P}_\alpha$ 到 $\boldsymbol{A}_\alpha$,椭圆长轴和传播方向的夹角是

$$\cos\eta_\alpha = \frac{\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{P}_\alpha}{|\boldsymbol{e}_1||\boldsymbol{P}_\alpha|} = \frac{K_\alpha}{|\tilde{K}_\alpha|}\left[1 + \frac{(K_\alpha^*)^2}{|\boldsymbol{P}_\alpha|^2}\right]^{1/2} \tag{9.152}$$

对于 S 波,有解

$$\boldsymbol{u}_s = \mathrm{Re}\{\mathrm{curl}(\hat{\boldsymbol{b}}\psi_\beta)\} \tag{9.153}$$

其中

$$\mathrm{div}(\hat{\boldsymbol{b}}\psi_\beta) = -(\boldsymbol{A}_\beta + i\boldsymbol{P}_\beta) \cdot \hat{\boldsymbol{b}}\psi_\beta = 0 \tag{9.154}$$

式中 $\hat{\boldsymbol{b}}$ 是垂直于 $\boldsymbol{A}_\beta$ 与 $\boldsymbol{P}_\beta$ 的一个实的单位矢量。同样也可将 $\boldsymbol{u}_s$ 简化为

$$\boldsymbol{u}_s = W_\beta[\boldsymbol{g}_1 \cos\xi(t) + \boldsymbol{g}_2 \sin\xi(t)] \tag{9.155}$$

式中

$$
\left.\begin{aligned}
\xi(t) &= \omega t - \boldsymbol{P}_\beta \cdot \boldsymbol{x} + \arg(\tilde{K}_\beta B_\beta) + \frac{\pi}{2} \\
W_\beta &= |B_\beta \tilde{K}_\beta(\omega)| e^{-\boldsymbol{A}_\beta \cdot \boldsymbol{x}} \\
\tilde{K}_\beta(\omega) &= K_\beta - iK_\beta^*
\end{aligned}\right\} \tag{9.156}
$$

及

$$
\left.\begin{aligned}
\boldsymbol{g}_1 &= \frac{K_\beta \boldsymbol{P}_\beta + K_\beta^* \boldsymbol{A}_\beta}{|\tilde{K}_\beta|^2} \times \hat{\boldsymbol{b}} \\
\boldsymbol{g}_2 &= \frac{-K_\beta^* \boldsymbol{P}_\beta + K_\beta \boldsymbol{A}_\beta}{|\tilde{K}_\beta|^2} \times \hat{\boldsymbol{b}}
\end{aligned}\right\} \tag{9.157}
$$

且
$$
\boldsymbol{g}_1 \cdot \boldsymbol{g}_2 = 0, \quad \boldsymbol{g}_1 \cdot \boldsymbol{g}_1 - \boldsymbol{g}_2 \cdot \boldsymbol{g}_2 = 1 \tag{9.158}
$$

这样，S 波的运动也是一个在 $\boldsymbol{P}_\beta$ 和 $\boldsymbol{A}_\beta$ 平面上的椭圆，它的长轴是 $W_\beta|\boldsymbol{g}_1|$，短轴是 $W_\beta|\boldsymbol{g}_2|$，转动方向是从 $\boldsymbol{P}_\beta$ 到 $\boldsymbol{A}_\beta$，矢量 $\boldsymbol{P}_\beta \times \hat{\boldsymbol{b}}$ 和长轴 $\boldsymbol{g}_1$ 的夹角是

$$
\cos\eta_\beta = \frac{(\boldsymbol{P}_\beta \times \hat{\boldsymbol{b}}) \cdot \boldsymbol{g}_1}{|\boldsymbol{P}_\beta \times \hat{\boldsymbol{b}}||\boldsymbol{g}_1|} = \frac{K_\beta}{|\tilde{K}_\beta|}\left[1 + \frac{(K_\beta^*)^2}{|\boldsymbol{P}_\beta|^2}\right] \tag{9.159}
$$

对于均匀波（$\chi_\alpha=0, \chi_\beta=0$），有

$$
\left.\begin{aligned}
|\boldsymbol{P}_\alpha| = K_\alpha, |\boldsymbol{A}_\alpha| = K_\alpha^*, |\boldsymbol{e}_2| = 0, \eta_\alpha = 0 \\
|\boldsymbol{P}_\beta| = K_\beta, |\boldsymbol{A}_\beta| = K_\beta^*, |\boldsymbol{g}_2| = 0, \eta_\beta = 0
\end{aligned}\right\} \tag{9.160}
$$

这时，椭圆退化为直线。

知道了 P、S 波的质点运动之后，代入式(9.143)和(9.144)中，同时取一个周期 $T=\frac{2\pi}{\omega}$ 的平均值，则对于 P、S 波有通式

$$
\left.\begin{aligned}
\langle H_1 \rangle &= \langle\text{动能密度}\rangle = \frac{1}{4}\rho\omega^2|B|^2 e^{-2\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x}}[|\boldsymbol{P}|^2 + |\boldsymbol{A}|^2] \\
\langle H_2 \rangle &= \langle\text{势能密度}\rangle = \frac{1}{4}|B|^2 e^{-2\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x}} \times \\
&\quad [\rho\omega^2(|\boldsymbol{P}|^2 - |\boldsymbol{A}^2|) + 4\mu|\boldsymbol{P} \times \boldsymbol{A}|^2] \\
\langle H \rangle &= \langle H_1 + H_2 \rangle = |B|^2 e^{-2\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x}}\left[\frac{1}{2}\rho\omega^2|\boldsymbol{P}|^2 + \mu|\boldsymbol{P} \times \boldsymbol{A}|^2\right]
\end{aligned}\right\} \tag{9.161}
$$

$$\langle D\rangle = \omega|B|^2 e^{-2A\cdot x}[\rho\omega^2(\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{A}) + 2\mu^*|\boldsymbol{P}\times\boldsymbol{A}|^2] \tag{9.162}$$

及

$$\langle\boldsymbol{\Sigma}\rangle = \omega|B|^2 e^{-2A\cdot x}\left[\frac{1}{2}\rho\omega^2\boldsymbol{P} + (\boldsymbol{P}\times\boldsymbol{A})\times(\mu^*\boldsymbol{P} - \mu\boldsymbol{A})\right] \tag{9.163}$$

上述平均值之间有如下简单的关系

$$\langle H\rangle = \frac{1}{\omega}\boldsymbol{P}\cdot\langle\boldsymbol{\Sigma}\rangle,\langle D\rangle = 2\boldsymbol{A}\cdot\langle\boldsymbol{\Sigma}\rangle \tag{9.164}$$

这些表明，平均能量密度由传播方向上的平均能流密度的分量确定，能量耗散密度的平均速率与最大衰减方向上平均能流有关。由这些表达式可导出能量速度为

$$\boldsymbol{V}_E = \frac{\langle\boldsymbol{\Sigma}\rangle}{\langle H\rangle} = \frac{\omega\langle\boldsymbol{\Sigma}\rangle}{\boldsymbol{P}\cdot\langle\boldsymbol{\Sigma}\rangle} \tag{9.165}$$

对于均匀波，因 $\boldsymbol{P}\times\boldsymbol{A}=0$ 因而有

$$\left.\begin{aligned}
&\langle\boldsymbol{\Sigma}\rangle = \frac{1}{2}\rho\omega^3|B|^2 e^{-2A\cdot x}\boldsymbol{P}\\
&\langle H\rangle = \frac{1}{2}\rho\omega^2|B|^2 e^{-2A\cdot x}|\boldsymbol{P}|^2\\
&\boldsymbol{V}_E = \frac{\omega}{|\boldsymbol{P}|^2}\boldsymbol{P}\\
&\langle D\rangle = \rho\omega^3|B|^2 e^{-A\cdot x}|\boldsymbol{P}||\boldsymbol{A}|\\
&\langle 2H_2\rangle = \frac{1}{2}\rho\omega^2|B|^2 e^{-2A\cdot x}(|\boldsymbol{P}|^2 - |\boldsymbol{A}|^2)\\
&\frac{1}{\omega}\frac{\langle D\rangle}{\langle 2H\rangle} = \frac{|\boldsymbol{A}|}{|\boldsymbol{P}|}
\end{aligned}\right\} \tag{9.166}$$

由此可知，对于弹性介质中的平面波（包括非均匀平面波）及粘弹性介质中的均匀波，它们的最大能流方向为等相面的传播方向。但对于粘弹性介质中的非均匀波，这两个方向不一定是一致的。至于 Q^{-1}，按定义它是一个周期中的峰值能量密度，在现在情况下，是势能密度的最大值，即为 $(H_2)_{\max}$。每单位时间、单位体积的平均耗散能量是 $\langle D\rangle$，因而一周期内单位体积内总耗散能是 $T\langle D\rangle$。因此可有

$$\frac{1}{Q}=\frac{1}{2\pi}\frac{T\langle D\rangle}{(H_2)_{\max}}=\frac{\rho\omega^2(\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{A})+2\mu^*|\boldsymbol{P}\times\boldsymbol{A}|^2}{\frac{1}{2}\rho\omega^2(|\boldsymbol{P}|^2-|\boldsymbol{A}|^2)+2\mu|\boldsymbol{P}\times\boldsymbol{A}|^2}\tag{9.167}$$

在地壳和地幔中传播的均匀地震波，有

$$|\boldsymbol{A}|^2\ll|\boldsymbol{P}|^2\tag{9.168}$$

因此，式(9.167)可简化为

$$Q_\alpha^{-1}\approx 2\frac{|\boldsymbol{A}_\alpha|}{|\boldsymbol{P}_\alpha|}=\frac{2K_\alpha^*}{K_\alpha},Q_\beta^{-1}\approx 2\frac{|\boldsymbol{A}_\beta|}{|\boldsymbol{P}_\beta|}=\frac{2K_\beta^*}{K_\beta}\tag{9.169}$$

考虑式(9.103)关系，若 K_β^*/K_β 是小量，则也包含 μ^*/μ 和 β^*/β 是小量，对 $\tilde{\beta}(\omega)$ 展成 (μ^*/μ) 的幂级数，则有

$$\tilde{\beta}(\omega)=\left(\frac{\mu}{\rho}\right)^{1/2}\left[1+\mathrm{i}\frac{\mu^*}{2\mu}\right]=\beta\left(1+\mathrm{i}\frac{\mu^*}{2\mu}\right)$$

相应地有

$$\tilde{K}_\beta(\omega)=\frac{\omega}{\tilde{\beta}(\omega)}=\frac{\omega}{\beta}\left(1-\mathrm{i}\frac{\mu^*}{2\mu}\right)=K_\beta-\mathrm{i}K_\beta^*=\frac{\omega}{c_\beta(\omega)}-\mathrm{i}\gamma_\beta(\omega)$$

取同阶小量，得

$$Q_\beta^{-1}=\frac{2K_\beta^*}{K_\beta}=\frac{\mu^*}{\mu}=\frac{2\beta^*}{\beta}\tag{9.170}$$

及

$$\left.\begin{aligned}&\beta(\omega)=c_\beta(\omega)=\left(\frac{\mu}{\rho}\right)^{1/2},\beta^*=\left(\frac{\beta}{2\mu}\right)\mu^*,\gamma_\beta(\omega)=\frac{\omega\mu^*}{2\beta\mu}\\&\tilde{\beta}(\omega)=\beta(\omega)\left[1+\frac{\mathrm{i}}{2Q_\beta(\omega)}\right],\tilde{K}_\beta(\omega)=K_\beta\left(1-\frac{\mathrm{i}}{2Q_\beta(\omega)}\right)\end{aligned}\right\}\tag{9.171}$$

同样也可得到

$$Q_\alpha^{-1}=\frac{2K_\alpha^*}{K_\alpha}=\frac{K^*+\frac{4}{3}\mu^*}{K+\frac{4}{3}\mu}=\frac{2\alpha^*}{\alpha}\tag{9.172}$$

及

$$\left.\begin{aligned}
\alpha(\omega)=c_a(\omega)=\left\{\frac{K+\frac{4}{3}}{\rho}\right\}^{1/2},\gamma_a(\omega)=\frac{\omega}{2\alpha}\cdot\frac{K^*+\frac{4}{3}\mu^*}{K+\frac{4}{3}\mu}\\
\tilde{\alpha}(\omega)=\alpha(\omega)\left[1+\frac{\mathrm{i}}{2Q_a(\omega)}\right],\tilde{K}_a(\omega)=K_a\left(1-\frac{\mathrm{i}}{2Q_a(\omega)}\right)
\end{aligned}\right\}\tag{9.173}$$

也有

$$\frac{Q_\beta}{Q_\alpha}=\left[\frac{\beta(\omega)}{\alpha(\omega)}\right]^2\left[\frac{4}{3}+\frac{K^*}{\mu^*}\right]=\left(\frac{\beta_\infty}{\alpha_\infty}\right)^2\left(\frac{4}{3}+\frac{K^*}{\mu^*}\right)\tag{9.174}$$

有时也可用体积耗散参数

$$Q_K^{-1}=\frac{K^*}{K}\tag{9.175}$$

它与Q_α、Q_β有如下关系

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{Q_\alpha}=\frac{L}{Q_\beta}+\frac{1-L}{Q_K},L=\frac{4}{3}\left(\frac{\beta(\omega)}{\alpha(\omega)}\right)^2\\
\text{或}\quad\frac{1+\frac{4}{3}(\mu/K)}{Q_\alpha}=\frac{1}{Q_K}+\frac{4}{3}\left(\frac{\mu}{K}\right)\frac{1}{Q_\beta}
\end{aligned}\right\}\tag{9.176}$$

观测 P、S 波的相对阻尼可得到这样的结论，对于同一频率，在相同深度，P 波比 S 波的衰减值小。这可解释为在地幔中，体积形变能量耗损小于剪切能量耗损，即有 $0\leqslant K^*\leqslant\mu^*$。由式(9.171)和(9.173)知

$$\frac{\gamma_\beta}{\gamma_a}=\begin{cases}\frac{3}{4}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3 & \text{当}K^*=0\qquad(\text{上限})\\ \frac{3}{7}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3 & \text{当}K^*=\mu^*\qquad(\text{下限})\end{cases}\tag{9.177}$$

地幔速度比(α/β)约为 1.84，若所有耗损都由剪切引起，则 Q_α 相当于 Q_β 的 2.4～2.6 倍，因而在某一周期内，剪切波沿射线衰减会比 P 波快约 4.6 倍(按式(9.177))。由于要求密度是实值，因而略去了惯性耗损。如果密度也是复值，有 $\tilde{\rho}=\rho+\mathrm{i}\rho^*$，且假设 $0<\rho^*/\rho\ll1$，则有

$$\frac{\mu+i\mu^*}{\rho+i\rho^*}\approx\frac{\mu}{\rho}\left[1+i\left(\frac{\mu^*}{\mu}-\frac{\rho^*}{\rho}\right)\right]$$

也有

$$\frac{2K_\beta^*}{K_\beta}=\frac{\mu^*}{\mu}-\frac{\rho^*}{\rho} \tag{9.178}$$

同样可得

$$\frac{2K_\alpha^*}{K_\alpha}=\frac{K^*+\frac{4}{3}\mu^*}{K+\frac{4}{3}\mu}-\frac{\rho^*}{\rho} \tag{9.179}$$

式(9.178)和(9.179)可写成

$$\frac{1}{Q_\beta}=\frac{1}{Q_\mu}-\frac{1}{Q_\rho},\quad \frac{1}{Q_\alpha}=\frac{L}{Q_\mu}+\frac{1-L}{Q_K}-\frac{1}{Q_\rho} \tag{9.180}$$

其中

$$\frac{1}{Q_\rho}=\frac{\rho^*}{\rho},\quad \frac{1}{Q_\mu}=\frac{\mu^*}{\mu} \tag{9.181}$$

式(9.180)是由介质的刚性、体积模量和密度等耗散引起的总阻尼。

§4 粘弹性介质中的因果律与频散关系

不论物理吸收机制如何，由滞弹性引起的频散应具有因果性。因果律认为，在一物理系统中，在有输入之前，不应该有输出。例如在信号传播时，若在 $t=0$ 时刻给予信号，则在距离 $x=ct$（c 为信号在介质中的传播速度）处，在时刻 t 之前信号不可能到达。由于因果律的限制，使滞弹性介质中的复传播函数的实部与虚部存在一定的关系。例如一维问题的本构关系

$$\varepsilon(t)=\int_0^t\sigma(\tau)\dot{\varphi}(t-\tau)\mathrm{d}\tau+\varepsilon_\infty\frac{\sigma(t)}{\sigma_0} \tag{9.182}$$

表示在 t 时刻的应变 $\varepsilon(t)$ 是由整个应力 $\sigma(t)$ 从开始到 t 时刻的线性叠加所引起，它必定含有线性性质和因果性原理，其中 $\sigma(t)$ 是输入，$\varepsilon(t)$ 是输出，$\dot{\varphi}(t)$ 是响应函数。这个本构关系的因果性也被带入滞弹性介质的运动方程中。

在滞弹性介质中传播的平面纵波，其波动方程为

$$\frac{d^2U}{dx^2}+\frac{\omega^2}{c_\infty^2}\tilde{n}^2U=0 \tag{9.183}$$

这里的折射率 $\tilde{n}(\omega)$ 与相速度 $c(\omega)$、衰减系数 $\gamma(\omega)$ 和蠕变函数的速率 $\dot{\varphi}(t)$ 有关，有

$$\left.\begin{aligned}\tilde{n}(\omega)&=[1+s(\omega)]^{1/2}=[1+R(\omega)]^{1/2}\left[1-\frac{i}{Q(\omega)}\right]^{1/2}\\&=\frac{c_\infty}{c(\omega)}-i\frac{c_\infty}{\omega}\gamma(\omega)\\s(\omega)&=Y_\infty\int_0^\infty\dot{\varphi}(t)e^{-i\omega t}dt=R(\omega)-iX(\omega)\end{aligned}\right\} \tag{9.184}$$

这里 Y_∞ 是单位应变状态下的松弛模量

$$\frac{1}{Q(\omega)}=\frac{X(\omega)}{1+R(\omega)}=\frac{\int_0^\infty\dot{\varphi}(t)\sin\omega t dt}{Y_\infty^{-1}+\int_0^\infty\dot{\varphi}(t)\cos\omega t dt} \tag{9.185}$$

衰减函数 $\gamma(\omega)$ 由衰减的物理机制确定，再由它确定速度函数 $c(\omega)$。若有起始条件

$$u(0,t)=f(t)=\frac{u_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{i\omega t}d\omega \tag{9.186}$$

则方程(9.183)在时间域的解为

$$u(x,t)=\frac{u_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)\exp\left\{i\omega\left[t-\frac{x}{c_\infty}\tilde{n}(\omega)\right]\right\}d\omega \tag{9.187}$$

这表示在线性粘弹性介质中传播的平面波，可由所有频率的平面波叠加而成。一旦给定 $f(t)$、$\varphi(t)$ 和 c_∞，原则上就可计算任意 x 和 t 时刻的位移 $u(x,t)$。也可计算 $c(\omega)$、$\gamma(\omega)$ 和 $Q(\omega)$，并与观测值比较，最终获得地球介质中的 $\varphi(t)$ 的最佳值。在处理位移问题之前，还要先讨论由因果律得出的 $\tilde{n}(\omega)$ 中的那些谱函数之间的关系。

(1)如果 $\dot{\varphi}(t)$ 是实的，且具有因果性的脉冲，则有

$$Q(-\omega)=-Q(\omega)\ \text{及}\ \lim_{\omega\to\infty}i\omega s(\omega)=Y_\infty\dot{\varphi}(0) \tag{9.188}$$

(2)若 $s(z)$是有界的解析复变函数(复变量 $z=\omega-\mathrm{i}\Omega$),且在复 z 平面的下半平面,并设 $1+s(z)$在下半平面无零点,则 $\tilde{n}(z)$在下半平面也是解析的。因而当 $\Omega\to 0$ 时 $\tilde{n}(z)$的实部与虚部互为 Hilbert 变换,此即称为频散关系。下面进行推导。

因为已假定 $s(z)$在下半平面无零点,而一个不为常数或零的复变函数应至少有一个奇点,因而 $s(z)$的奇点一定在上半平面。假定沿着实轴 $s(z)$无极点,选择如图 9.13 的回路积分,则按 Cauchy 积分定理有$\int_C \frac{s(z)}{z-\omega_0}\mathrm{d}z=0$。这里 ω_0 是实轴上任意一点,回路 C 包括实轴实上的直线段$(-R_0,\omega_0-r)$和(ω_0+r,R_0)、及半径为 R_0 的大半圆 C_1 和半径为 r 的小半圆 C_2。这样,在 C_1 上的积分有

$$\lim_{R_0\to\infty}\int_{C_1}\frac{s(R_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})}{R_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\omega_0}\mathrm{i}R_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta=\mathrm{i}s(\infty)\int_0^{-\pi}\mathrm{d}\theta=-\pi\mathrm{i}s(\infty) \tag{9.189}$$

而在 C_2 上的积分为

$$\lim_{r\to 0}\int_{C_2}\frac{s(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\omega_0)}{(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\omega_0)-\omega_0}\mathrm{i}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta=\mathrm{i}s(\omega_0)\int_{-\pi}^{0}\mathrm{d}\theta=\pi\mathrm{i}s(\omega_0) \tag{9.190}$$

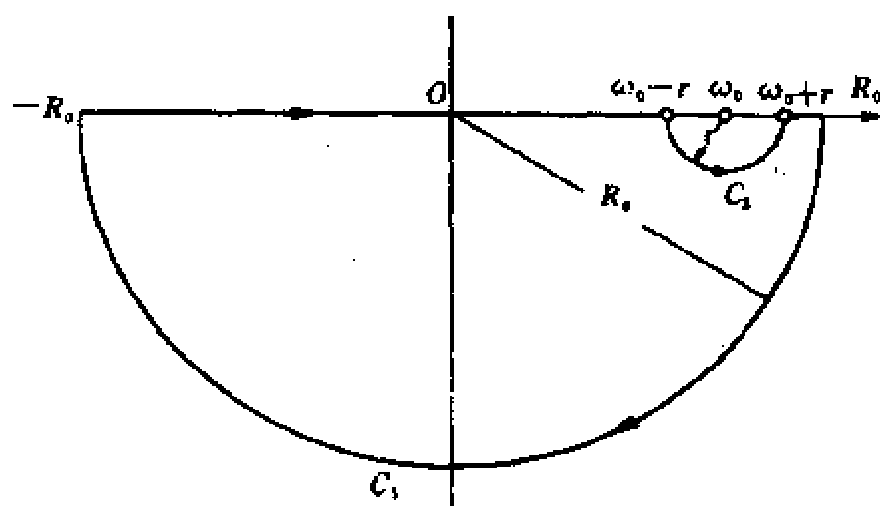


图 9.13 推导频散关系所用的积分回路

当 $r\to 0$ 及 $R_0\to\infty$ 时,Cauchy 积分式为

$$0=-\pi i s(\infty)+\lim_{\substack{r\to 0\\ R_0\to\infty}}\left[\int_{R_0}^{\omega_0-r}\frac{s(x)}{x-\omega_0}\mathrm{d}x+\int_{\omega_0+r}^{R_0}\frac{s(x)}{x-\omega_0}\mathrm{d}x+\pi i s(\omega_0)\right] \tag{9.191}$$

取其虚部与实部各自为零,并用 ω 代替 ω_0,则得到

$$\left.\begin{aligned} X(\omega)&=-\frac{1}{\pi}\mathrm{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{R(\omega)}{x-\omega}\mathrm{d}x+X(\infty)\\ R(\omega)&=\frac{1}{\pi}\mathrm{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{X(\omega)}{x-\omega}\mathrm{d}x+R(\infty)\end{aligned}\right\} \tag{9.192}$$

式中 P 是在 ω 和 ∞ 处积分取主值的意思。这样,只要线性系统的响应函数是实的且符合因果律(此称为物理真实条件),就可得到谱函数 $s(\omega)$ 的实部与虚部之间的关系式(9.192),它称为 Kramers-Kronig 频散关系。

它还可以有另外的表示形式。利用

$$\mathrm{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x-\omega}=\lim_{\substack{r\to 0\\ R_0\to\infty}}\left[\int_{-R_0}^{\omega-r}\frac{\mathrm{d}x}{x-\omega}+\int_{\omega+r}^{R_0}\frac{\mathrm{d}x}{x-\omega}\right]$$

$$=\lim_{\substack{r\to\infty\\ R_0\to\infty}}\left[\ln\left|\frac{R_0-\omega}{R}\right|-\ln\left|\frac{R_0+\omega}{R}\right|\right]=0$$

式(9.192)可变为

$$\left.\begin{aligned} X(\omega)&=X(\infty)-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{R(x)-R(\omega)}{x-\omega}\mathrm{d}x\\ R(\omega)&=R(\infty)+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{R(x)-R(\omega)}{x-\omega}\mathrm{d}x\end{aligned}\right\} \tag{9.193}$$

再应用 $R(-\omega)=R(\omega)$ 及 $X(-\omega)=-X(\omega)$,可将式(9.193)改成为

$$\left.\begin{aligned} X(\omega)&=X(\infty)-\frac{2\omega}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{R(x)-R(\omega)}{x^2-\omega^2}\mathrm{d}x\\ R(\omega)&=R(\infty)+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{xX(x)-\omega X(\omega)}{x^2-\omega^2}\mathrm{d}x\end{aligned}\right\} \tag{9.194}$$

分部积分后有

$$\left.\begin{aligned}X(\omega) &= -\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\frac{\mathrm{d}R(x)}{\mathrm{d}x}\right]\ln\left|\frac{x+\omega}{x-\omega}\right|\mathrm{d}x \\ R(\omega)-R(\infty) &= \frac{1}{\omega\pi}\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x\,X(x))\ln\left|\frac{x+\omega}{x-\omega}\right|\mathrm{d}x\end{aligned}\right\} \tag{9.195}$$

联系到式(9.184),可得

$$\begin{aligned}\frac{c_{\infty}}{c(\omega)} &= 1+\frac{2c_{\infty}}{\pi}\mathrm{P}\int_0^{\infty}\frac{\gamma(x)}{x^2-\omega^2}\mathrm{d}x \\ &= 1+\frac{c_{\infty}}{\omega\pi}\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\gamma(x)]\ln\left|\frac{x+\omega}{x-\omega}\right|\mathrm{d}x \geqslant 0\end{aligned} \tag{9.196}$$

及

$$\gamma(\omega) = -\frac{2\omega^2}{\pi}\mathrm{P}\int_0^{\infty}\frac{1}{c(x)}\frac{\mathrm{d}x}{x^2-\omega^2} \geqslant 0 \tag{9.197}$$

从上面两式中可得到

$$\lim_{\omega\to\infty}c(\omega)=c_{\infty},c(-\omega)=c(\omega),\gamma(-\omega)=\gamma(\omega) \tag{9.198}$$

(3)如果 $s(z)$ 与 $F(z)$ 服从上述条件,另外又假设 $|z|\to\infty$ 时,有 $\lim\mathrm{Im}\{\tilde{n}(z)\}=0,\lim\mathrm{Re}\{\tilde{n}(z)\}=1,u(0,t<0)=0$,则可得到 $u(x,t<x/c_{\infty})=0$。下面进行证明。

因为 $u(0,t<0)=0$,按式(9.186)有

$$F(\omega) = \int_0^{\infty}u(0,t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t \tag{9.199}$$

作变量变换 $z=\omega-\mathrm{i}\Omega$,重新定义

$$F(z) = \int_0^{\infty}u(0,t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}zt}\mathrm{d}t \tag{9.200}$$

这样的 $F(z)$,在 $\Omega>0$ 时是解析的,且当 $|z|\to\infty$ 时在无限大圆弧上有 $|F(z)|\to 0$。由于已设 $\tilde{n}(z)$ 在 $\Omega>0$ 时解析,且有 $z\to\infty$ 时,$\mathrm{Im}\{\tilde{n}(z)\}\to 0,\mathrm{Re}\{\tilde{n}(z)\}\to 1$,因此必定会有

$$\int_{\Gamma}F(z)\exp\left\{\mathrm{i}z\left(t-\frac{\tilde{n}(z)}{c_{\infty}}x\right)\right\}\mathrm{d}z = 0 \tag{9.201}$$

积分路径 Γ 如图 9.14 所示。因而式(9.201)积分也就是

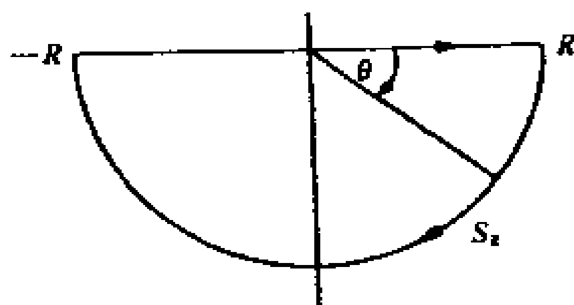


图 9.14 用来说明极限速度条件的积分路径

$$\int_{-R}^{R} F(\omega)\exp\left\{i\omega\left(t-\frac{\tilde{n}(\omega)}{c_\infty}x\right)\right\}d\omega+$$

$$\int_{S_R} F(z)\exp\left\{iz\left(t-\frac{\tilde{n}(z)}{c_\infty}x\right)\right\}dz=0 \tag{9.202}$$

且 $z=R\cos\theta-iR\sin\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$。大圆弧 S_R 上的积分值为 I_R，利用当 $|z|\to\infty$ 时，$\mathrm{Im}\{\tilde{n}(z)\}\to 0$，$\mathrm{Re}\{\tilde{n}(z)\}\to 1$ 的关系，可得

$$|I_R|\leqslant 2R\int_0^{\frac{\pi}{2}}|F(z)|\exp\left[-R\sin\theta\left(\frac{x}{c_\infty}-t\right)\right]d\theta$$

$$\leqslant 2R\int_0^{\frac{\pi}{2}}|F(z)|\exp\left[-\frac{2\theta}{\pi}R\left(\frac{x}{c_\infty}-t\right)\right]d\theta \tag{9.203}$$

这里用了 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时 $\sin\theta\leqslant\frac{2\theta}{\pi}$ 的条件。因当 $|z|\to\infty$ 时在 S_R 上 $|F(z)|\to 0$，故可写出 $|F(z)|\leqslant\frac{a}{R^\lambda}$，$(\lambda>0)$。这样就有

$$|I_R|\leqslant\frac{2a}{R^{\lambda-1}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\exp\left[-\frac{2\theta R}{\pi}\left(\frac{x}{c_\infty}-t\right)\right]d\theta$$

$$=\frac{\pi a}{R^\lambda}\left\{\frac{1-\exp\left[-R\left(\frac{x}{c_\infty}-t\right)\right]}{\left(\frac{x}{c_\infty}-t\right)}\right\} \tag{9.204}$$

当 $R\to\infty$ 而 $x>c_\infty t$ 时，$I_R\to 0$，这样，由式(9.202)及式(9.187)得 $u(x,t<\frac{x}{c_\infty})=0$。这个结论意味着，虽然式(9.196)不禁止在某些频

率上 $c(\omega)>c_\infty$，但在粘弹性介质中，信号速度（能量传播速度）$c(\omega)$ 最大只能是 c_∞，此极限速度条件等效于因果律。

(4)如果积分

$$\int_0^\infty \frac{\gamma(\omega)}{1+\omega^2}\mathrm{d}\omega \tag{9.205}$$

收敛，则能找到一个函数 $c(\omega)$ 使得由式(9.187)所表示的 $u(x,t)$ 具有因果性，这称为 Payley-Wiener 定理。而积分式(9.205)收敛的条件为

$$\gamma(\omega)=O(\omega^m),(0<m<1) \tag{9.206}$$

此式限定了在粘弹性介质中衰减函数的条件。而在固体中的地震波衰减试验表明，在所有频率范围内，$\gamma(\omega)$ 几乎都是线性的，这种线性特征与式(9.206)因果性条件是不相容的。那么，我们只能试凑着假设某些形式的衰减函数，通过频散关系算出速度及 Q 值，看是否与地表观测值相符，以最后确定衰减函数。

考虑幂函数形式的衰减函数，即

$$\gamma(\omega)=m|\omega|^{1-\nu} \qquad (0<\nu<1) \tag{9.207}$$

则因果性的频散速度为

$$\begin{aligned}\frac{c_\infty}{c(\omega)} &= 1+\frac{mc_\infty}{\pi}\mathrm{P}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{sgn}x\,\frac{|x|^{-\nu}\mathrm{d}x}{x-\omega}\\ &= 1+c_\infty m|\omega|^{-\nu}\tan\frac{\pi(1-\nu)}{2}\end{aligned} \tag{9.208}$$

对于 $\omega>0$，有

$$\left.\begin{aligned}Q(\omega) &= \frac{\omega}{2\gamma(\omega)c(\omega)}=\frac{1}{2}\tan\frac{\pi(1-\nu)}{2}+\frac{\omega^\nu}{2c_\infty m}\\ c(\omega) &= c_\infty\left[1+\frac{c_\infty m}{|\omega|^\nu}\tan\frac{\pi(1-\nu)}{2}\right]^{-1}\end{aligned}\right\} \tag{9.209}$$

得到位移值为

$$\begin{aligned}u(x,t>0) &= \frac{u_0}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-mx\omega^{1-\nu}}\times\\ &\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{c_\infty}\right)-mx\omega^{1-\nu}\tan\frac{\pi(1-\nu)}{2}\right]\mathrm{d}\omega\end{aligned} \tag{9.210}$$

我们也可先选定 Q 的形式，再通过频散关系来定出衰减函数或相速度。例如设 $Q_\beta=Q_0$（常量），而 $\tilde{\mu}(\omega)=\mu+i\mu^*$，如果 $\tilde{\mu}(z)$ 在 $z=\omega-i\Omega$ 的下半平面是一个有限的解析函数，则有

$$\mu^*(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\left(\frac{d}{dx}\mu(x)\right)\ln\left|\frac{x+\omega}{x-\omega}\right|dx\approx\frac{\pi}{2}\left(\frac{d\mu}{d\omega}\right)\omega \tag{9.211}$$

已知对于所有频率，有

$$\frac{\mu^*}{\mu}=\frac{1}{Q_\beta}=\frac{1}{Q_0} \tag{9.212}$$

代入式(9.211)解出 μ，有

$$\mu(\omega)=\mu(\omega_r)\exp\left(\frac{2}{\pi Q_0}\ln\frac{\omega}{\omega_r}\right) \tag{9.213}$$

这里 $\omega_r>\omega$ 是某一固定的参考频率，对于 $Q_0\gg 1$ 的情况，上式可简化为

$$\mu(\omega)\approx\mu(\omega_r)\left[1+\frac{2}{\pi Q_0}\ln\frac{\omega}{\omega_r}\right] \tag{9.214}$$

因为 $c_\beta(\omega)=[\mu(\omega)/\rho]^{1/2}$，用式(9.214)代入，得到

$$c_\beta(\omega)\approx c_\beta(\omega_r)\left(1-\frac{1}{\pi Q_0}\ln\frac{\omega_r}{\omega}\right) \tag{9.215}$$

还可得出

$$\gamma_\beta(\omega)=\gamma_\beta(\omega_r)\left(\frac{\omega}{\omega_r}\right)^{1-\frac{1}{\pi Q_0}}\approx\gamma_\beta(\omega_r)\frac{\omega}{(\omega_r)} \tag{9.216}$$

又如设 Q 是方形函数，即

$$\frac{1}{Q(\omega)}=\begin{cases}\dfrac{1}{Q_m}\operatorname{sgn}\omega, & \omega_1\leqslant|\omega|\leqslant\omega_2\\ 0 & \text{其他情况}\end{cases} \tag{9.217}$$

式中 Q_m 是与频率无关的常数。

复折射率表示为

$$\tilde{n}(\omega)=\frac{c_\infty}{c(\omega)}-i\frac{c_\infty}{\omega}\gamma(\omega)=n-in^* \tag{9.218}$$

式中 n 和 n^* 均为实函数，对衰减函数取 Q^{-1} 的一阶形式，有

$$\gamma(\omega) = \frac{\omega}{2c_\infty Q(\omega)} \tag{9.219}$$

这样，有

$$n = \frac{c_\infty}{c(\omega)}, \qquad n^* = \frac{1}{2Q(\omega)} \tag{9.220}$$

按频散关系有

$$\begin{aligned} n(\omega) &= \frac{c_\infty}{c(\omega)} = 1 + \frac{1}{\pi}\mathrm{P}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{n^*(x)}{x-\omega}\mathrm{d}x \\ &= 1 - \frac{1}{2\pi}\mathrm{P}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{Q(x)} \frac{\mathrm{d}x}{\omega - x} \end{aligned} \tag{9.221}$$

将式(9.217)代入，得到在 $\omega_1 \leqslant \omega \leqslant \omega_2$ 范围内的相速度为

$$\begin{aligned} c(\omega) &= c_\infty\left[1 - \frac{1}{2\pi Q_m}\ln\left|\frac{\omega^2 - \omega_1^2}{\omega_2^2 - \omega^2}\right|\right]^{-1} \\ &\approx c_\infty\left[1 - \frac{1}{\pi Q_m}\ln\frac{\omega_2}{\omega}\right] \leqslant c_\infty \end{aligned} \tag{9.222}$$

§5　粘弹性介质中位移信号的畸变

考虑 Kelvin-Voigt 体中剪切平面波的运动方程

$$\frac{1}{\beta^2}\frac{\partial^2 u_\beta}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(u_\beta + \frac{\mu'}{\rho\beta^2}\frac{\partial u_\beta}{\partial t}\right) \tag{9.223}$$

的解。

作如下形式的变量变换

$$\omega_0 = \frac{\mu}{\mu'}, \quad T = \omega_0 t, \quad X = \frac{\omega_0}{\beta}x \tag{9.224}$$

使得方程(9.223)无量纲化，即

$$\frac{\partial^2}{\partial X^2}\left(u_\beta + \frac{\partial u_\beta}{\partial T}\right) = \frac{\partial^2 u_\beta}{\partial T^2} \tag{9.225}$$

可用数种方法求解这个方程，第一个方法是将下面的积分表达式

$$u_\beta = 2\int_0^\infty e^{-Xf(\lambda)}\cos[Xg(\lambda) - \lambda T]d\lambda$$

$$\equiv 2\mathrm{Re}\int_0^\infty e^{-i\lambda h(\lambda)}d\lambda \tag{9.226}$$

代入方程，则得到积分中的函数为

$$f(\lambda)=\lambda(1+\lambda^2)^{-1/4}\times\sin\left(\frac{1}{2}\arctan\lambda\right)$$

$$g(\lambda)=\lambda(1+\lambda^2)^{-1/4}\cos\left(\frac{1}{2}\arctan\lambda\right)$$

$$h(\lambda)=\frac{X}{(1+i\lambda)^{1/2}}-T$$

第二个方法是用级数展开式，将位移展成快速收敛的级数，有

$$\left.\begin{aligned} u_\beta &= u_0\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{X}\right)^{(n+2)/2}\psi_n(\xi) \\ \xi &= \left(\frac{2}{X}\right)^{1/2}(T-X) = \left(\frac{2\beta\omega_0}{x}\right)^{1/2}\left(t-\frac{x}{\beta}\right) \end{aligned}\right\} \tag{9.227}$$

将此级数代入方程中，得到一个 $\psi_n(\xi)$ 的差微分方程

$$\begin{gathered}[16\psi_n''' + 8\xi\psi_n'' + 8(n+3)\psi_n'] + [8\xi\psi_{n-1}''' + \\ (\xi^2+8n+24)\psi_{n-1}'' + (2n+5)\xi\psi_{n-1}' + (n+1)(n+3)\psi_{n-1}] + \\ [\xi^2\psi_{n-2}'' + (2n+5)\xi\psi_{n-2}'' + (n+1)(n+3)\psi_{n-2}'] = 0, \\ \psi_{-m} = 0 \qquad (m=1,2,3,\cdots) \end{gathered} \tag{9.228}$$

式中撇号表示对 ξ 的微商。应用如下积分公式

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^\infty y^{2n}e^{-y^2}\cos\xi y\,dy = (-1)^n\sqrt{\pi}\,e^{\xi^2/4}2^{-(2n+1)}H_{2n}\left(\frac{\xi}{2}\right), (\xi>0) \\ &\int_0^\infty y^{2n+1}e^{-y^2}\sin\xi y\,dy = (-1)^n\sqrt{\pi}\,e^{-\xi^2/4}2^{-(2n+2)}H_{2n+1}\left(\frac{\xi}{2}\right), (\xi>0) \end{aligned}\right\} \tag{9.229}$$

式中 H_n 是 n 阶 Hermite 多项式，可求得方程(9.228)的解为

$$\psi_n(\xi) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\xi^2/4}f_n(\xi) \tag{9.230}$$

其中 $f_n(\xi)$是 $3n$ 阶多项式，它由 Hermite 多项式线性组合而成。如 $f_0=-G_1$，$f_1=\frac{3}{4}G_4$，$f_3=-\left(\frac{5}{8}G_5+\frac{9}{32}G_7\right)$，…，而 $G_n(\xi)=\left(-\frac{1}{2}\right)^n H_n\left(\frac{\xi}{2}\right)$。这样，位移是一个级数形式，有

$$u_\beta(x,t)=\frac{\sqrt{\pi}}{4}u_0\exp\left[-\frac{\beta\mu}{2\mu' x}\left(t-\frac{x}{\beta}\right)^2\right]\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{X}\right)^{\frac{n+2}{2}}\left(\frac{3}{32}\right)^n\frac{1}{n!}s_n(\xi) \tag{9.231}$$

式中 $s_n(\xi)$的前三项是，$s_0=\xi$，$s_1=\xi^4-12\xi^2+12$，$s_2=\xi^7-\frac{298}{9}\xi^5+\frac{2180}{9}\xi^3-\frac{920}{3}\xi$。这个级数含有因子$\left(\frac{3}{32}\right)^n\left(\frac{1}{n}!\right)$，更高阶项也能由此推导出来。它几乎对于所有 x 和 t 值都能很快收敛。这个解代表这样一种波形，在振幅衰减的同时随 x 增加而加宽。

第三种解法是最普遍用于求解线性波动方程的解法，即将简谐平面波解 $u_\beta=e^{-\gamma x+i\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)}$ 代入方程(9.225)，其中 γ 和 c 都是 ω 的实函数，且与式(9.107)相同，只是现在的 $Q^{-1}=\omega\mu'/\mu$，$[\mu(\omega)/\rho]^{1/2}=\beta$，用 $\tau_0=\mu'/\mu=1/\omega_0$，得到 Kelvin-Voigt 体的表达式为

$$\left.\begin{aligned}\gamma(\omega)&=\frac{\omega}{\beta}\left[\frac{(1+\omega^2\tau_0^2)^{1/2}-1}{2(1+\omega^2\tau_0^2)}\right]^{1/2}\\ c(\omega)&=\beta\left[\frac{2(1+\omega^2\tau_0^2)\left[(1+\omega^2\tau_0^2)^{1/2}-1\right]}{\omega^2\tau_0^2}\right]^{1/2}\end{aligned}\right\} \tag{9.232}$$

引用符号$\frac{\omega}{\omega_0}=\tan 2\theta$，则式(9.232)可重新写成

$$\left.\begin{aligned}\gamma(\omega)&=\frac{\omega_0}{\beta}\tan 2\theta\sin\theta(\cos 2\theta)^{1/2}\\ \frac{\omega}{c(\omega)}&=\frac{\omega_0}{\beta}\tan 2\theta\cos\theta(\cos 2\theta)^{1/2}\end{aligned}\right\} \tag{9.233}$$

并有$\frac{c(\omega)\gamma(\omega)}{\omega}=\tan\theta$。当 $\omega/\omega_0\ll 1$ 时，由式(9.232)可得

$$\left.\begin{aligned}
\gamma(\omega) &= \frac{\omega_0}{2\beta}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \\
c(\omega) &= \beta\left[1+\frac{3}{8}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2-\frac{17}{128}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4+\cdots\right]\approx\beta \\
Q^{-1}(\omega) &= \frac{2c(\omega)\gamma(\omega)}{\omega}=\frac{\omega}{\omega_0}
\end{aligned}\right\} \tag{9.234}$$

因而，在粘性系数 μ' 较小的情况下，衰减系数与频率的平方有关，而由衰减引起的频散则是二阶影响，即 $(\omega/\omega_0)^4$。其实这由频散关系(9.196)也可预期。当 $\omega/\omega_0 \gg 1$ 时

$$\gamma(\omega)=\frac{\omega_0}{2\beta}\left(\frac{2\omega}{\omega_0}\right)^{1/2}, c(\omega)=\beta\left(\frac{2\omega}{\omega_0}\right)^{1/2}, Q^{-1}(\omega)=2 \tag{9.235}$$

在 $\omega=\omega_0$ 处有最大的衰减，写出含有角频率的波动方程形式

$$\frac{1}{\beta^2}\frac{\partial^2 u_\beta}{\partial t^2}=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(u_\beta+\frac{1}{\omega_0}\frac{\partial u_\beta}{\partial t}\right) \tag{9.236}$$

可以看到，当角频率 ω 向高值移动时，粘性特征占优势的范围增加。

对于 Maxwell 体，我们要解方程

$$\frac{1}{\beta^2}\frac{\partial^2 u_\beta}{\partial t^2}=\tau_0\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial^2 u_\beta}{\partial y^2}-\frac{1}{\beta^2}\frac{\partial^2 u_\beta}{\partial t^2}\right] \tag{9.237}$$

设解为 $u_\beta(y,t)=e^{i(\omega t-\tilde{k}_\beta(\omega)y)}$，则得频散方程为

$$[\tilde{k}_\beta(\omega)]^2=\frac{\omega^2}{\beta^2}-\frac{i\omega}{\tau_0\beta^2}=\left[\frac{\omega}{c(\omega)}-i\gamma(\omega)\right]^2 \tag{9.238}$$

分别解出 $c(\omega)$ 和 $\gamma(\omega)$，有

$$\left.\begin{aligned}
c(\omega) &= \beta\left[\frac{2}{(1+1/\omega^2\tau_0^2)^{1/2}+1}\right]^{1/2}, c(\infty)=\beta, \\
\gamma(\omega) &= \frac{\omega}{\beta}\left[\frac{(1+1/\omega^2\tau_0^2)^{1/2}-1}{2}\right]^{1/2}, \gamma(\infty)=\frac{1}{2\beta\tau_0} \\
Q^{-1}(\infty) &= 0
\end{aligned}\right\} \tag{9.239}$$

在 $\omega\ll\frac{1}{\tau_0}$ 的情况，得

$$c(\omega)\approx\left(\frac{2\eta}{\rho}\right)^{1/2}\omega^{1/2}, \gamma(\omega)\approx\left(\frac{\rho}{2\eta}\right)^{1/2}\omega^{1/2}, Q^{-1}(\omega)=2, \tag{9.240}$$

若给出初始条件 $u_\beta(0,t)=u_0H(t)$，则在粘弹性介质中传播的脉冲是

$$u_\beta(x,t)=\frac{u_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{\mathrm{i}\omega\left[t-\frac{x}{\beta}\tilde{n}(\omega)\right]\right\}\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{i}\omega} \tag{9.241}$$

其中 $\tilde{n}(\omega)=\frac{\beta}{c}-\mathrm{i}\,\frac{\beta}{\omega}\gamma=\frac{\beta}{c(\omega)}\left[1-\frac{\mathrm{i}}{2Q(\omega)}\right]$，$c(\omega)$ 和 $Q(\omega)$ 也由式(9.107)给出。一般情况下，$\tilde{n}(\omega)$ 在复 ω 平面的下半平面是不解析的，虽然初始函数 $u_\beta(0,t)$ 通常是因果性的，但 $u_\beta(x,t)$ 会不符合因果律，计算式(9.241)的积分也颇为复杂。然而地球介质的 $Q(\omega)$ 在较宽的频率范围几乎是常量，这样近似有

$$\tilde{n}(\omega)\approx 1-\frac{1}{2Q_0}\mathrm{sgn}\omega,\omega_1\leqslant\omega\leqslant\omega_2 \tag{9.242}$$

这种近似可扩展，以便用来计算式(9.241)的积分。将它代入式(9.241)中，得

$$\begin{aligned}u_\beta(x,t)&\approx\frac{u_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[\mathrm{i}\omega\left(t-\frac{x}{\beta}\right)-\frac{x|\omega|}{2Q_0\beta}\right]\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{i}\omega}\\&=u_0\left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\sin\omega\left(t-\frac{x}{\beta}\right)\exp\left(-\frac{\omega x}{2Q_0\beta}\right)\frac{\mathrm{d}\omega}{\omega}\right\}\\&=u_0\left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{t-x/\beta}{x/2Q_0\beta}\right)\right\}\end{aligned} \tag{9.243}$$

这是一个变钝了的阶梯函数，因当 $t<\frac{x}{\beta}$ 时它不为零，即在间断处阶梯函数缓变。而当 $Q_0\to\infty$ 时，又变回到实在的阶梯函数 $H\left(t-\frac{x}{\beta}\right)$，因果性又恢复了。如果用稳相法计算，得到近似式为

$$u_\beta(x,t)=u_0\left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{Erf}\left[\frac{t-\frac{x}{\beta}}{(x/2Q_0\beta)^{1/2}}\right]\right\} \tag{9.244}$$

式中误差函数

$$\mathrm{erf}y=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^y\mathrm{e}^{-\xi^2}\mathrm{d}\xi \tag{9.245}$$

位移比在 x/β 时刻提前一点，而且连续地增加，在任何有限范围 x 内，当 $t\to\infty$ 时都趋近于一个单位。

从上述讨论可看出，对于 K-V 模型的位移解式(9.226)、(9.231)及关于 c、γ 的式(9.232)表示的位移、对于 Maxwell 模型的位移解式(9.243)、(9.244)，都说明在弱(低耗损)粘弹性介质中，位移信号的振幅与相位都发生实的畸变，很显然，畸变状况与介质的蠕变及松弛有关，它通过频散关系与衰减函数表现出来。

现在转入论讨一般粘弹性介质的信号畸变问题。

若给定介质的蠕变函数(可由实验结果外推而得)，仍以剪切波为例，可写出用蠕变速率和相应剪切应力表示的应变张量的剪切分量，为 $\varepsilon_{ij}(t)=\frac{1}{2\mu_\infty}\sigma_{ij}(t)+\int_0^t\sigma_{ij}(t-\tau)\dot{\varphi}_\beta(\tau)\mathrm{d}\tau, i\neq j$。为简单，只考虑一个分量，如 $i=1, j=2$，记 $\varepsilon_{12}(t)=\varepsilon(t), \sigma_{12}(t)=\sigma_0 H(t)$。$\varphi_\beta(t)$ 有应力倒数的量纲，为方便，引进量纲为一的蠕变函数 $\bar{\varphi}(t)$，它定义为

$$\varphi_\beta(t)=\frac{1}{2\mu_\infty}\bar{\varphi}(t), \quad \bar{\varphi}(0)=0 \tag{9.246}$$

式中 $\varphi(t)$ 函数上面标"—"表示量纲为一。这样，应变为

$$\varepsilon(t)=\frac{\sigma_0}{2\mu_\infty}(1+\bar{\varphi}(t), \quad (t>0) \tag{9.247}$$

给定 $\bar{\varphi}(t)$，可得复折射率 $\tilde{n}(\omega)$ 及耗散参数 $Q_\beta(\omega)$。用如下公式

$$\left.\begin{aligned}
&s(\omega)=\int_0^\infty\dot{\bar{\varphi}}(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t=R(\omega)-\mathrm{i}X(\omega)\\
&\frac{1}{Q_\beta(\omega)}=\frac{\int_0^\infty\dot{\bar{\varphi}}(t)\sin\omega t\mathrm{d}t}{1+\int_0^\infty\dot{\bar{\varphi}}(t)\cos\omega t\mathrm{d}t}=\frac{X(\omega)}{1+R(\omega)}\\
&\tilde{n}(\omega)\left[1+\int_0^\infty\dot{\bar{\varphi}}(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t\right]^{1/2}=\frac{\beta}{c(\omega)}-\mathrm{i}\frac{\beta}{\omega}\gamma(\omega)
\end{aligned}\right\} \tag{9.248}$$

再应用 Fourier 变换中的关系 $\lim\limits_{\omega\to\infty}\mathrm{i}\omega s(\omega)=\dot{\bar{\varphi}}(0^+)$，$s(\omega=0)=\bar{\varphi}(\infty)$，不难得到

$$\left.\begin{aligned}
&c(\omega)=\sqrt{2}\beta X^{-1}\{[(1+R)^2+X^2]^{1/2}-(1+R)\}^{1/2}\\
&\gamma(\omega)=\left(\frac{\omega}{\sqrt{2}\beta}\right)\{[(1+R)^2+X^2]^{1/2}-(1+R)\}^{1/2}
\end{aligned}\right\} \tag{9.249}$$

同样，也可定义量纲为一的松弛函数 $\bar{\psi}(t)$，它通过 $\bar{\varphi}(t)$来给出，为

$$\int_0^\infty \bar{\psi}(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t = \frac{\int_0^\infty \bar{\varphi}(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t}{1+\int_0^\infty \bar{\varphi}(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t} \tag{9.250}$$

若介质的粘弹性特征不显著，则上式右边分母近似为 1，这样，$\bar{\varphi}(t)$和 $\bar{\psi}(t)$之差仅为一常数。

岩石试件在长时期应力作用下，其蠕变函数可表示为

$$\bar{\varphi}(t) = q\ln\left(1+\frac{t}{t_0}\right) \tag{9.251}$$

式中 q 是量纲为一的常数，$\bar{\varphi}(t)$称为 Trouton-Rankine 对数函数。在 $t/t_0 \ll 1$ 的情况，有 $\varepsilon(t) \approx \varepsilon(0)\left[1+q\frac{t}{t_0}\right]$，$\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} \approx \frac{q}{t_0}\varepsilon(0)$，这意思是说，相对短的时间内，蠕变是时间的线性函数，因而具有定常蠕变率。虽然这种蠕变函数具有有限的初始蠕变率，但蠕变却以 $\ln(t)$形式无限地增加。将此蠕变函数代入式(9.248)，将会遇到如下积分

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{t_0}\int_0^\infty \frac{\sin\omega t\mathrm{d}t}{1+t/t_0} = \frac{\pi}{2} - \mathrm{si}(\omega t_0)]\cos(\omega t_0) + \mathrm{ci}(\omega t_0)\sin(\omega t_0)\\
&\frac{1}{t_0}\int_0^\infty \frac{\cos\omega t\mathrm{d}t}{1+t/t_0} = \left[\frac{\pi}{2} - \mathrm{si}(\omega t_0)\right]\sin(\omega t_0) - (\mathrm{ci}(\omega t_0)\cos(\omega t_0)
\end{aligned}\right\} \tag{9.252}$$

这里 $\mathrm{si}(x)$与 $\mathrm{ci}(x)$分别表示正弦积分函数与余弦积分函数，

$$\left.\begin{aligned}
\mathrm{si}(x) &= \int_0^x \frac{\sin\xi}{\xi}\mathrm{d}\xi = \sum_{n=0}^\infty(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}\\
\mathrm{ci}(x) &= -\int_x^\infty \frac{\cos\xi}{\xi}\mathrm{d}\xi = \gamma + \ln x + \sum_{n=1}^\infty(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n(2n)!}
\end{aligned}\right\} \tag{9.253}$$

式中 $\gamma = 0.577215\cdots$，是 Euler 常数。当 ωt_0 取小值时，近似有 $\mathrm{si}(\omega t_0) \approx \omega t_0$，$\mathrm{ci}(\omega t_0) \approx \ln\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$，$\frac{1}{\omega_0} = t_0\mathrm{e}^\gamma = 1.78107t_0$。现在假定 $\omega t_0 \ll 1$，$(\omega t_0)\ln(\omega t_0) \ll 1$，$q\ln(\omega t_0) \ll 1$，$Q_0 = \frac{2}{\pi q} \gg 1$，将它们代入正弦、余弦、

正弦积分和余弦积分函数的幂级数展开式中，可以得到 $\omega \ll \omega_0$ 时的一些近似表达式，有

$$\left.\begin{aligned}
\gamma_\beta(\omega) &\approx \frac{\omega}{2Q_0\beta}\left[1-\frac{1}{\pi Q_0}\ln\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)\right] \\
c_\beta(\omega) &\approx \beta\left[1-\frac{1}{\pi Q_0}\ln\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)\right] \\
\frac{1}{Q_\beta(\omega)} &\approx \frac{1}{Q_0}\left[1-\frac{2}{\pi Q_0}\ln\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)\right] \\
\tilde{n}(\omega) &\approx 1-\frac{i}{2Q_\beta(\omega)}
\end{aligned}\right\} \tag{9.254}$$

这与方形 Q 的频散关系的结果很类似。这里，由 Trouton-Rankine 对数蠕变函数计算的 Q^{-1} 表达式为

$$\frac{1}{Q_\beta(\omega)}=\frac{1}{Q_0}\frac{\left[1-\frac{2}{\pi}\mathrm{si}(\omega t_0)\right]\cos\omega t_0+\frac{2}{\pi}\mathrm{ci}(\omega t_0)\sin\omega t_0}{1+\frac{1}{Q_0}\left\{\left[1-\frac{2}{\pi}\mathrm{si}(\omega t_0)\right]\sin\omega t_0-\frac{2}{\pi}\mathrm{ci}(\omega t_0)\cos\omega t_0\right\}} \tag{9.255}$$

这个函数，在 $10^{-10}<\omega t_0<10^{-3}$ 范围内有一个水平台阶，这时，式(9.254)的近似关系成立，位移波形畸变由(9.243)式给出。这个对数蠕变函数不能保证同时计入地球介质中的地震及非地震的耗散位移。例如地球的 Chandler 晃动（进动）的 Q 值约为 30，用此 Q 值计算的 S 波位移畸变值（用式(9.243)）与观测值严重不符。这样就必须修正 Trouton-Rankine 蠕变律，比如选择所谓 Jeffreys 蠕变律，它是

$$\bar{\varphi}(t)=\frac{q}{\nu}\left[\left(1+\frac{t}{t_0}\right)^{\nu}-1\right],\quad (0\leqslant\nu\leqslant 1) \tag{9.256}$$

式中 q、ν 和 t_0 是常数。可看出，

(1)当 $\nu\to 0$ 时，$\bar{\varphi}(t)=q\ln\left(1+\frac{t}{t_0}\right)$，这就变成 Trouton-Rankine 蠕变律了。

(2)对于 $\frac{t}{t_0}\ll 1$ 情况（或 $\nu=1$ 情况），$\bar{\varphi}(t)\approx q\frac{t}{t_0}$，$\bar{\varphi}(0)=0$。

(3)对于$\frac{t}{t_0}\gg 1$情况，$\nu\neq 0$，则有$\bar{\varphi}(t)\approx\frac{q}{\nu}\left(\frac{t}{t_0}\right)^{\nu}$。

为了计算传播函数$\gamma(\omega)$，$c(\omega)$及$\tilde{n}(\omega)$，需要将蠕变函数的微商$\dot{\bar{\varphi}}(t)=\frac{q}{t_0}\left(1+\frac{t}{t_0}\right)^{\nu-1}$进行正弦或余弦变换，它们有

$$\left.\begin{aligned}R(\omega)&=\int_0^{\infty}\dot{\bar{\varphi}}(t)\cos\omega t\mathrm{d}t=q\,|\omega t_0|^{\frac{1}{2}-\nu}(1-\nu)s_{\nu-\frac{3}{2},\frac{1}{2}}(|\omega t_0|)\\X(\omega)&=\int_0^{\infty}\dot{\bar{\varphi}}(t)\sin\omega t\mathrm{d}t=q\,|\omega t_0|^{\frac{1}{2}-\nu}\mathrm{sgn}(\omega t_0)s_{\nu-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(|\omega t_0|)\end{aligned}\right\}\tag{9.257}$$

这里$s_{\nu,\frac{1}{2}}(z)$是Lommel函数，有

$$s_{\nu,\frac{1}{2}}(z)=\frac{z^{\nu+1}}{\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\left(\mu+\frac{3}{2}\right)}\,{}_1F_2\left(1,\frac{\mu+\frac{5}{2}}{2},\frac{\mu+\frac{7}{2}}{2};-\frac{z^2}{4}\right)+$$

$$\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}2^{\nu-1}\Gamma\left(\frac{\mu+\frac{1}{2}}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu+\frac{3}{2}}{2}\right)\cos\left[\frac{\left(\mu-\frac{1}{2}\right)}{2}\pi-z\right]z^{-1/2}\tag{9.258}$$

对于$|z|\ll 1$及$\nu>0$情况，则有

$$\left.\begin{aligned}z^{1/2}s_{\nu-\frac{3}{2},\frac{1}{2}}(z)&\approx\frac{z^{\nu}}{\nu(\nu-1)}-\Gamma(\nu-1)\cos\frac{\pi\nu}{2}\\z^{1/2}s_{\nu-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(z)&\approx\frac{z^{\nu+1}}{\nu(\nu+1)}-\Gamma(\nu)\sin\frac{\pi\nu}{2}\end{aligned}\right\}\tag{9.259}$$

相应的式(9.257)可简化为

$$\left.\begin{aligned}R(\omega)&\approx q\Gamma(\nu)\cos\frac{\pi\nu}{2}|\omega t_0|^{-\nu}\\X(\omega)&\approx q\Gamma(\nu)\sin\frac{\pi\nu}{2}(\mathrm{sgn}\omega)|\omega t_0|^{-\nu}\end{aligned}\right\}\tag{9.260}$$

对于地球介质有，$\nu\approx 0.2$，$t_0\approx 1.6\times 10^{-4}\mathrm{s}$，$q\approx 10^{-3}\sim 10^{-2}$，这样，$\Gamma(\nu)\approx 4.5$，$\sin\frac{\pi\nu}{2}\approx 0.3$，$\cos\frac{\pi\nu}{2}\approx 0.95$，从而可解得$X\approx\frac{T^{1/5}}{200}$，$R\approx\frac{T^{1/5}}{65}$。因而在周期范围$10^{-2}\mathrm{s}<T<10^{6}\mathrm{s}$内，$\omega t_0$，$X(\omega)$及$R(\omega)$都小于

1，且可近似地表示为

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{Q(\omega)} \approx \frac{X}{1+R} \approx \frac{q\Gamma(\nu)\sin\dfrac{\pi\nu}{2}}{(|\omega t_0|)^{\nu}} \\
&\gamma(\omega) \approx m|\omega|^{1-\nu}, m = \frac{q\Gamma(\nu)\sin\dfrac{\pi\nu}{2}}{2\beta t_0^{\nu}} \\
&\tilde{n}(\omega) \approx 1 - \frac{\mathrm{i}}{2Q}\mathrm{sgn}\,\omega
\end{aligned}\right\} \tag{9.261}
$$

在低频情况，即使得$|R(\omega)|\gg 1$及$\omega t_0 \ll 1$，有$Q^{-1}\approx\tan\dfrac{\pi\nu}{2}$=常量。

现在来考察波在Jeffreys体中的传播情况。只讨论$R(\omega)$和$X(\omega)$较小的情况。将$\tilde{n}(\omega)$代入积分式(9.241)中，可得

$$
u(x,t) = \frac{u_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{\mathrm{i}\left[\omega\tau + b\varepsilon|\omega|^{1-\nu}\left(-\cos\frac{\pi\nu}{2} + \mathrm{i}\varepsilon\sin\frac{\pi\nu}{2}\right)\right]\right\}\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{i}\omega} \tag{9.262}
$$

其中$\varepsilon=\mathrm{sgn}\,\omega$，$\tau=t-\dfrac{x}{\beta}$，$b=\dfrac{q\Gamma(\nu)}{2\beta t_0^{\nu}}x$。应该注意，积分要求在整个频率范围上进行，但$\tilde{n}(\omega)$却仅在充分高的频率上适用，这种矛盾会产生误差，然而对积分的贡献主要来自被积函数指数的稳相点，这是远离$\omega=0$的地方，因而误差可以忽略不计。

改变积分变量，使$\omega=BV$，$B=b^{\frac{1}{\nu}}(1-\nu)^{\frac{1}{\nu}}\tau^{-\frac{1}{\nu}}$，这样，式(9.262)有

$$
\begin{aligned}
u = (x,t) &= \frac{u_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{A(V)}{\mathrm{i}V}\mathrm{e}^{\mathrm{i}pV}\mathrm{d}V \\
&= u_0 H\left(t-\frac{x}{\beta}\right)\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi}P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{A(V)}{\mathrm{i}V}\mathrm{e}^{\mathrm{i}pV}\mathrm{d}V\right]
\end{aligned} \tag{9.263}
$$

式中$p=B\tau$，$A(V)=\exp\left[\mathrm{i}p\varepsilon\dfrac{|V|^{1-\nu}}{1-\nu}\left(-\cos\dfrac{\pi\nu}{2}+\mathrm{i}\varepsilon\sin\dfrac{\pi\nu}{2}\right)\right]$。对于$\nu<1$情况，式(9.263)可改写成

$$
u(x,t) = u_0 H\left(t-\frac{x}{\beta}\right)\left\{\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\sin\left[pV - \frac{p\cos\dfrac{\pi\nu}{2}}{1-\nu}V^{1-\nu}\right]\right.
$$

$$\cdot \exp\left[-\frac{p\sin\frac{\pi\nu}{2}}{1-\nu}V^{1-\nu}\right]\frac{\mathrm{d}V}{V}\Bigg\} \tag{9.264}$$

再令 $W=p\dfrac{V^{1-\nu}}{1-\nu}$，使作第二次变量变换，则式(9.264)变成

$$u(x,t)=u_0H\left(t-\frac{x}{\beta}\right)\left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi(1-\nu)}\int_0^{\infty}\exp\left[-W\sin\frac{\pi\nu}{2}\right]\times\right.$$

$$\left.\sin\left[W\left(\left(\frac{W}{p}\right)^{\nu/1-\nu}(1-\nu)^{\frac{1}{1-\nu}}-\cos\frac{\pi\nu}{2}\right)\right]\frac{\mathrm{d}W}{W}\right\} \tag{9.265}$$

可看出，被积函数的数值集中在 $W=0$ 附近，因而位移的这种形式便于数值计算。再看式(9.261)中的 $Q^{-1}(\omega)$，它与参数 ν 和 $qt_0^{-\nu}$ 有关。后者也出现在 Chandler 晃动的阻尼中，从晃动和地幔波的测定知，ν 值在 0.21～0.14 之间。

我们已熟知，地球介质在有限的频率范围内，Q 值是常量。这可用标准线性体(三参数体)来构成并表征它的物理特征。

这时量纲为一的蠕变函数为

$$\bar{\varphi}(t)=\bar{\varphi}(\infty)\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau_\varepsilon}}\right) \tag{9.266}$$

且 $\bar{\varphi}(\infty)=\dfrac{\tau_\varepsilon}{\tau_\sigma}-1$，$\varepsilon(t)=\dfrac{\sigma_0}{\mu_2}(1+\bar{\varphi}(t))$。又因为有

$$s(\omega)=\int_0^{\infty}\dot{\bar{\varphi}}(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t=\frac{\tau_\varepsilon/\tau_\sigma-1}{1+\mathrm{i}\omega\tau_\varepsilon} \tag{9.267}$$

则复传播函数有

$$\left.\begin{aligned}\tilde{n}(\omega)&=\left(\frac{\tau_\varepsilon}{\tau_\sigma}\right)^{1/2}\left[\frac{1+\mathrm{i}\omega\tau_\sigma}{1+\mathrm{i}\omega\tau_\varepsilon}\right]^{1/2}\\ \tilde{K}(\omega)&=\frac{\omega}{v_e}\left[\frac{1+\mathrm{i}\omega\tau_\sigma}{1+\mathrm{i}\omega\tau_\varepsilon}\right]^{1/2},v_e=\left(\frac{M_R}{\rho}\right)^{1/2}\end{aligned}\right\} \tag{9.268}$$

式中 M_R 为松弛弹性模量，有 $\sigma(\infty)=M_R\varepsilon_0$。也可得到相应的相速度和衰减系数

$$\left.\begin{aligned}
c(\omega) &= v_\epsilon\left\{\frac{2[1+\omega^2\tau_0^2(\tau_\epsilon/\tau_\sigma)]}{[(1+\omega^2\tau_0^2)^2+4\omega^2\tau_0^2Q_0^{-2}]^{1/2}+(1+\omega^2\tau_0^2)}\right\}^{1/2}\\
\gamma(\omega) &= \frac{\omega}{v_\epsilon}\left\{\frac{[(1+\omega^2\tau_0^2)^2+4\omega^2\tau_0^2Q_0^{-2}]^{1/2}-(1+\omega^2\tau_0^2)}{2[1+\omega^2\tau_0^2(\tau_\epsilon/\tau_\sigma)]}\right\}^{1/2}\\
\frac{2\gamma(\omega)c(\omega)}{\omega} &= Q_0\,\frac{[(1+\omega^2\tau_0^2)^2+4\omega^2\tau_0^2Q_0^{-2}]^{1/2}-(1+\omega^2\tau_0^2)}{\omega\tau_0}
\end{aligned}\right\}\tag{9.269}$$

这里 $$\frac{1}{Q_0}=\frac{\tau_\epsilon-\tau_\sigma}{2\tau_0},\quad \tau_0=(\tau_\epsilon\tau_\sigma)^{1/2}\tag{9.270}$$

因而 $$\frac{1}{Q(\omega)}=\frac{1}{Q_0}\left[\frac{2\omega\tau_0}{1+\omega^2\tau_0^2}\right]\tag{9.271}$$

$Q^{-1}(\omega)$-ω 曲线在 $\omega_0=\frac{1}{\tau_0}$处有一峰值(图 9.15a),在峰值处,

$$\frac{1}{Q(\omega_0)}=\frac{1}{Q_0}\tag{9.272}$$

此结果从三参数体的运动方程也可推出。用位移表示的运动方程为

$$\frac{1}{v_\epsilon^2}\left(\frac{\partial^2u}{\partial t^2}+\tau_\sigma\frac{\partial^3u}{\partial t^3}\right)=\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\tau_\epsilon\frac{\partial^3u}{\partial t\partial y^2}\tag{9.273}$$

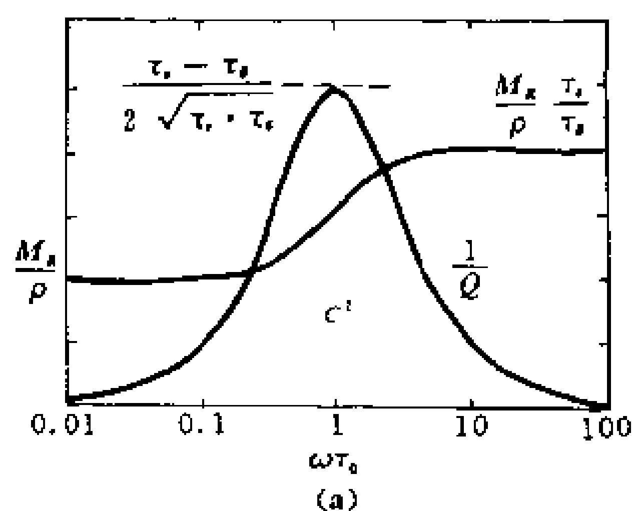
设平面波解为 $u=u_0e^{i(\omega t-\tilde{K}(\omega)y)}$,代入方程(9.273)可得 $\tilde{K}(\omega)=\frac{\omega}{v_\epsilon}\cdot\left[\frac{1+i\omega\tau_\sigma}{1+i\omega\epsilon_\epsilon}\right]^{1/2}$,与式(9.268)一样。在 ω 的上半平面,$\tilde{K}(\omega)$的支点为

$$\omega_1=\frac{i}{\tau_\sigma},\omega_2=\frac{i}{\tau_\epsilon}\tag{9.274}$$

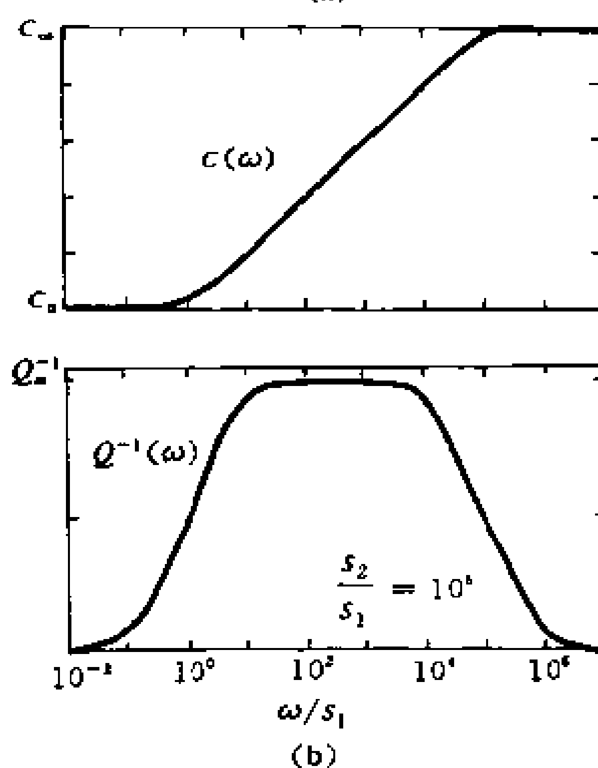
一般说,$\tilde{K}(\omega)$在 ω 的下半平面是解析的,符合因果律。

式(9.271)所确定的 $Q^{-1}(\omega)$模型具有峰值,显然不符合由地震波观测到的地球介质的衰减机制。但可以用许多个这种松弛机制的叠加构成 Q 为常量的模型,即在某一频率范围上,Q^{-1}具有水平的一段(图 9.15b),它也可称为连续松弛模型。若对单个的标准线性体有一附加的限制,如使

$$\frac{\tau_\epsilon}{\tau_\sigma}-1=\bar{\varphi}(\infty)\ll 1\tag{9.275}$$



(a)



(b)

图 9.15　常量 Q 模型

则连续松弛模型的总蠕变函数可加权写成

$$\tilde{\varphi}(t) = \int_0^\infty j(\tau_\varepsilon)\left[1 - e^{-\frac{t}{\tau_\varepsilon}}\right]d\tau_\varepsilon \tag{9.276}$$

若取权函数 $j(\tau)$ 的形式有

$$j(\tau) = \begin{cases} A/\tau & \tau_2 < \tau < \tau_1 \\ 0 & \text{其他情况} \end{cases} \tag{9.277}$$

式中 A 为常数，将 $j(\tau)$ 代入式(9.276)，则得出总蠕变为

$$\bar{\varphi}(t) = A\left[\ln \frac{s_2}{s_1} - \int_{s_1}^{s_2} e^{-st} \frac{ds}{s}\right], \left(s_1 = \frac{1}{\tau_1}, s_2 = \frac{1}{\tau_2}\right)$$

也就是

$$\bar{\varphi}(t) = A\left[\ln \frac{s_2}{s_1} + \mathrm{Ei}(-s_1 t) - \mathrm{Ei}(-s_2 t)\right] \tag{9.278}$$

式中指数函数 $\mathrm{Ei}(-x)$ 在 $x>0$ 及 $-\pi<\arg x<\pi$ 情况下有

$$\mathrm{Ei}(-x) = -\int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt = 0.5772156\cdots + \ln x -$$

$$e^{-x} \sum_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)\frac{x^n}{n!}$$

特殊值是

$$\bar{\varphi}(\infty) = A\ln \frac{s_2}{s_1}, \quad \bar{\varphi}(\text{小 } t \text{ 值}) \approx A(s_2 - s_1)t \tag{9.279}$$

式(9.278)的结果与 Trouton-Rankine 蠕变律式(9.251)很相似，但式(9.278)在 $t\to\infty$ 时没有奇异点。具有这种类似性是因为两函数都要使 Q 在一个宽的频率范围内是常量。

前面已经讨论过，对于低耗损介质，蠕变与松弛函数只相差一常数，因而有

$$\bar{\psi}(t) = A[\mathrm{Ei}(-s_1 t) - \mathrm{Ei}(-s_2 t)] \tag{9.280}$$

为了确定式(9.277)中的常数 A 的值，用如下两个求积公式

$$\left.\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{e^{-s_1 t} - e^{-s_2 t}}{t} \sin\omega t dt &= \arctan \frac{(s_2 - s_1)\omega}{\omega^2 + s_1 s_2} \\ \int_0^{\infty} \frac{e^{-s_1 t} - e^{-s_2 t}}{t} \cos\omega t dt &= \frac{1}{2}\ln \frac{\omega^2 + s_2^2}{\omega^2 + s_1^2} \end{aligned}\right\} \tag{9.281}$$

来计算积分

$$\int_0^{\infty} \bar{\varphi}(t) e^{-i\omega t} dt = A\int_0^{\infty} \frac{e^{-s_1 t} - e^{-s_2 t}}{t} e^{-i\omega t} dt$$

若选择 s_1 为小值，s_2 为大值，使得

$$s_1 \ll \omega \ll s_2 \tag{9.282}$$

且在这个范围内的 $Q^{-1}(\omega)$ 为常量，则式(9.281)的第一个积分近似为$\frac{\pi}{2}$，而耗散参数也近似有

$$\frac{1}{Q(\omega)} \approx A\arctan\frac{(s_2-s_1)\omega}{\omega^2+s_1s_2} \approx \frac{A\pi}{2} = \frac{1}{Q_m} \quad (9.283)$$

这里的 Q_m 就是在式(9.282)表示范围内 Q^{-1}所给定的常量，则

$$A = \frac{2}{\pi Q_m}, \bar{\varphi}(\infty) = \frac{2}{\pi Q_m}\ln\frac{s_2}{s_1} \quad (9.284)$$

当 Q_m 值较大时，A 为较小的量，这时复折射率可近似表示为

$$\tilde{n}(\omega) \approx 1 + \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\dot{\varphi}(t)e^{-i\omega t}dt = \frac{c_\infty}{c(\omega)} - i\frac{c_\infty}{\omega}\gamma(\omega) \quad (9.285)$$

注意到这是适用于整个频率范围的表达式，那么可得相速度

$$c(\omega) = c_\infty\left[1 + \frac{1}{2\pi Q_m}\ln\frac{\omega^2+s_2^2}{\omega^2+s_1^2}\right]^{-1} \quad (9.286)$$

很明显

$$\left.\begin{aligned} &c(\infty) = c_\infty = c(0)\left[1 + \frac{1}{\pi Q_m}\ln\frac{s_2}{s_1}\right] \\ &\frac{1}{\pi Q_m} = \frac{[c(\infty)/c(0)]-1}{\ln(s_2/s_1)} \\ &\bar{\varphi}(\infty) = 2\left(\frac{c_\infty}{c(0)} - 1\right) \end{aligned}\right\} \quad (9.287)$$

因而在 Q 为常量的区域上，相速度频散可近似为

$$c(\omega) \approx c_\infty\left(1 - \frac{1}{\pi Q_m}\ln\frac{s_2}{\omega}\right) \quad (9.288)$$

这个结果与用 Trouton-Rankine 蠕变律得出的结果是一致的，也可将式(9.288)的 s_2 换成任意参考频率 ω_r，即在这上限频率范围内 Q 是常数，有

$$c(\omega) = c(\omega_r)\left(1 - \frac{1}{\pi Q_m}\ln\frac{\omega_r}{\omega}\right) \quad (9.289)$$

为方便，我们将几个常用的粘弹性模型及相应的蠕变函数、传播函数列在表 9.1。

表 9.1　粘弹性模型和它们的蠕变函数及传播函数

材料类型	τ_0	$\tilde{n}(0)$	蠕变函数 $\phi(t)$	时间松弛函数 $j(t)$
1. Maxwell 体	$\frac{\eta}{\mu}$	$\left(1+\frac{1}{\mathrm{i}\omega\tau_0}\right)^{1/2}$	$1+\frac{1}{\tau_0}$	—
2. Kelvin-Voigt 体	$\frac{\eta}{\mu}$	$(1+\mathrm{i}\omega\tau_0)^{-1/2}$	$1-\mathrm{e}^{-t/\tau_0}$	$\delta(\tau-\tau_0)$
3. 标准线性体	$[\tau_\varepsilon\tau_\sigma]^{1/2}$	$\left[\frac{\tau_\varepsilon(1+\mathrm{i}\omega\tau_\sigma)}{\tau_\sigma(1+\mathrm{i}\omega\tau_\varepsilon)}\right]^{1/2}$	$\left(\frac{\tau_\varepsilon}{\tau_\sigma}-1\right)(1-\mathrm{e}^{-t/\tau_\varepsilon})$	$\left(\frac{\tau_\varepsilon}{\tau_\sigma}-1\right)\delta(\tau-\tau_\varepsilon)$
4. 连续松弛体 ($\omega_1\leqslant\omega\leqslant\omega_2$)	$\frac{1}{\omega_2}$	$\left[\frac{2}{\pi Q_m}\ln\frac{\omega_2+\mathrm{i}\omega}{\omega_1+\mathrm{i}\omega}+1\right]^{1/2}$	$\frac{2}{\pi Q_m}\left[\ln\frac{\omega_2}{\omega_1}-\int_{\omega_1}^{\omega_2}\mathrm{e}^{-st}\frac{\mathrm{d}s}{s}\right]$	$\begin{cases}\frac{2}{\pi Q_m\tau}, & \tau_2<\tau<\tau_1\\ 0, & 其他\end{cases}$
5. Jeffreys 体 $\nu\neq0$	t_0	按式(9.257)	$\frac{2}{\pi Q_0\nu}\left[\left(1+\frac{t}{t_0}\right)^{\nu}-1\right]$	$\frac{2}{\pi Q_0}\frac{B(\nu)}{\tau^{1-\nu}}\mathrm{e}^{-t_0/t}$
$\nu=0$	$(1.78107)t_0$	$1-\frac{1}{\pi Q_0}\ln(\mathrm{i}\omega t_0)$	$\frac{2}{\pi Q_0}\ln\left(1+\frac{t}{t_0}\right)$	$\frac{2}{\pi Q_0}\frac{1}{\tau}\mathrm{e}^{-t_0/t}$
6. 修正的 Jeffreys 体	t_∞		$\frac{2}{\pi Q_0}\frac{\mathrm{e}^{t_0/t_\infty}}{(t_0/t_\infty)^{\nu}}\cdot\int_{t_0/t_\infty}^{t_0/t_\infty(1+t/t_0)}\mathrm{e}^{-\xi}\xi^{\nu-1}\mathrm{d}\xi$	$\begin{cases}\frac{b}{\tau^{1-\nu}}\mathrm{e}^{-t_0/t}\left(1-\frac{\tau}{t_\infty}\right)^{-\nu}, & \tau<t_\infty\\ 0, & \tau>t_\infty\end{cases}$

材料类型	归一化衰减系数 $\tau_0 C_\infty \gamma(x)$，$x=\omega\tau_0$		归一化相速度 $c(x)/c_\infty$	
		$x\ll1, x=1, x\gg1$		$x\ll1, x=1, x\gg1$
1. Maxwell 体	$\frac{x}{\sqrt{2}}\left[\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{1/2}-1\right]^{1/2}$	$\left(\frac{x}{2}\right)^{1/2}$, 0.455…, $\frac{1}{2}$	$\sqrt{2}\,x\left[\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{1/2}-1\right]^{1/2}$	$[2x]^{1/2}$, 0.910…, 1
2. Kelvin-Voigt 体	$x\left[\frac{(1+x^2)^{1/2}-1}{2(1+x^2)}\right]^{1/2}$	$\frac{1}{2}x^2$, 0.321…, $\sqrt{\frac{x}{2}}$	$\frac{\sqrt{2}}{x}[(1+x^2)\times((1+x^2)^{1/2}-1)]^{1/2}$	1, 1.287…, $\sqrt{2x}$
3. 标准线性体	$\frac{x}{\sqrt{2}}(1+x^2)^{1/2}\cdot\left\{\frac{\left[1+\frac{4x^2Q_0^{-2}}{(1+x^2)^2}\right]^{1/2}-1}{\left(1+x^2\frac{\tau_\varepsilon}{\tau_\sigma}\right)}\right\}^{1/2}$	$\frac{1}{Q_0}x^2$, $\frac{1}{2Q_0}$, $\frac{1}{Q_0}\left[\frac{\tau_\sigma}{\tau_\varepsilon}\right]^{1/2}$	$\left\{\frac{2\left(1+x^2\frac{\tau_\varepsilon}{\tau_\sigma}\right)/(1+x^2)}{\left[1+\frac{4x^2Q_0^{-2}}{(1+x^2)^2}\right]^{1/2}+1}\right\}^{1/2}$	1, 1 $\frac{1}{8Q_0^2}$, $\left(\frac{\tau_\varepsilon}{\tau_\sigma}\right)^{1/2}$
4. 连续松弛体 ($\omega_1\leqslant\omega\leqslant\omega_2$)	$\frac{x}{2Q_m}$		$1+\frac{1}{\pi Q_m}\ln x$	1
5. Jeffreys 体 $\nu\neq0$	$\frac{\lvert x\rvert^{1-\nu}}{2Q_0}D(\nu)$		$\frac{1}{1+\Gamma(\nu)\frac{x^{\nu}}{\pi Q_0}\cos\frac{\pi\nu}{2}}$, $\nu>0$	
$\nu=0$	$\frac{\lvert x\rvert}{2Q_0}\left[1+\frac{1}{\pi Q_0}\ln x\right]$		$1+\frac{1}{\pi Q_0}\ln x$	

注：表中 $b=B(\nu)\frac{2}{\pi Q_0}e^{t_0/t_\infty}$，$B(\nu)=[\Gamma(1-\nu)t_0^{\nu}]^{-1}$，$D(\nu)=\Gamma(\nu+1)\frac{\sin\pi\nu/2}{\pi\nu/2}$，$Q_0^{-1}=\frac{(\tau_\varepsilon-\tau_\sigma)}{2\tau_0}$。

§6　地球介质中的地震波衰减

地震观测表明，地球介质的吸收是低耗损（Q 值大）的，因而在这里简要地重提一下低耗损线性粘弹性体的基本性质

（1）耗损函数是应变分量的二次函数，且常常是正定的。

（2）必须满足因果律，因而在数学上要求复波数 $\widetilde{K}(\omega)$ 在 ω 平面的下半平面上是解析的；在物理上波的衰减导致因果性相移，从而产生波的频散。

（3）在 $\omega\to\infty(t\to 0)$ 的极限情况，粘弹性状态方程过渡为弹性状态方程。

（4）状态方程中的粘弹性参数必定与介质的内部结构有关。

现在我们应用前面几节讲述的理论来解释在地球介质中地震波的衰减现象。全球地震台网可观测到周期为 0.1s 的 P 波、S 波至周期为 1h 的自由振荡波，这个广宽的波谱窗口，可称为地震吸收带。

我们先来考虑体波的衰减。

若 $\gamma(\omega,s)$ 表示射线上某点的衰减系数，s 是弧长，则沿着射线的总衰减为 $\exp\left\{-\int_{\mathrm{ray}}\gamma(\omega,s)\,|\mathrm{d}s|\right\}$。在我们观测到的体波频率范围内（周期 $T=0.1\sim100\mathrm{s}$），Q 值可认为与频率无关（用 $Q_m(s)$ 表示），因而在吸收带上，衰减系数为

$$\gamma(\omega,s)\approx\frac{\omega}{2Q_m(s)v_m(s)}\qquad(\omega_1<\omega<\omega_2)$$

这里 $v_m(s)$ 是射线点 s 上的速度值。将体波衰减项写成 $\mathrm{e}^{-\omega t^*(\Delta,h)}$ 形式，且 $|\mathrm{d}s|=\eta\mathrm{d}r/(\eta^2-p^2)^{1/2}$，得到

$$t^*(\Delta,h)=\frac{1}{2}\int_{r(\text{震源})}^{r(\text{观测点})}\frac{\mathrm{d}r}{Q_m(r)v_m(r)[1-p^2v_m^2/r^2]^{1/2}}\tag{9.290}$$

如果用一个不变的平均值 Q_{av} 代替 $Q_m(r)$，则上述积分化简为 $t^*(\Delta,$

$h)=\frac{\tau}{2Q_{av}}$，这里 τ 就是射线的总走时，因而衰减因子简化为 $e^{-\frac{\omega\tau}{2Q_{av}}}$。计算位移时将此因子简单地乘以理论地震图。

在广义射线的情况下，衰减由每一条广义射线的时间函数与衰减因子 $e^{-i\omega t^*(\Delta,h)}$ 的 Fourier 反变换作卷积而得，其值为 $\frac{1}{\pi}\cdot\left\{\frac{t^*}{t^2+(t^*)^2}\right\}$。这种因果性频散导出附加的相移，相移值为 $\exp\left\{-i\omega\int_{ray}\left[\frac{1}{v(s,\omega)}-\frac{1}{v(s,\infty)}\right]ds\right\}$。相速度值用式(9.286)，即

$$v^{-1}(s,\omega)=v_0^{-1}(s,\infty)\left[1+\frac{1}{2\pi Q_m(s)}\ln\frac{\omega^2+s_2^2}{\omega^2+s_1^2}\right]$$

则体波传播因子为

$$\exp\left[i\omega\left(t-\frac{1}{\pi}t^*\ln\frac{\omega^2+s_2^2}{\omega^2+s_1^2}\right)\right] \tag{9.291}$$

由此，在式(9.282)条件下，得到波的相速度的相位延迟与群速度的相位延迟分别为

$$\left.\begin{aligned}相延迟&=\frac{2t^*}{\pi}\ln\left(\frac{s_2}{\omega}\right)\\群延迟&=\frac{2t^*}{\pi}\left[\ln\left(\frac{s_2}{\omega}\right)-1\right]\end{aligned}\right\} \tag{9.292}$$

这样，周期为 T 的群延迟相对于周期为 T' 的群延迟值为 $\frac{2t^*}{\pi}\ln\frac{T}{T'}$。从全球对于体波的衰减观测，得到整个地幔的 Q 平均值为 300。如取 $T=3s$，$T'=1s$，则 3s 的 S 波相对于 1s 的 S 波群延迟值为 $\frac{\tau}{\pi Q_{av}}\approx\frac{\tau}{1000}$。在 $\Delta=80°$ 处，$\tau\approx22min$，算出相对群延迟量约为 1s。

下面介绍由 Chapman 和朱仁益提出的"衰减的 WKBJ 地震图"的计算方法，这是计算衰减介质中地震图的另一种快速有效的方法。

对于 P 波，可有

$$\frac{1}{\alpha(\omega)}=\frac{1}{\alpha_R}\left(1-\frac{1}{\pi Q_\alpha}\ln\left|\frac{\omega}{\omega_r}\right|+\frac{i\,\mathrm{sgn}\omega}{2Q_\alpha}\right) \tag{9.293}$$

对于 S 波也可写出 $\beta(\omega)$的类似关系。α_R 是在某一参考频率 ω_α 时的实数相速度，Q_α 是 P 波与频率无关的品质因子，相当于式(9.289)所述：

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{c_\omega}{c(\omega)} &= 1 - \frac{1}{\pi Q}\ln\left|\frac{\omega}{\omega_r}\right| \\
\frac{2\gamma(\omega)c_\omega}{\omega} &= -\frac{\mathrm{sgn}\omega}{Q}
\end{aligned}\right\} \tag{9.294}
$$

及

为使计算有效、快速，可假定衰减的总效果是水平慢度的缓变函数，这样可以将它移到一般的 WKBJ 运算之外，如果这个条件不满足，则还可将 WKBJ 的积分对水平慢度 p 分段运算。不同段的积分中有不同的衰减因子。

对于式(9.293)的衰减和频散关系取同量级近似，可得延迟函数

$$
\tau_{\mathrm{ray}}(p) = \tau_R(p) - \frac{1}{\pi}\ln\left|\frac{\omega}{\omega_\alpha}\right| t_\alpha^*(p) - \frac{1}{\pi}\ln\left|\frac{\omega}{\omega_\beta}\right| t_\beta^*(p) + \frac{\mathrm{i}\ \mathrm{sgn}\omega}{2}t^*(p) \tag{9.295}
$$

这里 $\tau_R(p)$是弹性介质中的延迟函数，它由实相速度 α_R 和 β 计算得出，而 $t_\alpha^*(p)$给定为

$$
t_\alpha^*(p) = \sum_{l=1}^{L-1} n_{\alpha l}\int_{z_{l+1}}^{z_l} \frac{\mathrm{d}z}{\alpha_R^2 q_{\alpha_R} Q_\alpha} \tag{9.296}
$$

对于$t_\beta^*(p)$也可类似写出，且总的衰减走时为$t^*(p)=t_\alpha^*(p)+t_\beta^*(p)$。波的反、折射因数的代数表示式形式与弹性介质相同，但慢度值要取式(9.293)的复值，这就会导致这些因数与频率有关。由于相关性较小，允许取某一参考频率 ω_0 处的值去近似。这样，反、折射系数为

$$
R_{\mathrm{ray}}(p,\omega) \approx R_{\mathrm{ray}}(p,\omega_0) \tag{9.297}
$$

另外，假定 t^* 也是水平慢度的缓变函数，因而要取某一条射线的慢度值为近似，即

$$
t_\alpha^*(p) = t_\alpha^*(p_{\mathrm{ray}}) \tag{9.298}
$$

有了这些近似之后，衰减的影响可放在积分号外单独计算（反、折射因数的影响仍在积分号之内），最后，结果可用卷积形式表示为

$$u(t,x,z) \approx \frac{1}{2^{3/2}|x|^{1/2}\pi^2} \mathrm{F}^{-1}\left\{\exp\left[-\frac{\mathrm{i}\omega}{\pi}\ln\left|\frac{\omega}{\omega_\alpha}\right| t_\alpha^*(p_{\mathrm{ray}}) - \frac{\mathrm{i}\omega}{\pi}\ln\left|\frac{\omega}{\omega_\beta}\right| t_\beta^*(p_{\mathrm{ray}}) - \frac{|\omega| t^*(p_{\mathrm{ray}})}{2}\right]\right\}$$

$$* \left\{\mathbf{m}''(t) : * \mathrm{Im}\left[\Lambda(t) * \sum_{\mathrm{rays}} \sum_{t=\theta_{\mathrm{ray}}} \frac{p^{1/2}\mathbf{M}_{\mathrm{ray}}(p,\omega_0)\boldsymbol{U}_{\mathrm{ray}}(p,\omega_0)}{|\theta'_{\mathrm{ray}}|} \mathrm{R}_{\mathrm{ray}}(p,\omega_0)\right] + \boldsymbol{f}'(t) \cdot * \mathrm{Im}\left[\Lambda(t) * \sum_{\mathrm{rays}} \sum_{t=\theta_{\mathrm{ray}}} \frac{p^{1/2}\boldsymbol{F}_{\mathrm{ray}}(p,\omega_0)\boldsymbol{U}_{\mathrm{ray}}(p,\omega_0)R_{\mathrm{ray}}(p,\omega_0)}{|\theta'_{\mathrm{ray}}|}\right]\right\} \tag{9.299}$$

其中 F^{-1}表示逆 Fourier 变换。

现在来讨论面波的衰减问题。

考虑台站 $P_1(\Delta)_1$ 和 $P_2(\Delta)_2$，它们与震源位于同一大圆弧上，位移按指数衰减律为 $e^{-\gamma\Delta}$，并用 γ_R 和 γ_L 分别代表瑞利面波与勒夫面波的衰减系数。这样，在 P_1 和 P_2 处的面波位移的谱振幅比为

$$\frac{u(\omega,\Delta_1)}{u(\omega,\Delta_2)} = \left(\frac{\sin\left(\dfrac{\Delta_2}{a}\right)}{\sin\left(\dfrac{\Delta_1}{a}\right)}\right)^{1/2} e^{\gamma(\omega)(\Delta_2-\Delta_1)}$$

这里 a 为地球平均半径。因而有

$$\gamma(\omega) = \frac{\ln[A(\omega,\Delta_1)/A(\omega,\Delta_2)]}{\Delta_2 - \Delta_1} \tag{9.300}$$

式中 $A(\omega,\Delta)=u(\omega,\Delta)\sin^{1/2}\left(\dfrac{\Delta}{a}\right)$。若单台测量同一类型波的多次大圆路径震相的到达（如 G_2 和 G_4），则震中距差（$\Delta_2-\Delta_1$）可近似认为是源与台所在的大圆路径上的圆弧长度。若用稳相法直接从地震图上求 γ，则应补偿频散影响，可用如下表达式

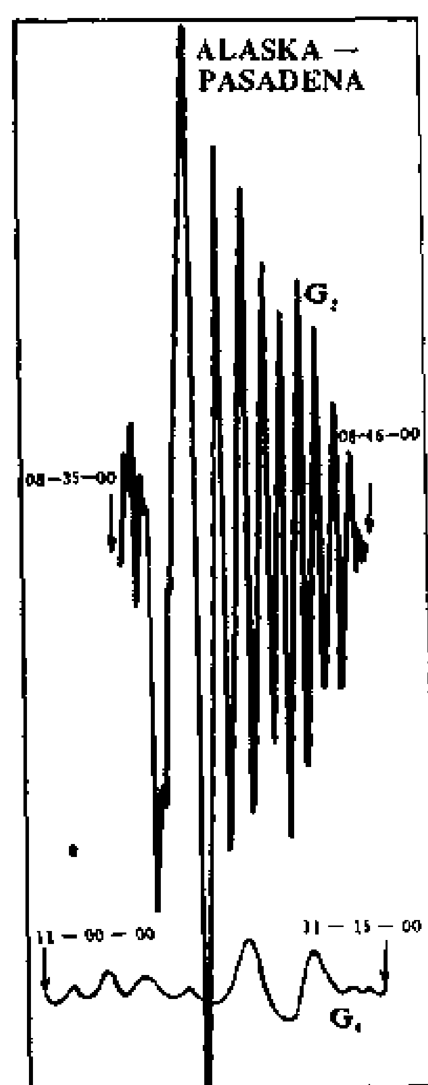


图 9.16　G_2 波的衰减



图 9.17　在 $T=22$s 处的 R_1/R_3

$$\gamma(\omega)=\frac{\ln[A(\omega_0;\Delta_1)/A(\omega_0,\Delta_2)]-\alpha(\Delta_2/\Delta_1)}{\Delta_2-\Delta_1} \tag{9.301}$$

式中 α 等于 $\frac{1}{3}$ 或 $\frac{1}{2}$，具体要看频率 ω 是不是在 Airy 相处。图 9.16 表示 G_2 波的衰减，波好像通过了一个低通滤波器。图 9.17 是近 22s 的瑞利波(R_1,R_3)的相对衰减，它与 G_2 波有相同的吸收效应，其 R_1/R_3 的幅值为 5.2，得出的衰减系数是 $0.41\times10^{-4}\text{km}^{-1}$，经过 10h 后，大部分瑞利波消失在噪音之中。

我们已熟知，在无限介质中，$Q=\frac{\omega}{2\gamma c}$。在面波情况下，$c$ 表示群速度。当震中距很大时，面波地震图(基谐振型)可由 Fourier 积分表示为：

$$F(t,\Delta)=\frac{L_0}{\sin^{1/2}(\Delta/a)}\text{Re}\int_0^{\infty}A(\omega)\exp\left[-\frac{\omega t}{2Q}+\text{i}(\omega t-K\Delta+\varphi_0)\right]\text{d}K \tag{9.302}$$

式中(Δ/a)是用弧度表示的震中距，$\Lambda=2\pi/K$ 是波长，L_0 是震源常数，φ_0 是震源的初相位，Q 是量纲为一的耗散参数，频散关系为 $\omega=\omega(K)$。鞍点由下式给定

$$\text{i}\left(t\frac{\text{d}\omega}{\text{d}K}-\Delta\right)-\frac{\text{d}}{\text{d}K}\left(\frac{\omega t}{2Q}\right)=0 \tag{9.303}$$

如果 Q 足够大，使得在某一波长内($\omega t/2Q$)的变化远小于 ωt，则鞍点可用较简单的方程 $t\frac{\text{d}\omega}{\text{d}K}-\Delta=0$ 来确定，因而有 $\frac{\text{d}\omega}{\text{d}K}=\frac{\Delta}{t}=U$。对于给定位置的地震图上的一个给定点，即已知 Δ 和 t，可求出 $U(\omega_0)$。又由于式(9.302)被积函数指数的二阶微商是 $\text{i}t\frac{\text{d}^2\omega}{\text{d}K^2}=\text{i}t\omega''$，故其指数函数在 K_0 邻近的近似式可写成

$$\exp\{\text{i}[\omega t-K\Delta+\varphi_0+\frac{1}{2}t\omega_0''(K-K_0)^2]\} \tag{9.304}$$

所以，由最速下降法可得

$$F(t,\Delta)=\frac{L_0}{\sin^{1/2}(\Delta/a)}A(\omega_0)\exp\left[-\frac{\omega_0 t}{2Q}\right]\left[\frac{2\pi}{t|\omega''_0|}\right]^{1/2}\cdot$$

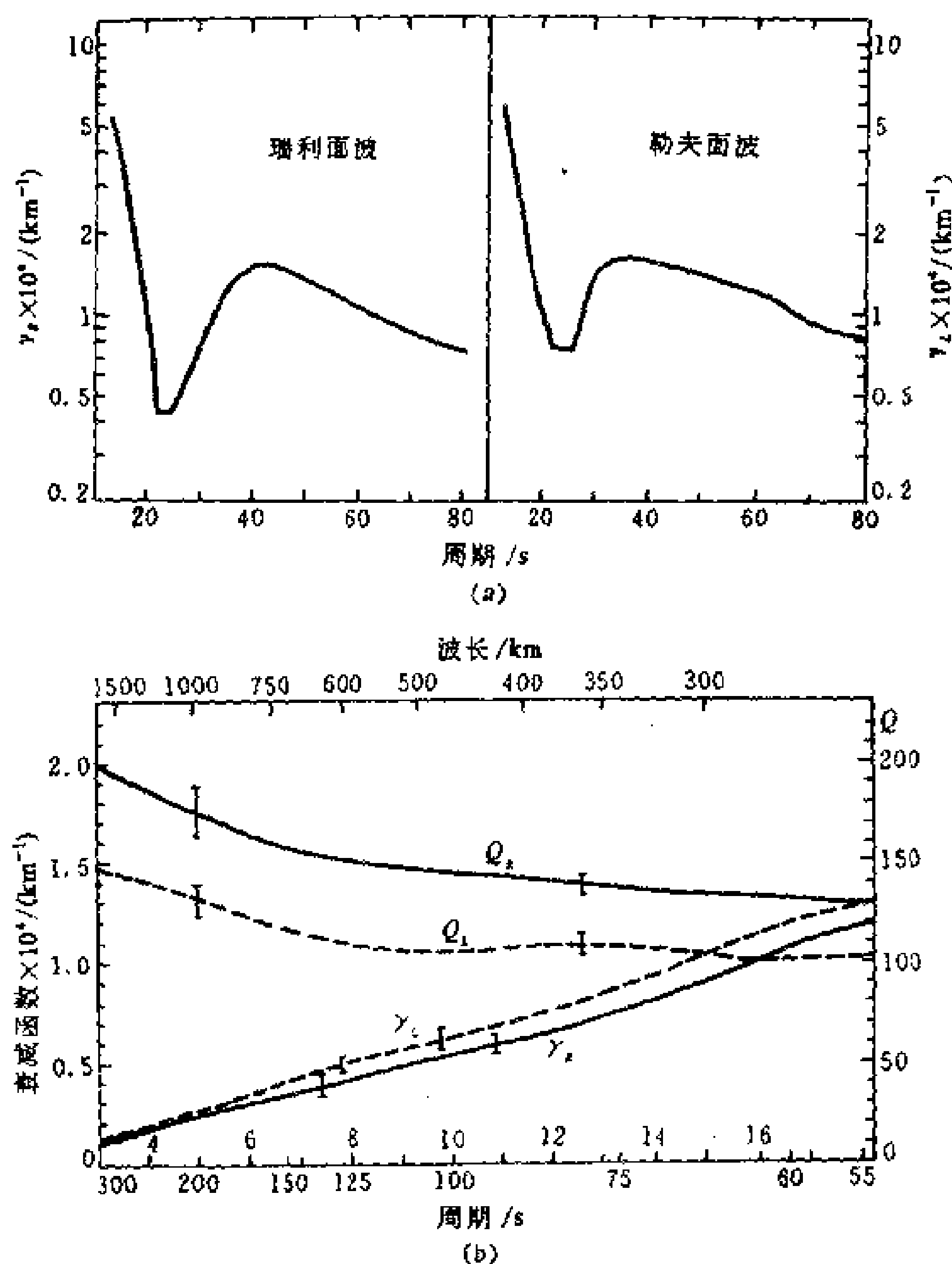


图 9.18　瑞利波与勒夫波的衰减系数与周期的关系

(a)　地壳及壳下的面波；(b)上地幔中的面波

$$\cos\left[\omega_0 t - K_0\Delta + \varphi_0 + \frac{\pi}{4}\mathrm{sgn}\omega''_0\right] \qquad (9.305)$$

及 $K_0=K_0(t,\Delta)$，$\omega_0=\omega_0(K_0)$。式中的相位角 $\theta=\omega_0 t-K_0\Delta$，因为

$\mathrm{d}\omega_0/\mathrm{d}K_0=\Delta/t$，故有

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\theta}{\partial\Delta}=t\dfrac{\mathrm{d}\omega_0}{\mathrm{d}K_0}\dfrac{\partial K_0}{\partial\Delta}-K_0-\Delta\dfrac{\partial K_0}{\partial\Delta}=-K_0\\ \dfrac{\partial\theta}{\partial t}=\omega_0+t\dfrac{\mathrm{d}\omega_0}{\mathrm{d}K_0}\dfrac{\partial K_0}{\partial t}-\Delta\dfrac{\partial K_0}{\partial t}=\omega_0\end{cases}$$

通常，在 Δ 值接近 Ut 时，运动近似有谐振性，它的波长为 $2\pi/K_0$，也可以说 t 值接近 Δ/U 时，它近似为周期是 $2\pi/\omega_0$ 的谐振波。那么，函数 $F(t,\Delta)$ 代表一个单独的谐振分量，以相速度 $c=c(\Delta,t)=\omega_0/K_0$ 在时刻 t 通过坐标 Δ 处。若固定 Δ 值，考虑有限时间间隔 $t_1\leqslant t\leqslant t_2$ 的面波地震图，那么，在这时间间隔中，$\omega_0(t)$ 是在 $\omega_1(t_1)\leqslant\omega_0(t)\leqslant\omega_2(t_2)$ 的间隔中。从这意义上说，式(9.305)实际上是 $F(t,\Delta)$ 在 $t=t(\omega_0)$ 时的另一个波谱表达式。将 $T=\dfrac{2\pi}{\omega_0}$，$t=\dfrac{\Delta}{U}$ 代入 $\exp[-\omega_0 t/2Q]$ 中，则每个波谱都有衰减因子 $\exp[-\pi\Delta/QUT]$。将它与等效的随距离而衰减的指数规律 $\exp[-\gamma\Delta]$ 相比较，得

$$Q=\frac{\pi}{\gamma UT}\tag{9.306}$$

图 9.18 给出由观测得到的瑞利波与勒夫波的衰减系数与周期的关系。

最后讨论多层介质中的面波衰减问题。

在滞弹性介质中总会出现耗散，故必须区分出两类速度值，即无耗散的介质所固有的弹性波速度 $\alpha_\infty=\left(\dfrac{\lambda+2\mu}{\rho}\right)^{1/2}$，$\beta_\infty=\left(\dfrac{\mu}{\rho}\right)^{1/2}$，以及复值速度 $\tilde{\alpha}=\alpha(\omega)\left[1+\dfrac{\mathrm{i}}{2Q_\alpha}\right]$，$\tilde{\beta}=\beta(\omega)\left[1+\dfrac{\mathrm{i}}{2Q_\beta}\right]$，且有 $\lim\limits_{\omega\to\infty}\tilde{\alpha}=\alpha_\infty$，$\lim\limits_{\omega\to\infty}\tilde{\beta}=\beta_\infty$。

我们已知，在弹性半空间传播的瑞利面波，既无频散也不随距离而衰减，其相速度 c 由瑞利方程

$$\left(2-\frac{c^2}{\beta_\infty^2}\right)^2-4\left(1-\frac{c^2}{\alpha_\infty^2}\right)^{1/2}\left(1-\frac{c^2}{\beta_\infty^2}\right)^{1/2}=0\tag{9.307}$$

给出。现假定为弱滞弹性的半空间，具有复速度为

$$\tilde{\alpha}=\alpha_{\infty}\left(1+\frac{\mathrm{i}}{2Q_{\alpha}}\right),\tilde{\beta}=\beta_{\infty}\left(1+\frac{\mathrm{i}}{2Q_{\beta}}\right) \tag{9.308}$$

式中的所有物理量都与频率无关，且有 $Q_{\alpha}\gg 1, Q_{\beta}\gg 1$。设此介质中的瑞利波速也模仿着写为

$$\tilde{c}=c\left(1+\frac{\mathrm{i}}{2Q_{\mathrm{R}}}\right),Q_{\mathrm{R}}\gg 1 \tag{9.309}$$

那么，将式(9.308)和(9.309)的 $\tilde{c},\tilde{\alpha}$ 和 $\tilde{\beta}$ 代替瑞利方程(9.307)中的 c,α,β，可得

$$\left\{2-\left(\frac{c}{\beta_{\infty}}\right)^{2}\left[\frac{1+(\mathrm{i}/2Q_{\mathrm{R}})}{1+(\mathrm{i}/2Q_{\beta})}\right]^{2}\right\}^{4}=$$

$$16\left\{1-\frac{c^{2}}{\beta_{\infty}^{2}}\left[\frac{1+(\mathrm{i}/2Q_{\mathrm{R}})}{1+(\mathrm{i}/2Q_{\beta})}\right]^{2}\right\}\times\left\{1-\frac{c^{2}}{\alpha_{\infty}}\left[\frac{1+(\mathrm{i}/2Q_{\mathrm{R}})}{1+(\mathrm{i}/2Q_{\beta})}\right]^{2}\right\} \tag{9.310}$$

将式子两边都展开为 $1/Q_{\alpha}$、$1/Q_{\beta}$ 和 $1/Q_{\mathrm{R}}$ 的幂级数，且只保留一次项，然后将虚部和实部分离，实部仍维持弹性介质中的瑞利方程的关系，那么其虚部有

$$\frac{1}{Q_{\mathrm{R}}}=\frac{m}{Q_{\alpha}}+\frac{1-m}{Q_{\beta}} \tag{9.311}$$

式中 $m=\dfrac{1}{1-\theta},\quad \theta=\dfrac{(\alpha_{\infty}^{2}/\beta_{\infty}^{2})/(1-c^{2}/\alpha_{\infty}^{2})(2-3c^{2}/\beta_{\infty}^{2})}{(2-c^{2}/\beta_{\infty}^{2})(1-c^{2}/\beta_{\infty}^{2})}$ (9.312)

因而 Q_{R}^{-1} 可解释是 Q_{α}^{-1} 和 Q_{β}^{-1} 的加权平均，也可看出，m 仅是泊松比 ν 的函数，当 $\nu=\dfrac{1}{4}$ 时，有

$$\frac{1}{Q_{\mathrm{R}}}=\frac{0.134}{Q_{\alpha}}+\frac{0.866}{Q_{\beta}} \tag{9.313}$$

瑞利波的谱位移为衰减因子 $\mathrm{e}^{-\omega\Delta/2Q_{\mathrm{R}}c}$ 乘以 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-Kx)}$（$K$ 为实数）。当上述 Q_{i}^{-1}（i 为 α,β,R）有一个或多个值大于 0.1 时，则必须用如下

的复速度

$$\tilde{\alpha}=\alpha_{\infty}\left(1+\frac{\mathrm{i}}{Q_{\alpha}}\right)^{1/2},\tilde{\beta}=\beta_{\infty}\left(1+\frac{\mathrm{i}}{Q_{\beta}}\right)^{1/2},\tilde{c}=c\left(1+\frac{\mathrm{i}}{Q_{\mathrm{R}}}\right)^{1/2} \tag{9.314}$$

代替方程(9.307)中的 α,β 和 c。这导致要解一个复系数的三次方程。在 $\beta_{\infty}/\alpha_{\infty}\geqslant 0.567008(\nu\leqslant 0.24328)$ 情况下，存在三个实根，但只有最小的实根对瑞利波传播有物理意义。

接着讨论两层滞弹性介质中的勒夫面波。设厚度为 H 的具有滞弹性参数 $Q_{1\beta}$ 的均匀层覆盖在均匀滞弹性半空间之上，半空间的滞弹性参数为 $Q_{2\beta}$。像上面处理瑞利波一样，将滞弹性参数去替代弹性情况下得到的频散方程中的弹性参数，有

$$\tan\left\{\tilde{K}_{\mathrm{L}}H\left[\frac{\tilde{c}}{\tilde{\beta}_{1}^{2}}-1\right]^{1/2}\right\}=\frac{\tilde{\mu}_{2}}{\tilde{\mu}_{1}}\left[\frac{1-(\tilde{c}/\tilde{\beta}_{2})^{2}}{(\tilde{c}/\tilde{\beta})^{2}-1}\right]^{1/2} \tag{9.315}$$

式中滞弹性介质参数有

$$\left.\begin{aligned}
&\tilde{\beta}_{1}^{2}=\beta_{1}^{2}\left(1+\frac{\mathrm{i}}{Q_{\beta_{1}}}\right),\tilde{\beta}_{2}^{2}=\beta_{2}^{2}\left(1+\frac{\mathrm{i}}{Q_{\beta_{2}}}\right)\\
&\tilde{\mu}_{1}=\mu_{1}\left(1+\frac{\mathrm{i}}{Q_{\beta_{1}}}\right),\tilde{\mu}_{2}=\mu_{2}\left(1+\frac{\mathrm{i}}{Q_{\beta_{2}}}\right)\\
&\tilde{K}_{\mathrm{L}}=K_{\mathrm{L}}\left(1-\frac{\mathrm{i}}{2Q_{\mathrm{L}}}\right),\tilde{c}=c\left(1+\frac{\mathrm{i}}{2Q_{\mathrm{L}}}\right)\\
&Q_{\beta_{1}}\gg 1,Q_{\beta_{2}}\gg 1,Q_{\mathrm{L}}\gg 1
\end{aligned}\right\} \tag{9.316}$$

将式(9.316)的诸量代入式(9.315)中，等式两边按 $Q_{\beta_1}^{-1}$、$Q_{\beta_2}^{-1}$ 和 Q_{L}^{-1} 的幂级数形式展开并保留一次项，然后，将实部与虚部分离。实部给出勒夫波周期方程，其中 β_1 和 β_2 会稍与频率有关，其依赖的程度取决于介质的滞弹性性质。而由虚部得到

$$\frac{1}{Q_{\mathrm{L}}}=\frac{A}{Q_{\beta_{1}}}+\frac{B}{Q_{\beta_{2}}} \tag{9.317}$$

式中

$$
\left.\begin{aligned}
&A = \frac{p_1}{q_L}, B = \frac{p_2}{q_L} \\
&q_L = \frac{KH}{\eta_2}\left[1 - \left(\frac{\mu_2\eta_2}{\mu_1\eta_1}\right)^2\right] + \frac{\mu_2}{\mu_1}\left(\frac{c}{\beta_2}\right)^2\left[\frac{1}{\eta_2^2} + \left(\frac{\beta_2}{\beta_1\eta_1}\right)^2\right] \\
&p_1 = \frac{\mu_2}{\mu_1}\left[\left(\frac{c}{\beta_2}\right)^2\left(\frac{\beta_2}{\beta_1\eta_1}\right)^2 - 2\right] \\
&p_2 = \frac{\mu_2}{\mu_1}\left[\left(\frac{c}{\beta_2}\right)^2\frac{1}{\eta_2^2} + 2\right] \\
&\eta_2 = \left[1 - \left(\frac{c}{\beta_2}\right)^2\right]^{1/2}, \eta_1 = \left[\left(\frac{c^2}{\beta_1}\right)^2 - 1\right]^{1/2}
\end{aligned}\right\} \tag{9.318}
$$

可看出,Q_L 不仅与频率有关,还与层的厚度 H 有关。且能容易地证明:

$$
A = \frac{\beta_1}{c}\left(\frac{\partial c}{\partial\beta_1}\right), B = \frac{\beta_2}{c}\left(\frac{\partial c}{\partial\beta_2}\right) \tag{9.319}
$$

按第六章所述的面波变分原理,叙述在保守系统中的瑞利原理要求动能和势能的时间平均值相等。换句话说,这要求消去系统中经时间平均过的 Lagrange 函数。对于耗散系统,总的机械能不是保守的,同时也就不能运用瑞利原理。但可以设想这样一个总系统,它由两个子系统构成,一个是正在讨论的耗散系统,它由于存在内摩擦而耗散能量,另一个是想象中的"镜像",它由于存在负摩擦而产生能量,两个子系统合在一起形成一个总的保守系统。

作为例子,我们考虑一个成层的垂向不均匀的衰减半空间中的勒夫波,已知一均匀层中的运动方程是

$$
\mu\nabla^2 u + \frac{\mu^*}{\omega}\nabla^2\dot{u} = \rho\ddot{u} \tag{9.320}
$$

这里 u 是横向质点位移,μ^* 是复剪切模量的虚部,方程(9.320)的解为

$$
u = V(z)e^{-K^* x}\cos(\omega t - Kx) \tag{9.321}
$$

K^* 是复波数的虚部。而"镜像"系统中的运动方程是

$$\mu\nabla^2 u^- - \frac{\mu^*}{\omega}\nabla^2\dot{u}^- = \rho\ddot{u}^- \tag{9.322}$$

相应的解为

$$u^- = V^-(z)e^{K^* x}\cos(\omega t - Kx) \tag{9.323}$$

现在可以假定这个复合系统的 Lagrange 密度是存在的。考虑到 Lagrange 密度与 u 本身有关，因而运动方程写成含 Lagrange 密度 $\mathscr{L}$ 的形式

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{u}} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial u/\partial x)} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial u/\partial z)} = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial u} \tag{9.324}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{u}^-} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial u^-/\partial x)} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial u^-/\partial z)} = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial u^-} \tag{9.325}$$

满足上述两方程的函数 $\mathscr{L}$ 可写成

$$\mathscr{L} = \rho\dot{u}\dot{u}^- - \frac{1}{2}\frac{\mu^*}{\omega}\nabla^2[u\,\dot{u}^- - \dot{u}\,u^-] -$$

$$\mu\left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u^-}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial u^-}{\partial z}\right] \tag{9.326}$$

将式(9.321)和(9.323)代入，然后对 $\mathscr{L}$ 作对坐标 z(从 0 至∞)和时间(一个周期)的积分，则得复合系统的 Lagrange 函数为

$$\mathscr{L} = \omega^2 I_1^{\mathscr{L}} - [K^2 - (K^*)^2]I_2^{\mathscr{L}} - I_3^{\mathscr{L}} \tag{9.327}$$

上式中的能量积分是

$$\left.\begin{aligned} I_1^{\mathscr{L}} &= \int_0^\infty \rho VV^-\,\mathrm{d}z \\ I_2^{\mathscr{L}} &= \int_0^\infty \mu VV^{-1}\mathrm{d}z \\ I_3^{\mathscr{L}} &= \int_0^\infty \mu\left[\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z}\frac{\mathrm{d}V^-}{\mathrm{d}z}\right]\mathrm{d}z \end{aligned}\right\} \tag{9.328}$$

I_1 可看作动能的时间平均，I_2、I_3 为势能的时间平均。应用维里原理，$\mathscr{L}=0$，得到

$$\omega^2 I_1^{\mathscr{L}} = [K^2 - (K^*)^2]I_2^{\mathscr{L}} + K_3^{\mathscr{L}} \tag{9.329}$$

现在，可将瑞利原理应用于式(9.329)，得

$$c_{\mathcal{L}}U_{\mathcal{L}} = \left[1 - \frac{K^{*}}{\tilde{K}}\left(\frac{\partial K^{*}}{\partial K}\right)\right]\frac{I_2^{\mathcal{L}}}{I_1^{\mathcal{L}}} \tag{9.330}$$

将 $K^{*} \approx \omega/2U_{\mathrm{L}}Q_{\mathrm{L}}$，$K = \omega/c_{\mathrm{L}}$ 及

$$\frac{\partial K^{*}}{\partial K} \approx \frac{\partial K^{*}/\partial\omega}{\partial K/\partial\omega} = U_{\mathcal{L}}\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\frac{\omega}{2U_{\mathcal{L}}Q_{\mathcal{L}}}\right) \approx \frac{1}{2Q_{\mathcal{L}}} + O\left(\frac{1}{Q_{\mathcal{L}}^{2}}\right) \tag{9.331}$$

代入式(9.330)，近似得到

$$c_{\mathrm{L}}U_{\mathrm{L}} = \left[1 - \frac{c_{\mathrm{L}}}{U_{\mathrm{L}}}\frac{1}{4Q_{\mathrm{L}}^{2}}\right]\frac{I_1^{\mathrm{L}}}{I_2^{\mathrm{L}}} \tag{9.332}$$

上述讨论表明，滞弹性情况下的修正项只是 $1/Q_{\mathrm{L}}^{2}$ 量级，如果是低耗散介质，只保留 Q_{L}^{-1} 项，则弹性的结果就能应用了。用同样的方法可讨论瑞利面波的情况。

我们已经叙述了与瑞利原理有关的基本公式，表明在滞弹性情况下，运用复参数是有效的。这些参数对于勒夫波是 K 和 μ，对于瑞利波还包括 λ。前面我们还引入过复密度与复频率的概念。对于行波，具体应用时 ω 要保持实值。但对于在地球介质中传播的自由振荡波，位移对时间的依赖关系有 $u(t) \propto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\tilde{\omega}t}$，这里 $\tilde{\omega} = \omega + \mathrm{i}\omega^{*}$，这时的滞弹性性质可用每一周期内的耗散应变能与所贮存的最大应变能之比来表征，与该过程有关的值是 Q^{-1}，若 $\omega^{*}/\omega \ll 1$，则 Q^{-1}等于 $2\omega^{*}/\omega$。

将所有复参量列出如下：

$$\left.\begin{aligned}\tilde{K} &= K - \mathrm{i}K^{*}\\ \tilde{\omega} &= \omega + \mathrm{i}\omega^{*}\\ \tilde{\mu} &= \mu + \mathrm{i}\mu^{*}\\ \tilde{\lambda} &= \lambda + \mathrm{i}\lambda^{*}\\ \tilde{\rho} &= \rho + \mathrm{i}\rho^{*}\end{aligned}\right\} \tag{9.333}$$

用它们去代替弹性参数 k, ω, μ, λ 和 ρ，按维里原理所述，$\omega^{2}I_1^{\mathrm{L}} = k^{2}I_2^{\mathrm{L}} + I_3^{\mathrm{L}}$，则对于勒夫波，有

$$(\omega + \mathrm{i}\omega^*)^2\int_0^\infty (\rho + \mathrm{i}\rho^*)V^2\mathrm{d}z = (K - \mathrm{i}K^*)^2 \cdot$$

$$\int_0^\infty (\mu + \mathrm{i}\mu^*)^2 V^2\mathrm{d}z + \int_0^\infty (\mu + \mathrm{i}\mu^*)\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z}\right)^2\mathrm{d}z \quad (9.334)$$

由于地球为低耗损介质，因此可假定所有复参量的虚部都是小扰动，将式(9.334)的乘积项展开，保持小量的一次项，再将实部与虚部分离，实部的等式关系给出极限时弹性介质的能量关系，而由虚部的等式关系可得到新结果为

$$\omega\omega^*\int_0^\infty \rho V^2\mathrm{d}z + \frac{1}{2}\omega^2\int_0^\infty \left(\frac{\rho^*}{\rho}\right)\rho V^2\mathrm{d}z = -KK^*\int_0^\infty \mu V^2\mathrm{d}z +$$

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty \left(\frac{\mu^*}{\mu}\right)\mu\left[\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z}\right)^2 + K^2V^2\right]\mathrm{d}z \quad (9.335)$$

引入新符号：

$\frac{1}{2}\mu\left[\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z}\right)^2+K^2V^2\right]$=势能密度$=\theta(z,\omega)$，$\frac{\omega^2}{2}\rho V^2$=动能密度$=T(z)$，$\omega^2\int_0^\infty \rho V^2\mathrm{d}z$ = 总的波动能量 $= E$，则式(9.335)可表示为

$$\int_0^\infty \frac{\mu^*}{\mu}\theta(z,\omega)\mathrm{d}z - \int_0^\infty \frac{\rho^*}{\rho}T(z)\mathrm{d}z = \omega\omega^*\int_0^\infty \rho V^2\mathrm{d}z + KK^*\int_0^\infty \mu V^2\mathrm{d}z \quad (9.336)$$

另外，只保留 Q_L^{-1} 的一次项，关于 U_L 的式(9.332)可简化成弹性公式，有

$$K^2\int_0^\infty \mu V^2\mathrm{d}z = \frac{U}{c}\omega^2\int_0^\infty \rho V^2\mathrm{d}z \quad (9.337)$$

将它代入式(9.336)中，得

$$\frac{\int_0^\infty \left(\frac{\mu^*}{\mu}\right)\theta(z,\omega)\mathrm{d}z - \int_0^\infty \left(\frac{\rho^*}{\rho}\right)T(z)\mathrm{d}z}{\omega^2\int_0^\infty \rho V^2\mathrm{d}z} = \frac{\omega^*}{\omega} + \frac{U}{c}\frac{K^*}{K} \quad (9.338)$$

或者

$$\int_0^\infty \frac{\mu^*}{\mu}\left[\frac{\theta(z,\omega)}{E}\right]\mathrm{d}z - \int_0^\infty \frac{\rho^*}{\rho}\left[\frac{T(z)}{E}\right]\mathrm{d}z = \frac{\omega^*}{\omega} + \left(\frac{U}{c}\right)\frac{K^*}{K} \quad (9.339)$$

在一个完全惯性介质中的勒夫行波，有 $\rho^*=0,\omega^*=0,\frac{\mu^*}{\mu}=\frac{1}{Q_\beta(z,\omega)},K^*=\gamma(\omega),K=\frac{\omega}{c(\omega)}$，又知 $\frac{2U}{c}\frac{K^*}{K}=\frac{1}{Q_L(\omega)}$，将它们代入(式 9.339)中，可得到勒夫行波的视衰减与介质内部的固有衰减的关系为

$$\frac{1}{Q_L(\omega)}=\frac{\int_0^\infty \frac{1}{Q_\beta(z)}\theta(z,\omega)\mathrm{d}z}{\int_0^\infty \theta(z,\omega)\mathrm{d}z} \tag{9.340}$$

这也可解释为 Q_L 是整个介质中全部深度的加权平均，即 Q_L 是介质内部固有耗散函数(它与深度有关)的加权平均，权函数是每一深度上的势能密度。当给定 $Q_L(\omega)$ 时，式(9.340)可看作是关于 $Q_\beta(z)$ 的积分方程，从而反演 Q_β，虽然反演肯定不会是唯一的。当 Q_β 与深度无关时，视耗散因数 Q_L 是常数且等于 Q_β。而当 $Q_\beta=Q_\beta(z)$ 时，即它与频率无关，但 Q_L 也必定与频率有关。

利用式(9.340)的 Q_L 作反演时，直接作数值计算是不方便的，因它要求显化振幅值 $V(z,\omega)$。我们希望用一个等效表达式来替代而不出现 V。再次应用扰动法。先将 N 个离散的均匀层来替代连续的半空间模型，在每一层中，μ、ρ 是常数，而 V 是变量且 V 和 $\mu\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z}$ 在内部交界面上连续。取 z 轴向下为正。用 V_s 代表第 s 层位移的 y 方向分量(它比例于 $e^{i\omega t-iKx}$)，V_s 应满足微分方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\mu_s\frac{\mathrm{d}V_s}{\mathrm{d}z}\right]-\mu_sK^2V_s=-\omega^2\rho_sV_s$$

将方程两边乘以 V_s，再对 z 从 s 层的上边界 z_{s-1} 到下边界 z_s 进行积分，得到

$$\left[\mu_s\left(\frac{\mathrm{d}V_s}{\mathrm{d}z}\right)V_s\right]_{z_{s-1}}^{z_s}-\int_{z_{s-1}}^{z_s}\mu_s\left(\frac{\mathrm{d}V_s}{\mathrm{d}z}\right)^2\mathrm{d}z-K^2\int_{z_{s-1}}^{z_s}\mu_sV_s^2\mathrm{d}z$$
$$=-\omega^2\int_{z_{s-1}}^{z_s}\rho_sV_s^2\mathrm{d}z$$

因 V_s 和 $\mu_s\left(\frac{\mathrm{d}V_s}{\mathrm{d}z}\right)$ 在交界面上是连续的，所以把所有层相加后，得

$$\sum_{s=1}^{N}\int_{z_{s-1}}^{z_s}\mu_s\left[\left(\frac{\mathrm{d}V_s}{\mathrm{d}z}\right)^2+K^2V_s^2\right]\mathrm{d}z=\omega^2\sum_{s=1}^{N}\int_{z_{s-1}}^{z_s}\rho_sV_s^2\mathrm{d}z \quad (9.341)$$

此式左边等于 $2\sum\theta_s$，右边等于 $2\sum T_s$。这是弹性情况下的表达式，用复参数 $\mu_s+\mathrm{i}\mu_s^*$，$\rho_s+\mathrm{i}\rho_s^*$，$\omega+\mathrm{i}\omega^*$ 及 $K-\mathrm{i}K^*$ 替代实参数，取虚部等式，就可得到滞弹性情况的公式为

$$\sum_{s=1}^{N}\int_{z_{s-1}}^{z_s}\left(\frac{\mu_s^*}{\mu_s}\right)\mu_s\left[\left(\frac{\mathrm{d}V_s}{\mathrm{d}z}\right)^2+K^2V_s^2\right]\mathrm{d}z-\frac{2K^*}{K}\sum_{s=1}^{N}\int_{z_{s-1}}^{z_s}K^2\mu_sV_s^2\mathrm{d}z$$
$$=\frac{2\omega^*}{\omega}\omega^2\sum_{s=1}^{N}\int_{z_{s-1}}^{z_s}\rho_sV_s^2\mathrm{d}z+\omega^2\sum_{s=1}^{N}\int_{z_{s-1}}^{z_s}\left(\frac{\rho_s^*}{\rho_s}\right)\rho_sV_s^2\mathrm{d}z \quad (9.342)$$

将式(9.341)两边对 ω 微商，可有

$$\frac{\omega}{K}\frac{\partial K}{\partial\omega}=\frac{c}{U}=\frac{\omega^2\sum_{s=1}^{N}\int_{z_{s-1}}^{z_s}\rho_sV_s^2\mathrm{d}z}{K^2\sum_{s=1}^{N}\int_{z_{s-1}}^{z_s}\mu_sV_s^2\mathrm{d}z} \quad (9.343)$$

因而式(9.342)可化简为

$$\sum_{s=1}^{N}\left(\frac{\mu_s^*}{\mu_s}\right)\theta_s-\sum_{s=1}^{N}\left(\frac{\rho_s^*}{\rho_s}\right)T_s=E\left[\frac{\omega^*}{\omega}+\frac{K^*}{K}\frac{U}{c}\right] \quad (9.344)$$

它等效于式(9.339)，所以式(9.340)也可以写成离散形式，即

$$\frac{1}{Q_L(\omega)}=\sum_{s=1}^{N}\frac{\theta_s}{\theta}\frac{1}{Q_{\beta,s}} \quad (9.345)$$

这里，重新明确式中各量：

$$\left.\begin{aligned}&\theta_s=\frac{1}{2}\int_{z_{s-1}}^{z_s}\mu\left[K^2V^2+\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z}\right)^2\right]\mathrm{d}z,\quad \frac{1}{Q_{\beta,s}}=\left(\frac{\mu^*}{\mu}\right)_s\\&\theta=\frac{1}{2}\int_0^\infty\mu\left[K^2V^2+\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z}\right)^2\right]\mathrm{d}z=\frac{1}{2}\omega^2\int_0^\infty\rho V^2\mathrm{d}z=\frac{c}{2U}K^2\int_0^\infty\mu V^2\mathrm{d}z\end{aligned}\right\} \quad (9.346)$$

在第六章中已有关于相速度的偏微商

$$\left(\frac{\partial c_L}{\partial \mu_s}\right)_{K,\rho} = \frac{U}{K^2}\frac{\int_{z_s}^{z_{s+1}}\left[K^2V^2 + \left(\frac{dV}{dz}\right)^2\right]dz}{2\int_0^\infty \mu V^2 dz} \tag{9.347}$$

对于每一层，μ_s 是常数，两边乘 μ_s，在积分号内将 μ_s 写成 μ，则有

$$2\mu_s\left(\frac{\partial c_L}{\partial \mu_s}\right)_{K,\rho} = \frac{U}{K^2}\frac{\int_{z_s}^{z_{s+1}}\mu\left[K^2V^2 + \left(\frac{dV}{dz}\right)^2\right]dz}{(U/c_L K^2)\int_0^\infty \mu\left[K^2V^2 + \left(\frac{dV}{dz}\right)^2\right]dz} = c_L\frac{\theta_s}{\theta}$$

或者

$$\frac{\theta_s}{\theta} = \frac{2\mu_s}{c_L}\left(\frac{\partial c_L}{\partial \mu_s}\right)_{K,\rho} = \frac{\beta_s}{c_L}\left(\frac{\partial c_L}{\partial \beta_s}\right)_{K,\rho}$$

这样式(9.345)可写成

$$\frac{1}{Q_L(\omega)} = \sum_{s=1}^{N}\left(\frac{\beta_s}{c_L}\frac{\partial c_L}{\partial \beta_s}\right)_{K,\rho}\frac{1}{Q_{\beta,s}} = \sum_{s=1}^{N}\left(\frac{\partial Q_L^{-1}}{\partial Q_{\beta,s}^{-1}}\right)\frac{1}{Q_{\beta,s}} \tag{9.348}$$

同理，对于瑞利波可以推导得出

$$\begin{aligned}\frac{1}{Q_R(\omega)} &= \sum_{s=1}^{N}\left(\frac{\alpha_s}{c_R}\frac{\partial c_R}{\partial \alpha_s}\right)_{K,\rho,\beta}\cdot\frac{1}{Q_{\alpha,s}} + \sum_{s=1}^{N}\left(\frac{\beta_s}{c_R}\frac{\partial c_R}{\partial \beta_s}\right)_{K,\rho,\alpha}\cdot\frac{1}{Q_{\beta,s}} \\ &= \sum_{s=1}^{N}\left(\frac{\partial Q_R^{-1}}{\partial Q_{\alpha,s}^{-1}}\right)\frac{1}{Q_{\alpha,s}} + \sum_{s=1}^{N}\left(\frac{\partial Q_R^{-1}}{Q_{\beta,s}^{-1}}\right)\cdot\frac{1}{Q_{\beta,s}}\end{aligned} \tag{9.349}$$

式(9.348)与式(9.349)表示，可由地表观测的面波衰减参量 $Q_L(\omega)$ 及 $Q_R(\omega)$ 来反演地球内部随深度而变化的 Q_α 和 Q_β。

§7 地球介质的各向异性特征

自本世纪 70 年代开始，从地震波的观测中已注意到地球介质的各向异性特征(Bamford，1977；Bamford & Crampin，1977)。例如，它引起S波分裂。当然，这种对S波传播有影响的特征在地震图上不太容易直接看到，只能从S波极性图上去识别。作极性图必须用三分向记录，因而由于观测技术的限制，影响了这方面工作的进展。而且入射在自由表面的S波的极性，也会由于S波转换成P波及相位变化

等原因而引起的改变，这种改变特别容易发生在入射角大于35°的情况。再如，介质的各向异性特征对面波的质点运动轨迹也有明显的影响，会发生纵向和横向运动的耦合。

我们先来分析一下形成材料各向异性的缘由。引起岩石对地震波呈现各向异性的原因可分为以下三种类型：

(1)对于介质内在的(或称为固有的)各向异性的形成原因有两种主要情况：一是结晶体各向异性，在结晶固体中，单个各向异性的晶体在很大范围上都按一定方向排列，就会形成结晶体的各向异性。另一情况是由于非常大的应力作用在原为各向同性的弹性体而形成的各向异性(Dahlen，1972；Nikitin & Chesnokov，1984)，但这种直接由应力引起的各向异性不太可能成为形成地球介质各向异性特征的主要原因。

(2)裂隙引起的各向异性。各向同性的岩石总会含有微孔及裂隙，不论在干的或注满液体的状态，它们往往要按一定方向排列，因而引起地震各向异性。这可能是地壳介质表现出各向异性的主要原因。

(3)长波的各向异性。波长较长的地震波通过由各向同性层构成的叠层时，其效果相当于地震波在较为简单的各向异性体中通过。一种是周期性薄夹层(PTL)各向异性。许多作者(Riznichenko，1949，Postma，1955；Backus，1962)都将这种结构在长波通过时的传播效果当作一具有横向各向同性的均匀弹性体来等效。另一种是交叉型(CB)各向异性。这种结构包括上层是由两类各向同性介质交叉组成的块体，下层是各向同性的地幔。当长波通过时也可近似当作横向各向同性来处理。

现在人们已认识到，地球介质的各向异性性质不单存在于上地幔中，也存在于地壳中。下面我们讨论上地幔与地壳中各向异性的特征并分析其类别。

直到1977年，还主要只限于研究P_n波速度的各向异性现象。当然个别作者也研究过瑞利波(Forsyth，1975)及高阶振型面波的各

向异性异常(Crampin & King, 1977)。此后,研究工作有了进一步发展。Bamford 等(1979)及 Velter & Minster(1981)又观测到美国西部的 P_n 波速度各向异性现象;Kirkwood & Crampin (1981)也发现通过太平洋的面波有各向异性的极性异常。现在都接受这样的观点:上地幔各向异性特征是由于橄榄石或正辉石的结晶排列所致。地表处发现的上地幔岩石也表明它们都有一致的结晶排列,而且不同方向的速度恰好与地震观测到的上地幔各向异性速度相吻合(Peselnick & Nicolas, 1978; Christensen & Salisburg, 1979; Christensen 1984)。还可从岩石学的观点以及间接的证据表明上地幔存在各向异性现象。但最有力证据还应该归于地震记录的 S 波分裂现象(Ando 等,1980;Audo & Ishikawa, 1982)。通过研究日本地壳下中等深度的地震,发现有剪切波分裂的典型例子。这些剪切波几乎是垂直入射到自由表面的,因而可避免与自由表面发生广角反射所产生的干涉作用。综合上述研究,有理由认为,上地幔的各向异性几乎都属于结晶排列所致的固有各向异性。另外,还可能观测到一些长波各向异性。

对于地壳中的各向异性表现,时时有人提到体波速度随方位角的变化(如 Dorman, 1972),但在大范围上还没有观测到这种现象。这主要是由于地壳在侧向及垂直方向都不均匀,因而很难观测到(Koshubin 等,1984)。那种在地幔中普遍存在的由于结晶排列所形成的各向异性,在地壳中也不常见。Bubuska (1984)认为这是由于单个晶体的速度各向异性轴与在应力作用下的排列轴不一致的原因。地壳中的某些岩石,如大厚度的页岩及有规律的薄层夹层都会呈现横向各向同性,但也由于介质不均匀,使这种横向各向同性的对称性质不易发现。地壳中,特别在浅层,那种小范围随方位变化的各向异性,通常是由于裂隙排列或其他不均匀性引起。花岗岩中有许多微裂隙(Simmons & Richter 1976),它们随应力的作用而排列;沉积岩中有节理和断裂,也会出现一致的排列(Engeled 1982)。

利用地震观测到的各向异性来测定这些裂隙的密度及它们的几

何特性，是各向异性现象的重要应用。可以作出多方面的展望：

(1)应力测定与地震预报：在一定应力作用下排列起来的裂隙呈各向异性，可以由此测出作用的应力。Crampin 等(1982，1984)认为在地震(包括水库地震与矿井塌陷等)发生之前会出现大范围的膨胀各向异性(EDA)前兆，已有几个震例给予证实。

(2)裂隙分布测定：首先，在地热资源勘探中估算热干岩石的裂隙分布。由于大的垂直方向含水裂隙具有离散特征，它们与垂直于它的热收缩裂隙(供热干岩石系统进行主要热交换)形成了一个等效的各向异性特征(六角形对称)。可采用竖井注水致裂过程，用三分向地声仪记录声波来分析。在原理上是在各向同性介质中把裂隙当作离散的内含夹层来处理。平行的注水裂隙形成一个非常有效的 S 波波导，导波出现是地震测定竖井的主要特征。其各向异性分析可精确确定发声位置，即撕裂位置，还有裂隙密度、方向及它们之间的关系。另外在煤矿探测中，许多煤层呈现按应力作用的裂隙排裂的各向异性，用地震波分析即可确定煤层生成特征等。

§8　各向异性介质中地震波传播的基本原理

各向异性弹性介质的波动问题先后由 Love (1944)、Duff (1960)、Lighthill (1960)及 Kraut (1963)等讨论过。Crampin (1981)发展了这些理论，最重要的是将理论上的波动特征用来解释各向异性介质中实际观测到的波的传播现象。

从理论上说，各向异性介质中有五个基本关系式，它们是：

(1)波在各向异性介质中传播的运动方程

$$\rho \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} = c_{jkmn} u_{m,nk} \tag{9.350}$$

这里 ρ 是介质密度，u_j 是 j 方向的位移分量，c_{jkmn} 是弹性系数的 4 阶张量，$u_{m,nk} = \dfrac{\partial^2 u_m}{\partial x_n \partial x_k}$，所有下标都可取值 1，2，3。

(2)广义 Hooke 定律

$$\sigma_{jk} = c_{jkmn}u_{m,n} \tag{9.351}$$

σ_{jk}是应力分量

(3)弹性常数的 4 阶张量应满足张量的坐标变换定义，即

$$c'_{jkmn} = x'_{j,p}x'_{k,q}x'_{m,r}x'_{n,s}c_{pqrs} \tag{9.352}$$

式中上标"′"是新坐标系统的值，$x'_{j,p} = \frac{\partial x'_j}{\partial x_p}$是方向余弦。

(4)弹性系数张量具有对称性，即

$$c_{jkmn} = c_{kjmn} = c_{mnjk} \tag{9.353}$$

(5)对称张量 c_{jkmn}中的 4 个下标中若有 1 及 3 个等于 p，而且使得 $c_{jkmn}=0$，则 $x_p=0$ 是一个对称平面(镜面对称)。

可以这样来说明：在各向异性弹性体中，如果有这样一个平面，以它作反射，弹性常数不改变，则这个平面就具有镜面对称。这样，代表 $x_p=0$ 平面上的反射方向余弦有

$$x'_{j,k} = \begin{cases} 0, & \text{当 } j \neq k \\ 1, & \text{当 } j = k \neq p \\ -1, & \text{当 } j = k = p \end{cases} \tag{9.354}$$

这个关系使坐标变换式(9.352)有

$$\left.\begin{aligned} & c'_{jkmp} = -c_{jkmp}; \quad c'_{jkpp} = c_{jkpp}; \quad c'_{jpmp} = c_{jpmp} \\ & c'_{jppp} = -c_{jppp}; c'_{pppp} = c_{pppp} \end{aligned}\right\} \tag{9.355}$$

可看出，当下标有 1 及 3 个等于 p 并使得 $c_{jkmn}=0$，那么，坐标变换前后的弹性常数不变，即 $x_p=0$ 的平面为对称平面。

推广之，若弹性系数张量有 2 个正交对称平面($x_1=0$，$x_2=0$)，则一定还有第 3 个对称平面($x_3=0$)，它们之间相互正交。

有了上述五个基本关系后，就可来叙述体波在各向异性介质中的传播特征。

按 Crampin(1970)的方法，转动弹性常数张量，使得所有问题都简化为在 x_1 方向以视速度 c 传播的问题。这样作的优点在于可以用

既简洁又一般的形式写出所有分析表达式与计算机程序。下面以平面体波为例介绍这种方法。

以相速度 c 在 x_1 方向传播的平面波可以写成

$$u_j = a_j \exp\left[i\omega\left(t - \frac{x_1}{c} \right) \right] \quad (j = 1,2,3) \tag{9.356}$$

将上式代入运动方程(9.350),得到代数联立方程组为

$$\left.\begin{aligned} \rho c^2 a_1 &= c_{1111}a_1 + c_{1121}a_2 + c_{1131}a_3 \\ \rho c^2 a_2 &= c_{2111}a_1 + c_{2121}a_2 + c_{2131}a_3 \\ \rho c^2 a_3 &= c_{3111}a_1 + c_{3121}a_2 + c_{3131}a_3 \end{aligned}\right\} \tag{9.357}$$

由于方程组是齐次的,可写成线性本征值问题的形式,有

$$(\mathbf{T} - \rho c^2 \mathbf{I})\boldsymbol{a} = \boldsymbol{O} \tag{9.358}$$

式中 $\boldsymbol{a}$ 是位移振幅矢量,$\mathbf{I}$ 是 3×3 阶单位矩阵,$\mathbf{T}$ 是一个 3×3 阶实对称正定矩阵,为

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} c_{1111} & c_{1121} & c_{1131} \\ c_{2111} & c_{2121} & c_{2131} \\ c_{3111} & c_{3121} & c_{3131} \end{bmatrix} \tag{9.359}$$

通常,解方程(9.358)可得到关于 $(\rho c)^2$ 的三个实正根,即得到三个相互正交的本征矢量。每一个本征矢量代表一个相速度的传播方向,在每个方向上,有 3 个体波,它们都具有正交质点运动,且它们的速度一般是不相同的,而且随传播方向不同而改变。3 个波中的一个称为准 P 波,记作 qP,它有大致为纵向的质点极性;另外 2 个称为准 S 波,记作 qS_1 和 qS_2,它们有大致为横向的质点运动。这些体波的质点振动极性是固定的,一般不会平行于各向同性介质中的 P、SV 及 SH 波的振动方向。

上述性质特别对 S 波传播产生显著影响。为适合于能量传播的特定方向,S 波必定分裂成两个或更多的极性,这些准剪切波都以不同的速度传播且时时分离,会形成具有不同极性的剪切波列的特列。由于这种特征,使剪切波重新进入各向同性区域时,也会继续维持这类波列特征(图 9.19)。

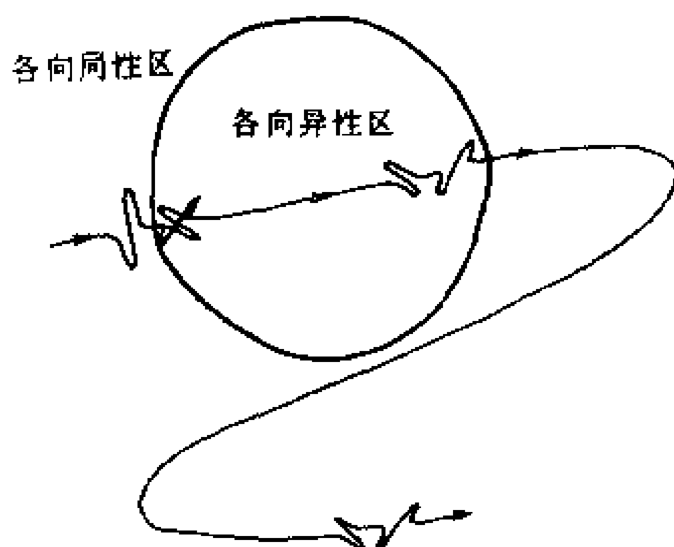


图 9.19　S 波分裂说明图

当各向异性介质具有对称平面时，体波传播在特定的 2 个方向上进行，从而使问题变得比较简单。第一种情况是传播方向在一个直立的对称面内，第二种情况是传播方向在一个任意的对称面内，且 P 波的极性和一个 S 波的极性都在这个平面内，而另一个 S 波极性垂直于这个对称面。这两种情况都可以使 P 和 SV 运动与 SH 运动解耦。若考虑 $x_3=0$ 的对称平面，体波在此平面中传播，三个体波相速度分别为

$$\left.\begin{aligned}\rho v_P^2 &= A + B_c\cos 2\theta + B_s\sin 2\theta + C_c\cos 4\theta + C_s\sin 4\theta\\ \rho v_{SP}^2 &= D + E_c\cos 4\theta + E_s\sin 4\theta\\ \rho v_{SR}^2 &= F + G_c\cos 2\theta + G_s\sin 2\theta\end{aligned}\right\} \tag{9.360}$$

其中　$A=[3(c_{1111}+c_{2222})+2(c_{1122}+c_{1212})]/8$,

$B_c=(c_{1111}-c_{2222})/2, B_s=(c_{2111}+c_{1222})$,

$C_c=[c_{1111}+c_{2222}-2(c_{1122}+c_{1212})]/8$,

$C_s=(c_{2111}-c_{1222})/2$,

$D=[c_{1111}+c_{2222}-2(c_{1122}-2c_{1212})]/8$,

$E_c=-C_c, E_s=-C_s$,

$$F = (c_{1313} + c_{2323})/2,$$

$$G_c = (c_{1313} - c_{2323})/2, G_s = c_{2313}。$$

式中 ρ 为密度，θ 是从 x_1 轴算起的方位角。SP 和 SR 是 S 波，它们的极性分别在对称面上及垂直于对称面。

由于波的传播方向要符合能量传输要求，因此，现在来讨论能量传输问题。因在各向异性介质中，相速度是矢量，且大小随方向而变化，因而波数也是一个矢量，记作 $\boldsymbol{k}$，也随方向而变化。这意味着群速度也是一个矢量，有

$$\boldsymbol{U} = \left(\frac{\partial \omega}{\partial k_1}, \frac{\partial \omega}{\partial k_2}, \frac{\partial \omega}{\partial k_3}\right) \tag{9.361}$$

因此，在均匀、完全弹性的各向异性介质中，各类地震波传播时的能量传输不再垂直于等相面。除非在某些有非常严格限制条件的情况下例外。比如体波在有六角形各向异性对称介质中传播，且限制传播方向垂直于对称轴时就是这种特例。

在均匀各向异性介质的 x_1 方向传播的平面波，它的等相面是一平面，以一个不变的相速度 $\frac{\partial \omega}{\partial k_1} = c$ 传播，这样，式(9.361)的群速度为

$$\boldsymbol{U} = \left(c, \frac{\partial \omega}{\partial k_2}, \frac{\partial \omega}{\partial k_3}\right) \tag{9.362}$$

因而我们能理解，平面波的能量以垂直于该平面的相速度进行传播，但也还有平行于该平面方向的运动分量。在均匀介质中，射线（能量传输轨迹）是一条直线，因而单台测定走时就能得到群速度。而相速度只能通过台阵的记录来确定。当射线遇到交界面时，可通过射线和群速度来确定交界面的位置。但交界面的特征还得用广义 Snell 定律及相速度来确定，这意思是指在交界面上，入射矢量、反射矢量及折射矢量不是共面的，也就是说，入射射线、反射射线及折射射线一般不会是共面的。

对于各向异性介质中传播的体波地震图的计算，是一个更为繁杂的问题，特别是当介质不均匀时更为困难。用射线法及有限差分法

进行过尝试，也取得了一些进展(Petrashen & Kashtan，1984，Martynov & Mikhailenko，1984)，但由于太复杂，终究不易方便地应用。下面只介绍射线法中的体波走时计算。有两种方法(Červený & Firbas，1984)，一种是射线追踪法，另一种是线性化近似。后一种方法只能应用于不均匀的弱各向异性介质的情况。

先利用射线追踪法讨论走时的计算。考虑不均匀的最一般的各向异性介质，有 21 个独立的弹性参数 c_{jkmn} 和密度 ρ。当然，这些参数现在都是空间坐标 x_j 的函数，并认为这些函数及它们的一阶、二阶微商都是连续的。为了简单，暂不考虑有交界面的存在。

用 a_{jkmn} 代替弹性参数 c_{jkmn}，使

$$a_{jkmn} = c_{jkmn}/\rho \tag{9.363}$$

当然也可简单地把它直接看成弹性参数，它的量纲相当于速度平方。

高频体波在各向异性的不均匀介质中传播的波前方程为

$$\tau(x_r) = t \tag{9.364}$$

式中 τ 是走时，t 是时间。慢度矢量 $\boldsymbol{p}$ 的分量可表示为

$$p_j = \frac{\partial \tau}{\partial x_j} \tag{9.365}$$

慢度矢量与波阵面法线 $\hat{\boldsymbol{n}}$ 方向相同，可记作 $p_j = n_j/v$，这里 n_j 是 $\hat{\boldsymbol{n}}$ 的分量，v 是相速度(法向)。引入 3×3 阶对称矩阵 Γ，它的元素定义为

$$\Gamma_{km} = p_j p_n a_{jkmn} \tag{9.366}$$

通常称 Γ 为 Christoffel 矩阵。高频体波的位移分量为 u_m，当考虑零阶射线近似时，它应该满足的方程为

$$(\Gamma_{km} - \delta_{rm})u_m = 0 \tag{9.367}$$

这是一个确定高频体波在不均匀各向异性介质中传播的运动学特征的方程，是典型的本征值问题。用 G 代表 Γ 的本征值，它有三个根，从本征值方程

$$\mathrm{Det}(\Gamma_{km} - \delta_{km}G) = 0 \tag{9.368}$$

中解得。对应的本征矢量为 $\boldsymbol{g}$，它应满足

$$(\Gamma_{km} - \delta_{km}G)g_m = 0, \quad k = 1,2,3 \tag{9.369}$$

由方程(9.368)得到三个本征值 $G_l(l=1,2,3)$，设 $G_1 \neq G_2 \neq G_3$，只要任意一个 G_l 等于 1，方程(9.367)就会被满足，即可使

$$G_l(p_1, p_2, p_3; x_1, x_2, x_3) = 1 \tag{9.370}$$

由于 $p_j = \dfrac{\partial \tau}{\partial x_j}$，所以式(9.370)一般是一个关于 $\tau(x_r)$ 的非线性微分方程，也就是程函方程。因而，在非均匀各向异性介质中，可以传播三个独立的波前。其中一个(比如 $G_1 = 1$)相当于准压缩波，记作 qP，而另外两个(分别当 $G_2 = 1$ 或 $G_3 = 1$)相当于不同的准剪切波，分别记作 qS_1 和 qS_2。注意到，当介质各向同性时，有 $G_1 = \alpha^2 p_j p_j$，$G_2 = G_3 = \beta^2 p_j p_j$。比较方程(9.367)和方程(9.369)可知，相应于这三个波的位移矢量与本征矢量 $\boldsymbol{g}^{(1)}$，$\boldsymbol{g}^{(2)}$ 和 $\boldsymbol{g}^{(3)}$ 有相同的方向。

当矩阵 Γ 正定时，本征值 $G_l(l=1,2,3)$ 是正实值，且是 p_j 的二次函数。将 $p_j = n_j/v$ 的关系代入式(9.370)中，很容易得到相速度为

$$v = [G_l(n_r, x_r)]^{1/2} \tag{9.371}$$

也可将本征值 G_l 用本征矢量 $\boldsymbol{g}^{(l)}$ 表示，对式(9.369)用第 l 个本征矢量的 m 分量表示，且两边乘以 g_k^l，得到

$$G_l = \Gamma_{km} g_k^{(l)} g_m^{(l)} = a_{jkmn} p_j p_n g_m^{(l)} g_k^{(l)} \tag{9.372}$$

程函方程(9.370)可用特征线法求解，这特征线相当于射线，因而程函数方程(9.370)也就相当于射线追踪系统的方程。对不同的情况可以写成不同的形式。

第一种形式为

$$\frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}\tau} = \frac{1}{2}\frac{\partial G_l}{\partial p_j}, \quad \frac{\mathrm{d}p_j}{\mathrm{d}\tau} = -\frac{1}{2}\frac{\partial G_l}{\partial x_j} \tag{9.373}$$

参数 τ 是沿着射线的传播时间，G_l 是式(9.368)导出的三次代数方程的解，通常较为复杂，且要从式(9.368)求得偏微商 $\dfrac{\partial G_l}{\partial p_j}$ 和 $\dfrac{\partial G_l}{\partial x_j}$，也是一个非常麻烦的过程，所以这种追踪系统不太适合于各向异性介质的一般情况。但是当方程(9.368)可进行因子分解时，这种形式就会变得非常简单。

第二种形式是从第一种形式推导得来，可用隐函数定理直接从式(9.368)来确定偏微商$\frac{\partial G_l}{\partial p_j}$和$\frac{\partial G_l}{\partial x_j}$，这样，第二种形式为

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}\tau} &= a_{jkmn}p_n D_{km}/D \\ \frac{\mathrm{d}p_j}{\mathrm{d}\tau} &= -\frac{1}{2}\frac{\partial a_{nkms}}{\partial x_j}p_n p_s D_{km}/D\end{aligned}\right\} \tag{9.374}$$

其中 D_{km}和 D 是

$$\left.\begin{aligned}D_{11} &= (\Gamma_{22}-1)(\Gamma_{33}-1)-\Gamma_{23}^2 \\ D_{12} &= D_{21} = \Gamma_{13}\Gamma_{23}-\Gamma_{12}(\Gamma_{33}-1) \\ D_{22} &= (\Gamma_{11}-1)(\Gamma_{33}-1)-\Gamma_{13}^2 \\ D_{13} &= D_{31} = \Gamma_{12}\Gamma_{23}-\Gamma_{13}(\Gamma_{22}-1) \\ D_{33} &= (\Gamma_{11}-1)(\Gamma_{22}-1)-\Gamma_{12}^2 \\ D_{23} &= D_{32} = \Gamma_{12}\Gamma_{13}-\Gamma_{23}(\Gamma_{11}-1) \\ D &= D_{11}+D_{22}+D_{33}\end{aligned}\right\} \tag{9.375}$$

这里不需要计算矩阵Γ的本征值G_l。但当$D=0$时，也就是有两个本征值相等时，这种形式不能应用。

第三种形式是从式(9.372)和(9.373)推得

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}\tau} &= a_{jkmn}p_n g_m^{(l)}g_k^{(l)} \\ \frac{\mathrm{d}p_j}{\mathrm{d}\tau} &= -\frac{1}{2}\frac{\partial a_{nkms}}{\partial x_j}p_n p_s g_m^{(l)}g_k^{(l)}\end{aligned}\right\} \tag{9.376}$$

此种形式非常接近于第二种形式，当$D\neq 0$时本征矢量的分量能解析地表示出来。

因而一般说，在原理上各向异性的不均匀介质中的射线追踪还是简单的，而且可一直进行，不会有什么困难。但由于要进行复杂的求和，比各向同性介质中的追踪要花费更多的时间。在进行射线追踪时，可计算走时τ，慢度矢量的分量$p_j(j=1,2,3)$，波阵面单位法向分量$n_j(j=1,2,3)$，相速度（垂直于波阵面的速度）$v=(p_j\,p_j)^{-1/2}=$

$[G_l(n_j x_j)]^{1/2}$，群速度矢量分量 $U_j=\frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}\tau}$，群速度振幅 $U=(U_jU_j)^{1/2}$，可写成 $U_j=UT_j$，T_j 是射线切线方向单位矢量 $\hat{T}$ 的分量，还有本征矢量 $\boldsymbol{g}^{(l)}$ 等。$\boldsymbol{g}^{(l)}$ 能确定相应波的位移矢量的方向，也就确定了波动的极性。必须注意，单位矢量 $\hat{\boldsymbol{n}}$、$\hat{T}$ 和 $\boldsymbol{g}^{(l)}$ 不会一致。

下面再用线性化方法讨论走时的计算，这种线性化方法是建筑在计算各向同性介质的基础之上的。设不均匀各向异性介质为 H° 介质，弹性参数是 $a^{\circ}{}_{jkmn}$。考虑三种波中任一种波在介质 H° 中的传播，见图 9.20a。从射线 L° 上的点 $M^{\circ}(x_1^0)$ 到 $M(x_r)$ 的走时 τ_0 是已知的。如果介质 H° 被扰动，就称扰动过的介质为 H 介质，其弹性参数为 a_{jkmn}，可表示为

$$a_{jkmn}=a^{\circ}{}_{jkmn}+a'_{jkmn} \tag{9.377}$$

式中 $a'{}_{jkmn}$ 是弹性参数的小扰动量。重新计算 M° 和 M 点之间的射线及相应的走时 τ（图 9.20b），将走时 τ 写成

$$\tau(M^{\circ},M)=\tau^{\circ}(M^{\circ},M)+\tau'(M^{\circ},M) \tag{9.378}$$

式中的扰动量 $\tau'(M^{\circ},M)$ 与弹性参数的扰动量 $a'{}_{jkmn}$ 有关，已由 Červeny(1982)给出

$$\tau'(M^{\circ},M)=-\frac{1}{2}\int_{L^{\circ}}\left(\frac{\partial G_l}{\partial a_{jkmn}}\right)a'{}_{jkmn}\mathrm{d}\tau^{\circ} \tag{9.379}$$

积分是沿未扰动的射线路径 L° 进行，$\mathrm{d}\tau^{\circ}$ 是沿 L° 的微小走时增量，$\tau'(M^{\circ},M)$ 也可像射线追踪系统那样，表示为另外几种形式。如第二种形式为

$$\tau'(M^{\circ},M)=-\frac{1}{2}\int_{L^{\circ}}(p_jp_nD_{km}/D)_0a'{}_{jkmn}\mathrm{d}\tau^{\circ} \tag{9.380}$$

式中 D_{km} 和 D 已由式(9.375)给出，当然要求 $D\neq0$。第三个形式是

$$\tau'(M^{\circ},M)=-\frac{1}{2}\int_{L^{\circ}}(p_jp_ng_k^{(l)}g_m^{(l)})_0a'{}_{jkmn}\mathrm{d}\tau^{\circ} \tag{9.381}$$

如果本征方程(9.368)能因子分解，则这些线性化方程能大大简化。

当 H° 介质是各向同性介质时，则射线 L° 就相当于 P 波或 S 波

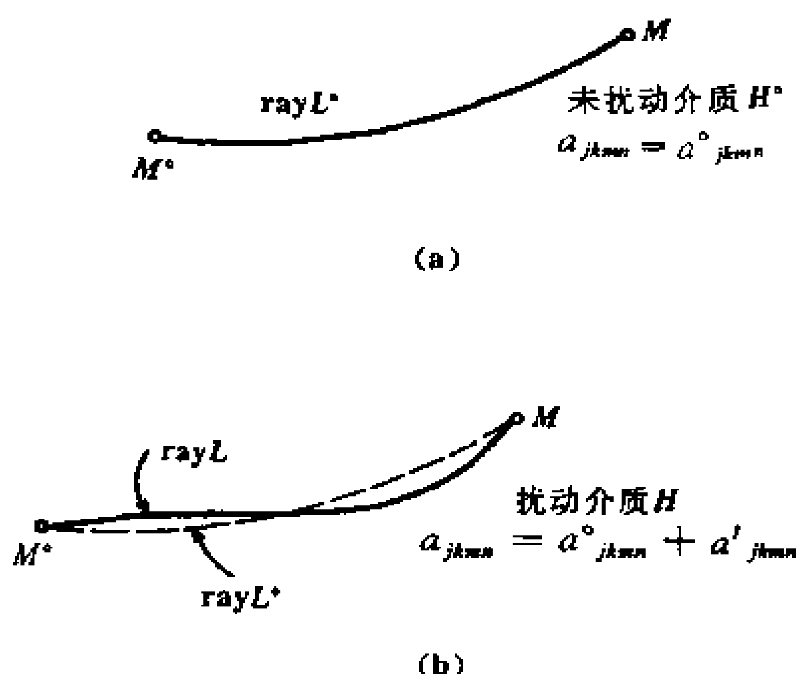


图 9.20 未扰动射线 L°和被扰动射线 L

的射线。先假定 L°为 P 波射线，$\tau^{\circ}_{P}(M^{\circ},M)$代表 P 波走时，因而准压缩波 qP 的走时 $\tau_{P}(M^{\circ},M)$，有

$$\tau_{P}(M^{\circ},M)=\tau^{\circ}_{P}(M^{\circ},M)+\tau'_{P}(M^{\circ},M) \tag{9.382}$$

其中

$$\tau'_{P}(M^{\circ},M)=-\frac{1}{2}\int_{L^{\circ}}\alpha^{-2}(n_jn_kn_mn_n)_0a'_{jkmn}\mathrm{d}\tau^{\circ} \tag{9.383}$$

这里 $\alpha=\alpha(x_r)$代表 H°介质（各向同性）中的 P 波速度。

对于 S 波的情况比较复杂。若在各向同性介质 H°中，S 波的射线为 L°，从 M°至 M 的走时记作 $\tau^{\circ}_{S}(M^{\circ},M)$，则两个准剪切波 qS_1 和 qS_2 的走时可写成

$$\left.\begin{aligned}\tau_{S_1}(M^{\circ},M)&=\tau^{\circ}_{S}(M^{\circ},M)+\tau'_{S_1}(M^{\circ},M)\\ \tau_{S_2}(M^{\circ},M)&=\tau^{\circ}_{S}(M^{\circ},M)+\tau'_{S_2}(M^{\circ},M)\end{aligned}\right\} \tag{9.384}$$

这相当于剪切波的本征矢量 $\boldsymbol{g}^{(2)}$和 $\boldsymbol{g}^{(3)}$都垂直于 L°，且彼此也相互垂直。但它们的方向是任意的，表示由此得出的 S_1 和 S_2 的位移矢量的方向是任意的，只要在射线任意一点处它们的方向被确定，则在整条

射线上它们的方向也就确定了。

但在各向异性介质中，情况并不是这样，qS_1 和 qS_2 波一般是按不同速度、沿不同路径进行传播的，这就是所谓的 S 波分裂现象。能很容易看到，$g_m^{(2)}g_k^{(2)}+g_m^{(3)}g_k^{(3)}$ 在射线任意点上是可唯一确定的。

对于各向同性介质有

$$g_m^{(2)}g_k^{(2)} + g_m^{(3)}g_k^{(3)} = \delta_{mk} - n_m n_k \tag{9.385}$$

这样，两种剪切波合起来的走时扰动为

$$\begin{aligned}&\tau'_{S_1}(M^\circ,M) + \tau'_{S_2}(M^\circ,M)\\ =& -\frac{1}{2}\int_{L^\circ}\beta^{-2}[n_j n_n(\delta_{mk} - n_m n_k)]_0 a'_{jkmn}\mathrm{d}\tau^\circ\end{aligned} \tag{9.386}$$

对于某些特殊情况，Červený给出了 τ'_{S_1}，τ'_{S_2}及它们的总值 $\tau'_{S_2}-\tau'_{S_1}$。若需要进一步探讨，可参看 Červený的有关文章。

习题与思考题

1. 试述介质的耗散参数 Q 的含义。

2. 叙述 Maxwell 体，K-V 体及标准线性体的应力-应变特征及它们与耗散参数 Q 的关系。

3. 波在无限粘弹性介质中的传播与无限弹性介质中的传播的主要区别是什么？用什么量和哪些公式来定量表示？

4. 什么叫因果性频散？试述因果性频散的 K-K 定律的内容及公式，说明此时的频散与弹性介质中频散的区分。

5. 一种弱衰减介质（$Q\gg1$），其全部损耗都局限于剪切形变，而纯压缩中无损耗，则有复刚性系数，而体积模量为纯实数。证明这种介质 $Q_P/Q_S=\frac{3}{4}\frac{\alpha^2}{\beta^2}$。

6. 试述地球介质的各向异性特征的形成原因及类型。

第十章　地震学的反演问题

地震学的重要内容之一是如何根据地表测得的地震数据，计算推断出地球内部的组成、结构及特征。这就是地震学的反演问题，也可以说是地震学的根本性任务。与此相对应，在前面讨论过的问题，即给定地球结构和震源模型，来计算走时、频散曲线、近场谱与地面运动、自由振荡周期、远场波形及完整的地震图等，称作为正演问题。反演问题的方法中包括拟合法，即将从正演问题计算得到的结果，与实际测定的资料进行比较，重新调整模型，反复尝试，直至两者之间的差异达到可接受的程度为止。地震学中有两个反演问题已有完善的反演公式，一是走时反演，另一是反射波地震图反演。近年来理论地震图（正演问题）有了很大的发展，从而使用来进行反演的信息量大大增加，因而反演问题的研究也取得了许多进展，迅速形成了一个离散数据反演方法的地震学研究领域。本章阐述这方面的基本原理及方法。

§1　走时反演

走时反演是地震学反演问题中最经典的一种。它是根据地震记录中的走时数据，确定出地球模型的速度剖面。现今已用的地球模型，主要是靠这种方法得到的。

在走时反演中，最主要的一个数学问题是求解 Abel 积分方程，因而这里首先介绍在 1826 年由 Abel 提出的 Abel 积分方程。它的形式如下：

$$t(x)=\int_0^x = \frac{f(\xi)}{\sqrt{x-\xi}}\mathrm{d}\xi \tag{10.1}$$

这里 $t(x)$是已知的，由反演确定未知函数 $f(x)$。将方程(10.1)两边乘以 $\mathrm{d}x\ \sqrt{\eta-x}$，然后对 x 从 0 至 η 积分，并改变积分顺序，有

$$\int_0^\eta \frac{t(x)}{\sqrt{\eta-x}}\mathrm{d}x=\int_0^\eta \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\eta-x}}\int_0^x \frac{f(\xi)}{\sqrt{x-\xi}}\mathrm{d}\xi$$

$$=\int_0^\eta f(\xi)\mathrm{d}\xi\int_\xi^\eta \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\eta-x}\ \sqrt{x-\xi}} \tag{10.2}$$

式中积分顺序的改变可用图 10.1 来说明。改变顺序前，积分区域如图 10.1a 中的影区，积分沿任意一条 $x=c$ 的水平线进行，而这条水平线从底部 $x=0$ 向顶部 $x=\eta$ 移动，使积分遍及全影区。而改变顺序后，积分区域不变，还是这个影区，但积分方式改变了，积分沿着任意一条 $\xi=c$ 的垂直线进行，而这条垂直线从左端 $\xi=0$ 向右端 $\xi=\eta$ 移动，使积分面积遍及全影区。因而任意一条垂直线的积分限是 $x=\xi$ 到 $x=\eta$。式(10.2)对 x 的积分，很容易得到结果。作积分变换，使 $x=\xi\cos^2\theta+\eta\sin^2\theta$，则有

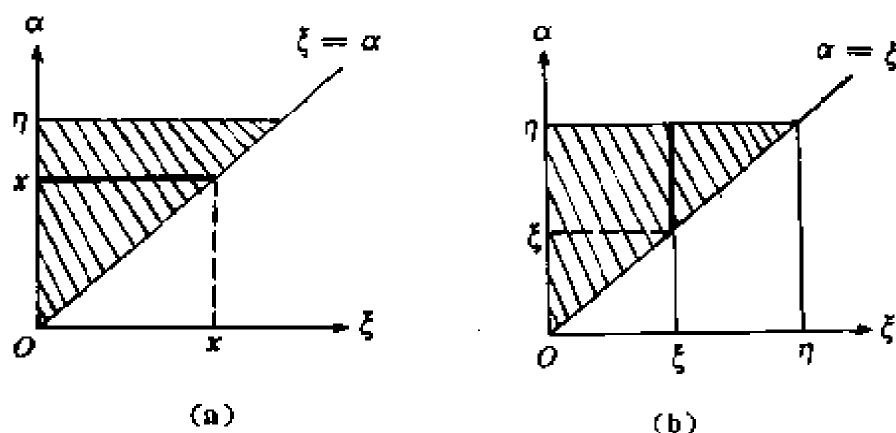


图 10.1 积分顺序改变前后

(a)改变前；(b)攻变后

$$\int_{\xi}^{\eta}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\eta-x}\sqrt{x-\xi}}=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}2\mathrm{d}\theta=\pi \tag{10.3}$$

这样,式(10.2)可写成

$$\int_{0}^{\eta}\frac{t(x)}{\sqrt{\eta-x}}\mathrm{d}x=\pi\int_{0}^{\eta}f(\xi)\mathrm{d}\xi \tag{10.4}$$

将此式对 η 微商,得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\int_{0}^{\eta}\frac{t(x)}{\sqrt{\eta-x}}\mathrm{d}x=\pi f(\eta) \tag{10.5}$$

在式中用 ξ 代替 η,写成与式(10.1)相对应的形式,有

$$f(\xi)=\frac{1}{\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\int_{0}^{\xi}\frac{t(x)\mathrm{d}x}{\sqrt{\xi-x}} \tag{10.6}$$

它就是积分方程(10.1)的解。在地震学中,经常将积分变量作变换,$\xi\to a-\xi$ 及 $x\to a-x$,这样,对应的关系是

$$t(x)=\int_{x}^{a}\frac{f(\xi)}{\sqrt{\xi-x}}\mathrm{d}\xi \tag{10.7}$$

及

$$f(\xi)=-\frac{1}{\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\int_{\xi}^{a}\frac{t(x)}{\sqrt{x-\xi}}\mathrm{d}x \tag{10.8}$$

现在来讨论走时反演问题。为简便,设有表面震源及平地球模型,波到达台站的走时为 T,它与台站与震源的距离 X 有关,即走时记为 $T(X)$。介质的速度分布只随深度 z 变化,记作 $c(z)$。按射线理论,介质中地震射线上任何点的射线参数 p 都是相同的,且

$$p=\frac{\sin i}{c(z)} \tag{10.9}$$

式中 i 是射线与 z 轴的夹角(见图 10.2)。射线最深处,有 $i=\frac{\pi}{2}$,此最大深度记为 $Z(p)$,它应满足式(10.9),为 $c(Z(p))=\frac{1}{p}$。当速度函数 $c(z)$ 给定时,可计算出最大深度。如果给定射线参数 p,则射线到达地表的水平距离也可以算出,有

$$X(p) = 2\int_0^{Z(p)} \tan i \mathrm{d}z = 2\int_0^{Z(p)} \frac{p\mathrm{d}z}{\sqrt{(c(z))^{-2} - p^2}} \qquad (10.10)$$

对于走时也可得到

$$T(p) = 2\int_0^{Z(p)} \frac{(c(z))^{-2}\mathrm{d}z}{\sqrt{(c(z))^{-2} - p^2}} \qquad (10.11)$$

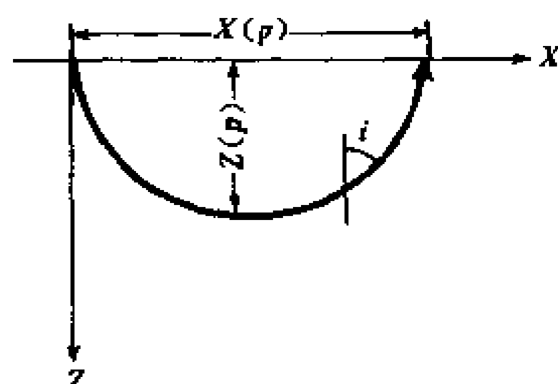


图 10.2　平地球模型中的射线

由于$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = \sin i_0 / c(0)$，这里 i_0 及 $c(0)$都是地表处的值，因而射线参数也可表示为

$$p = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} \qquad (10.12)$$

在地表面，$X(p)$和 $T(p)$都是可测量到的，我们的反演问题就是根据测量到的 $X(p)$和 $T(p)$来确定地球模型的速度分布函数 $c(z)$。

若考虑球对称地球模型，则射线参数为

$$p = \frac{r\sin i}{c(r)} \qquad (10.13)$$

式中r是径向坐标，i是射线与径向方向的夹角(图10.3)。震中距$\Delta(p)$可写成(震源与接收点都在地表)

$$\Delta(p) = 2\int_{r_p}^{a} \tan i \frac{\mathrm{d}r}{r} = 2p\int_{r_p}^{a} \frac{1}{\left(\frac{r}{c}\right)^2 - p^2} \frac{\mathrm{d}r}{r} \qquad (10.14)$$

式中 a 为地球半径，r_p 为射线最深点的半径，也可得出走时公式为

$$T(p) = 2\int_{r_p}^{a} \frac{\left(\frac{r}{c}\right)^2}{\sqrt{\left(\frac{r}{c}\right)^2 - p^2}} \frac{\mathrm{d}r}{r} \tag{10.15}$$

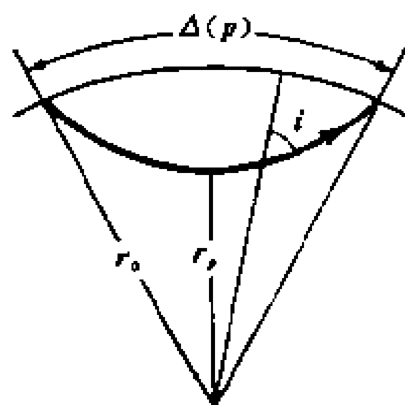


图 10.3 球地球模型中的射线

射线参数也可表示为

$$p = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}\Delta} \tag{10.16}$$

比较两种模型的所有公式，它们之间的相当性即是展平变换关系(参看第八章§5)。用球模型的量 $a\Delta(p)$, $a\ln\left(\frac{a}{r}\right)$, $\frac{ac(r)}{r}$, $\frac{p}{a}$ 去替代平模型的所有公式的相应量 $X(p)$、z、$c(z)$、p，就可直接得到球模型问题中的所有公式。因而在这里只需考虑平模型问题就足够了。

平模型的反演问题，要从式(10.10)中确定未知的速度分布 $c(z)$。为此，我们要将此关系简化到 Abel 积分方程的形式。在式(10.10)中以 $c^{-2}(z)$ 为积分变量，则可得到

$$\frac{X(p)}{2p} = \int_0^{Z(p)} \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{c^{-2}(z) - p^2}} = \int_{c_0^{-2}}^{p^2} \frac{\mathrm{d}z/\mathrm{d}(c^{-2})}{\sqrt{c^{-2} - p^2}} \mathrm{d}(c^{-2}) \tag{10.17}$$

对照 Abel 结果的式(10.7)和式(10.8)，可解得

$$z(c) = -\frac{1}{\pi}\int_{c_0^{-2}}^{c^{-2}} \frac{X(p)/2p}{\sqrt{p^2 - c^{-2}}}\mathrm{d}(p^2) = -\frac{1}{\pi}\int_{c_0^{-1}}^{c^{-1}} \frac{X(p)}{\sqrt{p^2 - c^{-2}}}\mathrm{d}p \tag{10.18}$$

已知观测数据 $X(p)$，按式(10.18)可计算出某一速度值 c 的深度 z。也可分部积分，将上面结果改写为

$$z(c) = -\frac{1}{\pi}\int_{\mathrm{arch}(c/c_0)}^{0} X(p)\mathrm{d}(\mathrm{arch}(pc)) = \frac{1}{\pi}\int_{X(c_0^{-1})\ 0}^{X(c^{-1})} \mathrm{arch}(pc)\mathrm{d}X \tag{10.19}$$

按相当性，也可直接得到球地球模型的结果，有

$$\ln\left[\frac{a}{r(c)}\right] = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\Delta(\frac{r}{c})} \mathrm{arch}\left(\frac{pc}{r}\right)\mathrm{d}\Delta \tag{10.20}$$

运用上式时，先选定 $\frac{r}{c}$ 值，然后将 $\Delta=\Delta(p)$ 关系代入积分式，这时积分上限也被确定，进行计算(通常取 $p\geqslant\frac{r}{c}$)就能得到 $\ln(\frac{a}{r})$，它对应于给定的 $\frac{r}{c}$ 值，由此就可算出 $c(r)$。

式(10.18)和式(10.20)都称作为 Herglotz-Wiechet 公式。式(10.18)成立的条件是 $X(p)$ 必须连续。当有低速层存在时，$X(p)$ 要发生间断，所以 H-W 公式不适合于低速层存在的情况，对于介质中存在速度快速增长层(所谓高速层)的情况是适用的，这种情况下的走时曲线是一条三折曲线(图 10.4)。对于那些未穿透速度快速增加层顶面的射线，射线进入越深，它在地表的出射点离震源越远。但对那些穿透快速层但在快速层转折的射线，则穿透越深，射线在地表的出射点离震源越近。如果射线在快速层下转折，这时地表出射点的规律就与第一种情况相同。当然，所有情况下，走时与射线参数都是震中距的函数，即有 $T(X)$ 与 $p(X)$。从走时曲线图上可看出，第一、三种情况，曲线都是向上凸的，而对于第二种情况却是向上凹的，这是因为这里有 $\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}X^2}=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}X}>0$。

作为上面讨论过的反演问题的特殊情况，这里给出 Slichler

(1932)计算过的一个实例。考虑一个均匀半空间上覆盖一层厚度为 h 的另一种介质的均匀层,如图 10.5 所示。均匀层的速度为 c_0,半空间的速度为 c_1,则地震波在这种介质中传播的主要震相有,在上层传播的直达波 P,由两介质交接面反射的 P_MP 波,当接收点足够远时(满足 $\sin i_h = c_0/c_1$ 条件)的首波 P_n。相应的 X-p 关系也已示于图中。

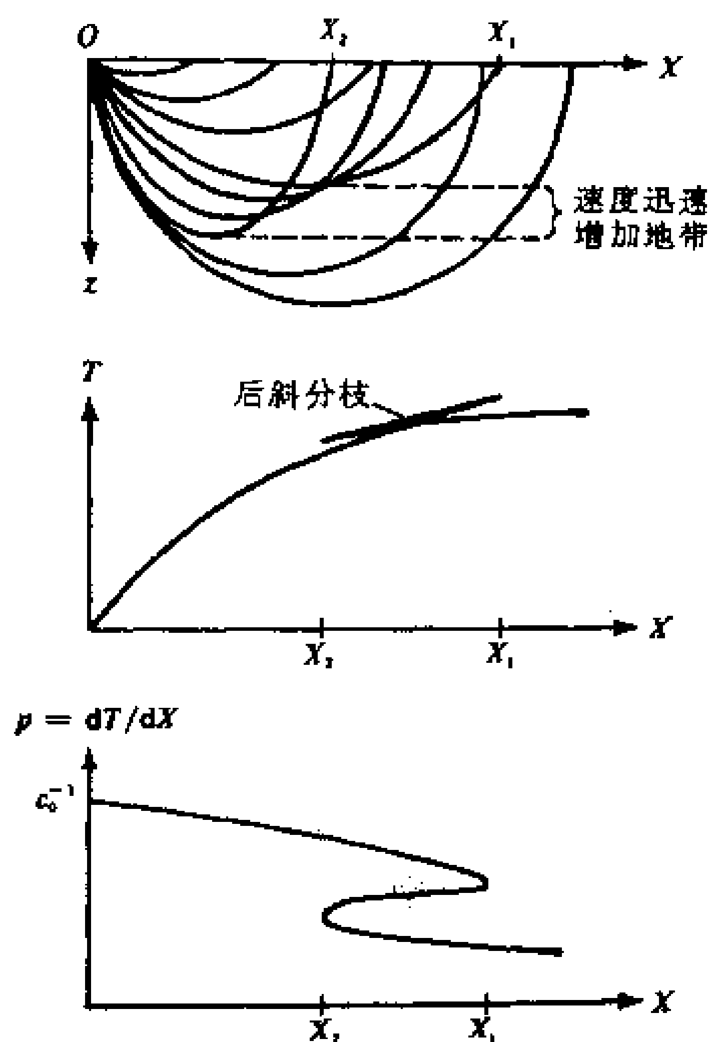


图 10.4 有速度快速增加层时的走时曲线

对于 P_MP 波,走时 $T(X)$ 有

$$T(X) = \frac{2}{c_0}\left[h^2 + \left(\frac{X}{2}\right)^2\right]^{1/2}$$

该震相的 $X(p)$ 为

$$X(p)=\frac{2hp}{\sqrt{c_0^{-2}-p^2}},\quad c_1^{-1}<p<c_0^{-1} \tag{10.21}$$

将它代入式(10.18)中，可得当 $c_0^{-1}>c^{-1}>c_1^{-1}$ 时的 $z(c)$ 为

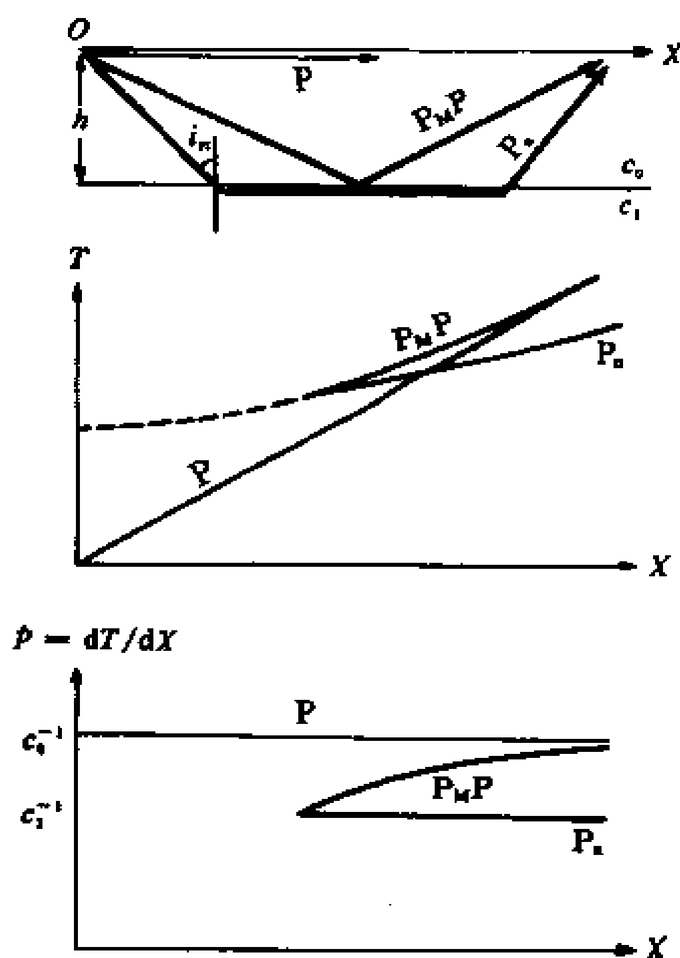


图 10.5　均匀半空间覆盖均匀层中的射线与走时曲线

$$z(c)=-\frac{1}{\pi}\int_{c_0^{-1}}^{c^{-1}}\frac{2hp\mathrm{d}p}{\sqrt{c_0^{-2}-p^2}\,\sqrt{p^2-c^{-2}}}=h \tag{10.22}$$

上式表明，只要给出速度 c 的范围，就能正确地确定均匀层的厚度 h。这类反演最重要的是要确认不同震相的初至，这直接影响到能否正确得出走时。经常会遇到早到震相的尾波干扰迟到震相的初至，使之不易识别。

下面讨论有低速层存在时的反演问题，如图 10.6 所示的平模

型，从某一深度 z_1 起，速度 $c(z)$ 开始随深度 z 而减小，达到最低值，然后又随深度而增大，到 $\bar{z}_1$ 处，速度回恢到 z_1 处的值，将 $z_1 \sim \bar{z}_1$ 深度范围的介质称为低速带(层)。不会出现这样的射线，它的最低点在这个范围内达到。极限情况下可存在在 $\bar{z}_1$ 处达到最低点的射线，在这种情况下，走时曲线出现一个断口(图 10.7)，$X(p)$ 不是连续函数，显然不符合 H-W 公式的条件，因而不能直接应用 H-W 公式。

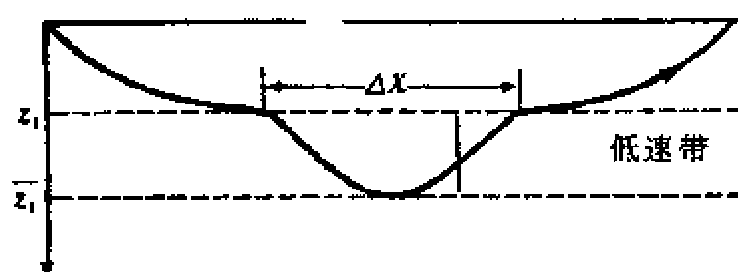


图 10.6　有低速带时的地震射线

Slichter 提出了解决这个问题的办法。根据观测到的走时曲线图中的不连续间隔 ΔX 与 ΔT，可求出低速带厚度的最大可能值(上限)。由图 10.6，间隔 ΔX 与低速带上、下界面位置之间的关系为

$$\frac{\Delta X}{2} = \int_{z_1}^{\bar{z}_1} \tan i \, \mathrm{d}z \tag{10.23}$$

式中 i 是那条最低点在低速带下界面的射线与垂直轴的夹角。相应的走时间隔为

$$\frac{\Delta T}{2} = \int_{z_1}^{\bar{z}_1} \frac{\mathrm{d}z}{c(z)\cos i} = \int_{z_1}^{\bar{z}_1} \frac{p_1 \mathrm{d}z}{\sin i \cos i} = p_1 \frac{\Delta X}{2} + p_1 \int_{z_1}^{\bar{z}} \cot i \mathrm{d}z \tag{10.24}$$

式中 p_1 是上述射线的射线参数，注意，这也是最低点在低速带上界面上射线的射线参数，也就是

$$p_1 = \frac{1}{c(z_1)} = \frac{1}{c(\bar{z}_1)}$$

若低速带内介质速度不变，则 i 是不变的，因而对 $\tan i$ 和 $\cot i$ 积分可得积分值 αh 与 h/α。这里 h 为低速带厚度，$\alpha=\tan i$。若低速带由一组均匀薄层叠成，则相应的积分值为 $\Sigma\alpha_n h_n$ 和 $\Sigma h_n/\alpha_n$，其中 h_n 是第

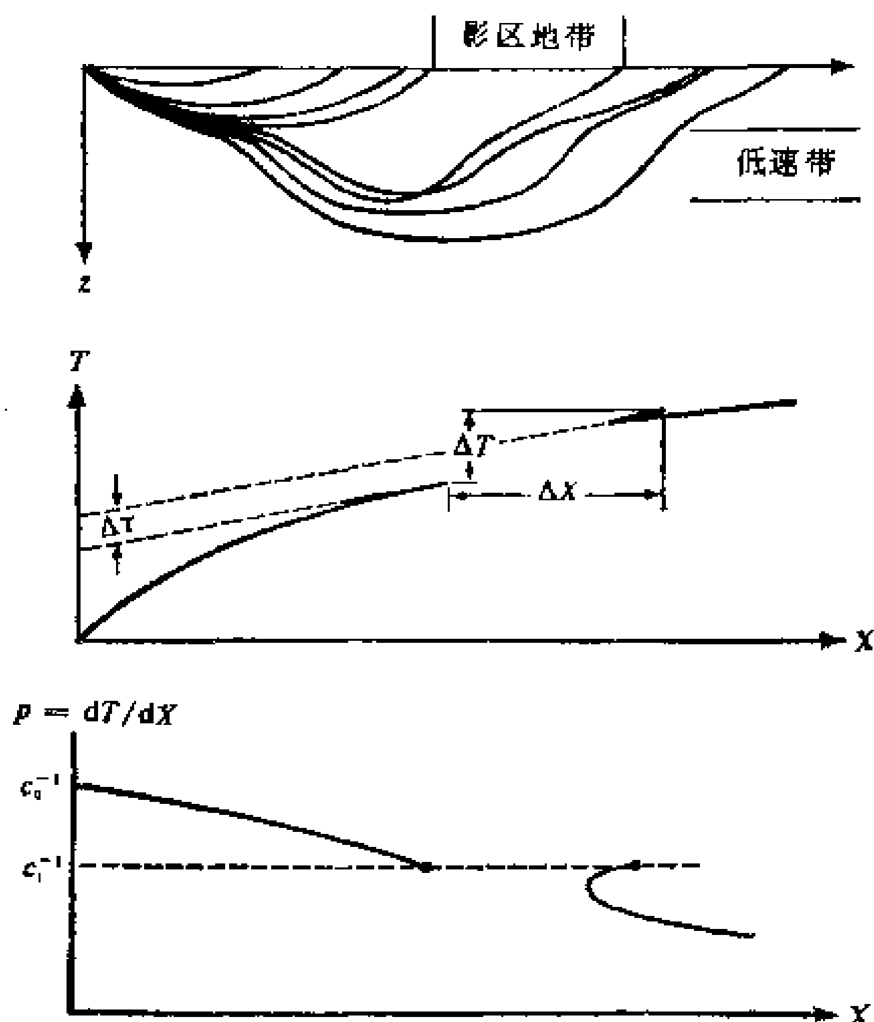


图 10.7　有低速带时的影区及走时曲线

n 个薄层的厚度，$\alpha_n=\tan i_n$。因为 ΔX 和 ΔT 都是给定值，因而这些值也为定值。如果对上述两种情况给定相同的 ΔX 与 ΔT，则应有

$$\alpha h\cdot(h/\alpha)=h^2=(\sum\alpha_n h_n)\cdot(\sum h_n/\alpha_n)$$

样会有 $(\sum h_n)^2\leqslant h^2$，相等的情况是所有的 $\alpha_n(n=1,2,\cdots)$ 都相同因而可以得出结论：当低速层速度均匀时，其厚度值最大。设这均匀

速度值为 c_L，按式(10.23)和(10.24)得

$$\left.\begin{aligned}\frac{\Delta X}{2} &= \frac{p_1(\bar{z}_1 - z_1)_{\max}}{(c_L^{-2} - p_1^2)^{1/2}} \\ \text{及} \qquad \frac{\Delta T}{2} &= \frac{c_L^{-2}(\bar{z}_1 - z_1)_{\max}}{(c_L^{-2} - p_1^2)^{1/2}}\end{aligned}\right\} \tag{10.25}$$

消去式(10.25)中的 c_L，那么可看出，只要从走时曲线观测到间隔 ΔX 与 ΔT，就可得到低速带厚度的最大估算值。

Gerver 和 Markusheritch(1966)提出过另外的计算方法。

延迟函数 $\tau(p)$ 的定义为

$$\tau(p) = T(p) - pX(p) \tag{10.26}$$

τ 是走时曲线上某点切线在 T 轴上的截距，而 p 就是该条切线的斜率。将式(10.10)和式(10.11)代入上式，得

$$\tau(p) = 2\int_0^{Z(p)} \sqrt{c^{-2}(z) - p^2}\,\mathrm{d}z \tag{10.27}$$

它随 $Z(p)$ 单调增加而随 p 单调减小。

由于低速带存在，$\tau(p)$ 也出现间断 $\Delta\tau$，有

$$\Delta\tau = \Delta T - p_1\Delta X \tag{10.28}$$

将式(10.26)对 p 微商，并考虑关系 $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}X} = p$，可得到

$$\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}p} = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}P} - p\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}p} - X(p) = -X(p) \tag{10.29}$$

若 $\tau(p)$ 已知，则据此式就可确定 $X(p)$。再由式(10.26)确定 $T(p)$。

另外，还可用 (T_i, X_i) 来确定 $\tau(p)$，方法由 Bessonva(1974)提出。

考虑量 $T(p_0) - pX(p_0)$，这里将 p 当作固定不变的量，而 p_0 是可以变动的，当 $p_0 = p$ 时，此量即为 $\tau(p)$。将 $T(p_0) - pX(p_0)$ 对 p_0 进行微商，则有 $\frac{\partial}{\partial p_0}[T(p_0) - pX(p_0)] = (p_0 - p)X(p_0)$，在 $p_0 = p$ 处微商为零，而量 $T(p_0) - pX(p_0)$ 有极值。根据一组资料 (T_i, X_i)，任意取定 p 值(如取 $p = 0.16$)，构成 $T_i - pX_i$，以 X 值为水平坐标，以

$T-pX$ 为垂直坐标，将坐标中(T_i, X_i)相应的点连成曲线（图10.8），找出曲线的极点，其横坐标 $X_m=X_m(p=0.16)$，其纵坐标就是对应的 $\tau=\tau(p=0.16)$。只要 $\tau(p)$已知，就可测出 $X(p)$与 $T(p)$，还可求出间隔 ΔX 与 ΔT，这是因为$\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}p}$在 p_1-0 与 p_1+0 间的差给出 ΔX，将 ΔX 和 $\Delta\tau$ 代入式(10.28)即可得 ΔT。

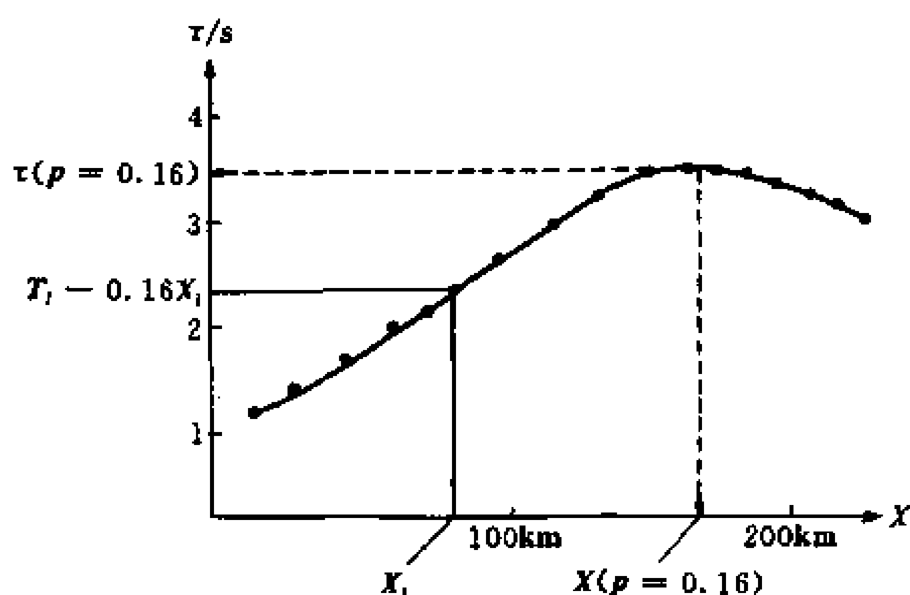


图 10.8 用图线确定 τ 值

现在来讨论低速层存在时的速度反演公式。从下述恒等式开始：

$$Z(p)=\int_0^{Z(p)}\left\{\frac{1}{\pi}\int_{p^2}^{\frac{1}{c^2(z)}}\frac{\mathrm{d}(q^2)}{\sqrt{(c^{-2}(z)-q^2)\ (q^2-p^2)}}\right\}\mathrm{d}z \tag{10.30}$$

只要用 $q^2=p^2\cos^2\theta+\frac{1}{c^2}\sin^2\theta$ 代入上式即可证明上述恒等式。同时注意到，当射线确定时，p 是一定的，故关于 z 的积分上限 $Z(p)$是该射线的最大深度，而介质的速度分布 $c(z)$是未知的，故关于 q^2 的积分上限是变化的，与速度分布有关。如果速度分布如图 10.9 中曲线所示（这里只表示$\frac{1}{c(z)}$曲线，是任意假定的，只知有低速带存在，不管低

速带有几个。图中提出两个低速带)，则式(10.30)的积分区域就是图中阴影区域，只含一个低速带。若射线参数值较小，则可能包含两个低速带。改变式(10.30)的积分顺序，并写成两个积分区域的形式，将低速带对应的区域分离出来，有

$$Z(p)=\frac{2}{\pi}\int_{p}^{\frac{1}{c_0}}\frac{q}{\sqrt{q^2-p^2}}\left(\int_0^{Z(q)}\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{c^{-2}(z)-q^2}}\right)\mathrm{d}q+I(p)$$

(10.31)

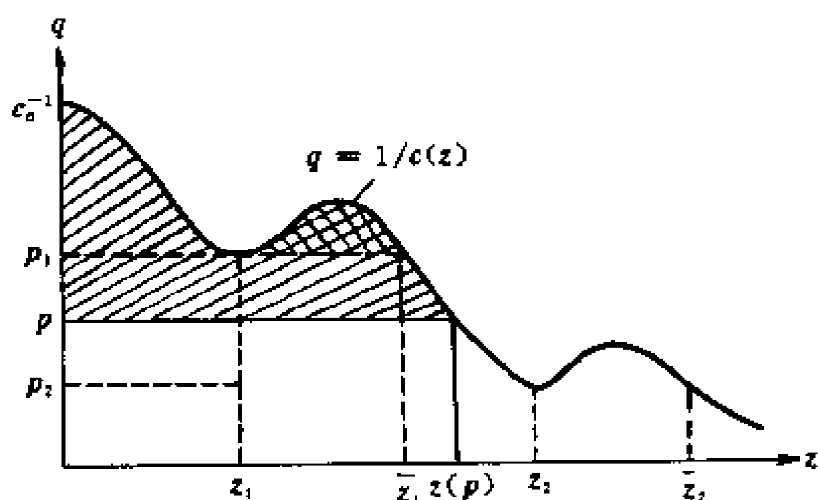


图 10.9　式(10.30)的积为区域

式中 $I(p)$就是低速带部分的积分值。由式(10.10)知，$X(q)=2\int_0^{Z(q)}\frac{q\mathrm{d}z}{\sqrt{c^{-2}(z)-q^2}}$，故式(10.31)可简写成

$$Z(p)=\frac{1}{\pi}\int_{p}^{\frac{1}{c_0}}\frac{X(q)\mathrm{d}q}{\sqrt{q^2-p^2}}+I(p) \tag{10.32}$$

式中第一项是没有低速带的 H-W 反演公式，第二项 $I(p)$是低速带的影响。当射线穿过了 k 个低速带时，有 $p_k>p>p_{k+1}$，p_k 是第 k 个低速带界面处的速度倒数值。这样，$I(p)$可表示为

$$I(p)=\sum_{i=1}^{k}\frac{2}{\pi}\int_{z_i}^{\bar{z}_i}\left[\int_{p_i}^{\frac{1}{c(z)}}\frac{q\mathrm{d}q}{\sqrt{c^{-2}(z)-q^2}\sqrt{q^2-p^2}}\right]\mathrm{d}z$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \frac{2}{\pi}\int_{z_i}^{z_i'} \arctan\sqrt{\frac{c^{-2}(z) - p_1^2}{p_i^2 - p^2}}\mathrm{d}z \tag{10.33}$$

应该指出，介质虽有低速带存在，但所考虑射线 $p>p_1$，不穿透任何低速带时，$I(p)=0$，这时可直接应用 H-W 反演公式，适用于 $z<z_1$ 的上部介质。

§2 反射地震图反演

当震源的地震信号向地球内部发射，遇到界面或障碍物时，部分信号就要被反射回来，地表上记录到这些反射回来的信号，就称为反射地震图。反射地震图反演就是根据记录到的反射地震图来了解地球内部的介质特征，这种反演不直接得出速度分布，而只能求出阻抗值(ρv)，这是地震勘探部门必须的基础数据。

先从一维情况开始，一维波动方程有

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[E(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right] \tag{10.34}$$

其中 $\rho(x)$ 是介质密度，$E(x)$ 是弹性系数，对于 P 波，$E(x)=\lambda(x)+2\mu(x)$，对于 S 波，$E(x)=\mu(x)$。

将不均匀介质近似地考虑成均匀叠层组成(图 10.10)，在各层中的弹性系数 E_i 和密度 ρ_i 都是常数。这样，对于每层的波动方程解是

$$u_i = f_i(t \pm x/c_i) \tag{10.35}$$

其中 $c_i=\sqrt{E_i/\rho_i}$。

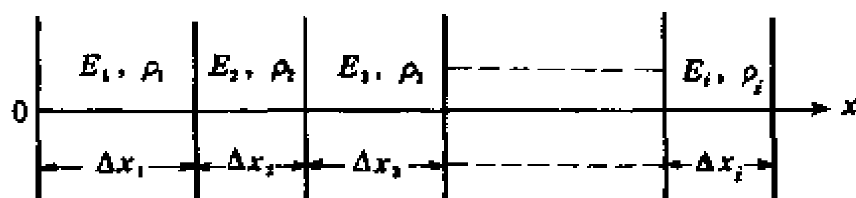


图 10.10 均匀叠层结构

这里介绍由 Goupilland (1961)提出的反演方法。设每层的厚度为 Δx_i，为简单，又设波经过每层的走时 Δt_i 都相同，即有

$$\Delta t_i = \frac{\Delta x_i}{c_i} = \Delta t = \text{常数} \tag{10.36}$$

Δt 值越小，则用叠层去代替非均匀介质的近似效果就越好。

如果在任意一个分界面上作用着一个脉冲，则在这个界面上可以接收到一系列反射脉冲，各个脉冲的时间间隔为 $2\Delta t$。记作

$$s(t) = \sum_n s_n \delta(t - 2n\Delta t) \tag{10.37}$$

对这脉冲作 Fourier 变换，有

$$\tilde{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{i\omega t} dt = \sum_n s_n \exp(2in\omega\Delta t) \tag{10.38}$$

令 $z = \exp(2i\omega\Delta t)$，改变函数表示形式，则式(10.38)可表示为

$$S(z) = \sum_n s_n z^n \tag{10.39}$$

此 $S(z)$称为脉冲序列 $s(t)$的 z 变换。

先考虑第 i 层界面(见图 10.11)。单位脉冲从第 i 层介质中入射，用 r_i 和 t_i 分别表示反射和透射脉冲；而若单位脉冲从第 $i+1$ 层介质中入射，则用 $\bar{r}_i$ 和 $\bar{t}_i$ 分别表示反射和透射脉冲。在这界面上应

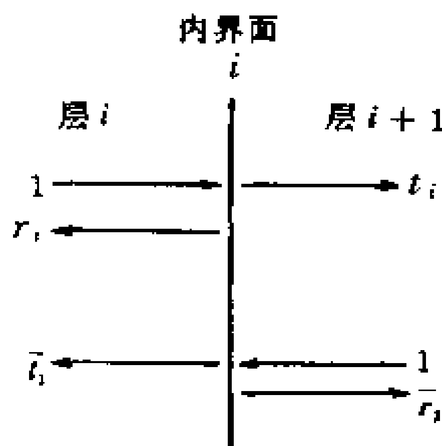


图 10.11 反射因数与透射因数的确定

保持位移和应力连续，即 $u_i = u_{i+1}$，$E_i \frac{\partial u_i}{\partial x} = E_{i+1} \frac{\partial u_{i+1}}{\partial x}$。由此连续条件可推得这些脉冲的振幅关系：

$$1 + r_i = t_i, \quad 1 + \bar{r}_i = \bar{t}_i \tag{10.40}$$

及

$$r_i = -\bar{r}_i = \frac{c_i\rho_i - c_{i+1}\rho_{i+1}}{c_i\rho_i + c_{i+1}\rho_{i+1}} \tag{10.41}$$

接着，考虑如图 10.10 所示的叠层。在 $x=0$ 处作用一个脉冲平面，地震波进入叠层内部，在每个界面上都要发生反射和透射。也在 $x=0$ 处接收和记录这些反射回来的波，此记录图即为反射地震图。可将各个界面的反射和透射情况表示在图 10.12 上。在任一界面上，脉冲到达的时间为 $2\Delta t$ 的整数倍，而脉冲的辐度可用式(10.40)所表示的反射、透射因数的关系来确定。

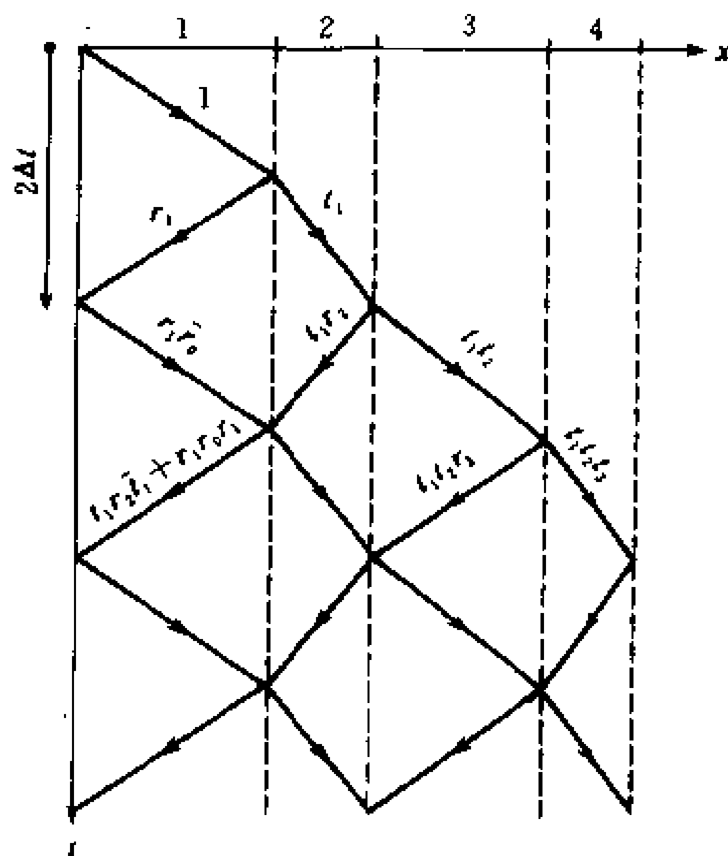


图 10.12　各界面上多重反射和透射示意图

在地表首先记录到的是由第一个界面反射回来的反射波，它经过了 $2\Delta t$ 的时间间隔，它的反射因数应为 r_1，这可通过测定反射回来的脉冲大小而得到。根据式(10.40)和式(10.41)，可求得 t_1、$\bar{r}_1$ 和 $\bar{t}_1$。接着在 $t=4\Delta t$ 时刻，可观测到第二个界面的一次反射波和第一个界面的二次反射波，它们是 $t_1 r_2 \bar{t}_1 + r_1 \bar{r}_0 r_1$。这样也可按测得的脉冲大小确定出 r_2，再通过式(10.40)和式(10.41)计算得到 t_2，$\bar{r}_2$ 和 $\bar{t}_2$。如此继续下去直到最后一个界面 n 的反射波观测到为止。

实际上，我们只需测得 $r_1, r_2, \cdots, r_n$ 和地表层的阻抗值 $c_1\rho_1$，就可按式(10.14)求出其他层的阻抗，有递推关系式

$$c_{i+1}\rho_{i+1} = \frac{1-r_i}{1+r_i} c_i \rho_i \qquad (i > 1) \tag{10.42}$$

我们也可以不用上述离散化的办法来讨论反演问题。在 $\rho(x)$ 和 $E(x)$ 为连续函数的情况下，直接从波动方程(10.34)着手，首先进行自变量变换，令 $\mathrm{d}x = c(x)\mathrm{d}\xi$，则

$$\xi = \int^x \frac{\mathrm{d}x}{c(x)} \tag{10.43}$$

其中 $c(x)=[E(x)/\rho(x)]^{1/2}$，$\xi$ 的物理意义就是走时。此时有

$$\frac{\partial^2 u(\xi,t)}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u(\xi,t)}{\partial t^2} = -\frac{\mathrm{d}[\ln(\rho c)]}{\mathrm{d}\xi} \frac{\partial u(\xi,t)}{\partial \xi} \tag{10.44}$$

再作函数变换

$$\varphi = (\rho c)^{1/2} u \tag{10.45}$$

则方程(10.44)有

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = q(\xi)\varphi \tag{10.46}$$

式中

$$q(\xi) = \frac{1}{\eta}\frac{\mathrm{d}^2\eta}{\mathrm{d}\xi^2}, \quad \eta = (\rho c)^{1/2} \tag{10.47}$$

当解具有谐变形式 $\exp(-\mathrm{i}\omega t)$ 时，则方程(10.46)变成

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}\xi^2} - q(\xi)\varphi + \omega^2\varphi = 0 \tag{10.48}$$

这是一维 Schrödimger 方程。我们的反演问题就是，如何根据观测到

的反射地震图先来单一地确定 $q(\xi)$，然后再根据式(10.47)，从 $q(\xi)$ 中求出阻抗 η^2，注意到 η^2 也是走时 ξ 的函数。应该指出，在连续介质情况下，要严格给出反演公式是困难的。

对于离散化方法，这里根据 Claerbout(1968)的工作来推导出反演公式。从前面的讨论已经知道，为了计算第 i 个界面上的反射波和透射波，需要知道第 $i-1$ 个界面上的反射波和透射波。如图 10.13 所示，定义在第 i 层介质中，下行波有 $D_i\exp\left[-\mathrm{i}\omega\left(t-\frac{x}{c_i}\right)\right]$ 及 $D_i'\cdot\exp\left[-\mathrm{i}\omega\left(t-\frac{x}{c_i}\right)\right]$，而上行波有 $U_i\exp\left[-\mathrm{i}\omega\left(t-\frac{x}{c_i}\right)\right]$ 及 $U_i'\exp\left[-\mathrm{i}\omega\cdot\left(t-\frac{x}{c_i}\right)\right]$，其中 D_i,D_i' 和 U_i,U_i' 都是 ω 的函数。这样，按反射因数和透射因数的定义，应该有

$$\left.\begin{aligned} D_{i+1} &= t_iD_i' + \bar{r}_iU_{i+1} \\ U_i' &= r_iD_i' + \bar{t}_iU_{i+1} \end{aligned}\right\} \tag{10.49}$$

第二式的 D_i' 用第一式代入，写成矢量形式有

$$\begin{pmatrix} U_i' \\ D_i' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_i - \dfrac{r_i\bar{r}_i}{t_i} & \dfrac{r_i}{t_i} \\ -\dfrac{\bar{r}_i}{t_i} & \dfrac{1}{t_i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{i+1} \\ D_{i+1} \end{pmatrix} \tag{10.50}$$

又因为 $r_i=-\bar{r}_i$，$\bar{t}_i-\frac{r_i\bar{r}_i}{t_i}=\frac{1}{t_i}$，上式简化为

$$\begin{pmatrix} U_i' \\ D_i' \end{pmatrix} = \frac{1}{t_i}\begin{pmatrix} 1 & r_i \\ r_i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{i+1} \\ D_{i+1} \end{pmatrix} \tag{10.51}$$

在第 i 层中传播的波，还有关系

$$\left.\begin{aligned} U_i &= \exp(\mathrm{i}\omega\Delta t)U_i' \\ D_i &= \exp(-\mathrm{i}\omega\Delta t)D_i' \end{aligned}\right\} \tag{10.52}$$

可用 U_i 和 D_i 替代式(10.51)中的 U_i' 和 D_i'，得到

$$\begin{pmatrix} U \\ D \end{pmatrix}_i = \frac{1}{t_i}\begin{pmatrix} \exp(\mathrm{i}\omega\Delta t) & r_i\exp(\mathrm{i}\omega\Delta t) \\ r_i\exp(-\mathrm{i}\omega\Delta t) & \exp(-\mathrm{i}\omega\Delta t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ D \end{pmatrix}_{i+1} \tag{10.53}$$

引入新符号 $w=\exp(\mathrm{i}\omega\Delta t)$，将 w 及 $z=\exp(2\mathrm{i}\omega\Delta t)$ 代入上式，则有

$$\begin{pmatrix} U \\ D \end{pmatrix}_i = \frac{1}{\tau w t_i} \begin{pmatrix} z & z r_i \\ r_i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ D \end{pmatrix}_{i+1} \tag{10.54}$$

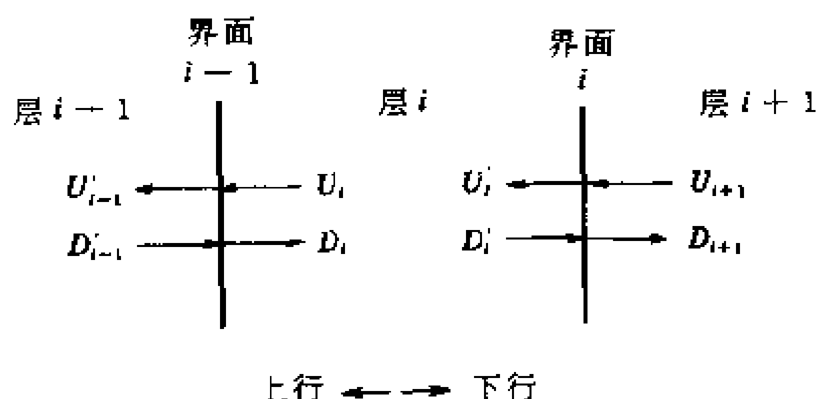


图 10.13　上行波和下行波定义示意

这是递推关系，由它可以推出第 n 个界面的上行波和下行波到达地表面的情况，有

$$\begin{pmatrix} U \\ D \end{pmatrix}_1 = \frac{1}{w^n} \frac{1}{t_1 t_2 \cdots t_n} \begin{pmatrix} z & z r_1 \\ r_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & z r_2 \\ r_2 & 1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} z & z r_n \\ r_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ D \end{pmatrix}_{n+1} \tag{10.55}$$

式中的矩阵乘积可表示为

$$\begin{pmatrix} U \\ D \end{pmatrix}_1 = \frac{1}{w^n} \begin{pmatrix} z^n F_n\left(\frac{1}{z}\right) & z^n G_n\left(\frac{1}{z}\right) \\ G_n(z) & F_n(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ D \end{pmatrix}_{n+1} \tag{10.56}$$

式中 $F_n(z)$和 $G_n(z)$是关于 z 的 $n-1$ 次多项式，有

$$F_n(z) = \frac{1}{t_1 t_2 \cdots t_n}(1 + A_1 z + A_2 z^2 + \cdots + A_{n-1} z^{n-1})$$

$$G_n(z) = \frac{1}{t_1 t_2 \cdots t_n}(r_n + B_1 z - B_2 z^2 + \cdots + B_{n-1} z^{n-1})$$

其中 A_i、B_i 为常数。$F_n(z)$和 $G_n(z)$的反变换应限定在 $0 \leqslant t \leqslant 2(n-1)\Delta t$ 范围内，在此范围外为零。

现在的反演问题是根据地表所记录到反射地震图来求解所有界面上的反射因数(或每层的阻抗)。设在表面观测到的上行波的 z 变换为 $R(z)$，相应的下行波的 z 变换由 $t=0$ 时作用的脉冲源和在自

由表面产生的上行波 $R(z)$ 的反射组成，震源脉冲的 z 变换为 1，自由表面的反射因数为 +1，故此下行波的 z 变换为 $1+R(z)$，所以自由表面处的波可写成

$$\begin{pmatrix} U \\ D \end{pmatrix}_1 = \begin{pmatrix} R(z) \\ 1 + R(z) \end{pmatrix} \tag{10.57}$$

在最后层，即第 $(n+1)$ 层中只有下行波而无上行波，此下行波记为 $T(z)$，这样这层界面上的波有

$$\begin{pmatrix} U \\ D \end{pmatrix}_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 \\ T(z) \end{pmatrix} \tag{10.58}$$

将式(10.57)与(10.58)代入式(10.56)，则有

$$\begin{pmatrix} R(z) \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{w^n} \begin{bmatrix} z^n F_n\left(\frac{1}{z}\right) & z^n G_n\left(\frac{1}{z}\right) \\ G_n(z) - z^n F_n\left(\frac{1}{z}\right) & F_n(z) - z^n G_n\left(\frac{1}{z}\right) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ T(z) \end{pmatrix} \tag{10.59}$$

令 $F_n(z) - z^n G_n\left(\frac{1}{z}\right) = M(z)$，则从式(10.59)中可解出

$$\left.\begin{aligned} T(z) &= w^n / M(z) \\ R(z) &= z^n G_n\left(\frac{1}{z}\right) / M(z) \end{aligned}\right\} \tag{10.60}$$

这里 $M(z)$ 是一个 n 阶多项式，有

$$M(z) = c_0 + c_1 z + \cdots + c_n z^n \tag{10.61}$$

$c_0 \cdots, c_n$ 是常数，第 1 个和最后一个分别为

$$c_0 = \frac{1}{t_1 t_2 \cdots t_n} \text{ 和 } c_n = \frac{-r_n}{t_1 t_2 \cdots t_n}$$

考察 $M(z)$ 的物理意义。因为 $w^n = \exp(in\omega\Delta t)$ 是脉冲通过 n 个层时的单程延迟，所以 $T(z)/w^n$ 是第 n 个界面上去掉了延迟的透射地震图的 z 变换，因而从式(10.60)的第一式中看出，$M(z)$ 相当于一反褶积滤波器的 z 变换。这样，当将去掉了延迟的透射地震图作为输入时，这滤波器的输出就是震源脉冲。由于 $z = \exp(2i\omega\Delta t)$，可看出

当$|z|\leqslant 1$时，式(10.61)用多项式表示的$M(z)$是解析的，即$M(z)$在ω上半平面是解析的，而且$1/M(z)$也是解析的。由式(10.60)和式(10.61)可得

$$\left[1+R(z)+R\left(\frac{1}{z}\right)\right]M\left(\frac{1}{z}\right)=F_n(z)M\left(\frac{1}{z}\right)/M(z)+z^{-n}G_n(z)$$

$$=\left[F_n(z)M\left(\frac{1}{z}\right)+z^{-n}G_n(z)M(z)\right]/M(z)$$

$$=\left[F_n(z)F_n\left(\frac{1}{z}\right)-G_n(z)G_n\left(\frac{1}{z}\right)\right]/M(z)$$

此等式最后部分的分子与式(10.56)中的传播矩阵的行列式只相差一个因子z^n。而每一层矩阵的行列式是

$$\det\frac{1}{wt_i}\begin{pmatrix}z & zr_i\\ r_i & 1\end{pmatrix}=\frac{1-r_i}{t_i}$$

已知矩阵乘积的行列式等于每一个矩阵行列式的乘积，这样有

$$\left[1+R(z)+R\left(\frac{1}{z}\right)\right]M\left(\frac{1}{z}\right)=\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{1-r_i}{t_i}\right)/M(z) \qquad (10.62)$$

注意到$1/M(z)$相当于$t<0$时的没有延迟的透射地震图的z变换，因而不应该有z的负幂次项。现将反射地震图写作

$$R(t)=R_1\delta(t-2\Delta t)+R_2\delta(t-4\Delta t)+\cdots+R_n\delta(t-2n\Delta t)$$

它的z变换有$R(z)=R_1z-R_2z^2+\cdots+R_nz^n$代入式(10.62)，再应用式(10.61)，可得$(1+R_1z+\cdots+R_1z^{-1}+\cdots)(c_0+c_1z^{-1}+\cdots+c_nz^{-n})$。上面已经指出不应有$z$的负幂次项，让$z^{-1}$的系数为零时有$c_0R_1+c_1+c_2R_1+\cdots+c_nR_{n-1}=0$，同样可让其他负幂次项的系数为零，一直可到$z^{-n}$项，把这些方程写成矩阵形式，有

$$\begin{pmatrix}1 & R_1 & R_2 & \cdots & R_{n-1}\\ R_1 & 1 & R_1 & \cdots & R_{n-2}\\ R_2 & R_1 & 1 & \cdots & R_{n-3}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ R_{n-1} & R_{n-2} & R_{n-3} & \cdots & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1/c_0\\ c_2/c_0\\ c_3/c_0\\ \cdots\\ c_n/c_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-R_1\\ -R_2\\ -R_3\\ \cdots\\ -R_n\end{pmatrix} \qquad (10.63)$$

因为 $c_n/c_0=-r_n$，所以利用时刻 $2n\Delta t$ 之前的反射地震图，就可求出第 n 个界面上的反射因数 r_n。其他界面上的反射因数可类似求出。有了反射因数，就可根据式(10.42)得到各层的阻抗值 $c_i\rho_i$。

至于 $\rho(x)$ 与 $E(x)$ 连续变化的情况，可从方程(10.48)出发讨论。这个常微分方程可用WKBJ解，即当 $q(\xi)<\omega^2$ 时为振动解，当 $q(\xi)>\omega^2$ 时为指数衰减解，而 $q(\xi)=\omega^2$ 的 ξ 点称为转折点。如果 $q(\xi)$ 有界，则具有无限大频率的波没有转折点，这时，走时 ξ 实际上与无限大频率的波有关。

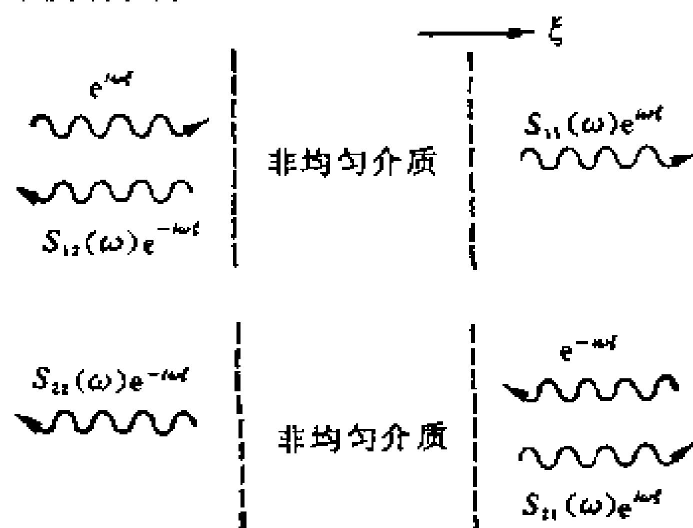


图 10.14　为确定 S 矩阵而作的波的散射图示

现在研究图 10.14 所示的连续介质中的散射问题。假定非均匀介质的两侧都是均匀介质，在均匀介质中 $q=0$，因而其中的 φ 有 $e^{\pm i\omega\xi}$ 形式。图中的上半部是把信号 $e^{i\omega\xi}$ 从左边传入非均匀介质中，有反射波 $S_{12}(\omega)e^{-i\omega\xi}$ 和透射波 $S_{11}(\omega)e^{i\omega\xi}$，下半部是信号 $e^{-i\omega\xi}$ 从右边传入非均匀介质中，有反射波 $S_{21}(\omega)e^{i\omega\xi}$ 及透射波 $S_{22}(\omega)e^{-i\omega\xi}$。根据能量互等和守恒原理，有

$$\left.\begin{aligned} & S_{11}=S_{22} \\ & |S_{11}|^2+|S_{12}|^2=1 \\ & |S_{22}|^2+|S_{21}|^2=1 \end{aligned}\right\} \tag{10.64}$$

这 4 个因数构成的矩阵是酉矩阵。

现在的反演问题是，根据在非均匀介质两侧观测到的反射波和透射波，确定出非均匀介质的 $q(\xi)$。可以采用 Ware 和 Aki(1969)的方法。假定方程(10.48)有基本解 $f_1(\xi,\omega)$ 和 $f_2(\xi,\omega)$，它们分别满足的边界条件为，当 ξ 正向足够远时，有 $f_1(\xi,\omega)\to e^{i\omega\xi}$；而当 ξ 反向足够远时，有 $f_2(\xi,\omega)\to e^{-i\omega\xi}$。因而图中上半部情况，在非均匀介质中的解可表示为 $S_{11}(\omega)f_1(\xi,\omega)$，或者为 $f_2(\xi,-\omega)+S_{12}(\omega)f_2(\xi,\omega)$，这样应该有

$$S_{11}(\omega)f_1(\xi,\omega)=f_2(\xi,-\omega)+S_{12}(\omega)f_2(\xi,\omega) \quad (10.65)$$

考虑到函数 f_1 和 f_2 在条件$\int_{-\infty}^{\infty}(1+|\xi|)|q(\xi)|d\xi<0$ 下有解析性，并考虑透射波 $S_{11}(\omega)$的因果性，方程(10.65)可变成为求解未知函数 $A(x,\xi)$的 Gel'fand-Levitan 积分方程，即有

$$A(x,\xi)=-R(\xi+x)-\int_{-\xi}^{x}A(x,\tau)R(\xi+\tau)d\tau,(\xi<x) \quad (10.66)$$

式中 $R(t)$是时间域中的反射波记录，有

$$R(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{\infty}^{\infty}S_{12}(\omega)\exp(-i\omega t)d\omega \quad (10.67)$$

解得了 $A(x,\xi)$后，势函数 $q(\xi)$有

$$q(\xi)=2\frac{dA(\xi,\xi)}{d\xi} \quad (10.68)$$

如果采用与离散情况类比的步骤，则上面推导就很容易明白。为了使这种比较能完善些，我们改变场的变量，即将位移改成为阻抗的平方根乘以位移。在此新变量的情况下，离散时的反射因数 r 和透射因数 t 的关系变为

$$\left.\begin{aligned} &t_i=\bar{t}_i\\ &t_i^2+r_i^2=1\\ &\bar{t}_i^2+\bar{r}_i^2=1\\ &r_i=-\bar{r}_i=\frac{c_i\rho_i-c_{i+1}\rho_{i+1}}{c_i\rho_i+c_{i+1}\rho_{i+1}} \end{aligned}\right\} \quad (10.69)$$

这些关系式与 S 矩阵元素间的关系式(10.64)类似。

仍按图 10.13 定义新变量的上行波 U_i 和下行波 D_i，而反射因数 r_i 和透射因数 t_i 的关系如式(10.69)，这样我们得到的传播矩阵仍与式(10.56)相同。

当边界条件给出为

$$\begin{pmatrix} U \\ D \end{pmatrix}_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 \\ w^{n+1} \end{pmatrix} \tag{10.70}$$

时，可用式(10.56)求解 U_0 和 D_0。(注意，把离散介质左侧假想加上"0"层介质，向左延伸到无限处，同样，右端$(n+1)$层向右延伸到无限处)按类比，它们相当于连续介质中的基本解 $f_1(\xi,\omega)$。用 U_0 和 D_0，按传播矩阵关系，可以算出任意层的 U_k 和 D_k。所以，对于连续介质，可写成

$$f_1(k,z) = U_k + D_k = \frac{1}{w^k}\{z^{n+1}G_n(\frac{1}{z})[F_{k-1}(z) - G_{k-1}(z)] + z^kF_n(z)[F_{k-1}(\frac{1}{z}) - G_{k-1}(\frac{1}{z})]\} \tag{10.71}$$

其反向基本解 f_1^* 相当于 $f_1(\xi,-\omega)$，相应的边界条件是

$$\begin{pmatrix} U \\ D \end{pmatrix}_{n+1} = \begin{pmatrix} w^{n+1} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{10.72}$$

从式(10.56)得到解为

$$f_1^*(k,z) = \frac{1}{w^k}\{z^{n+1}F_n\left(\frac{1}{z}\right)[F_{k-1}(z) - G_{k-1}(z)] + z^kG_n(z)\left[F_{k-1}\left(\frac{1}{z}\right) - G_{k-1}\left(\frac{1}{z}\right)\right]\} \tag{10.73}$$

同样地，连续情况下的基本解 $f_2(\xi,\omega)$ 也可通过与离散情况类比而得到，给出边界条件为

$$\begin{pmatrix} U \\ D \end{pmatrix}_0 = \begin{pmatrix} w^{n+1} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{10.74}$$

对于反向基本解 f_2^* 给出边界条件为

$$\begin{pmatrix} U \\ D \end{pmatrix}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ w^{n+1} \end{pmatrix} \tag{10.75}$$

这些解分别为

$$\begin{aligned} f_2(k,z) &= w^{n-k+1}[F_{k-1}(z) - G_{k-1}(z)] \\ f_2^*(k,z) &= w^{n+k+1}\left[F_{k-1}\left(\frac{1}{z}\right) - G_{k-1}\left(\frac{1}{z}\right)\right] \end{aligned} \tag{10.76}$$

正向基本解与反向函数间的关系是

$$f_i(k,z) = z^{n+1}f_i^*\left(k,\frac{1}{z}\right) \qquad (i = 1,2) \tag{10.77}$$

现在，可以将反射地震图和透射地震图资料来类比，得出我们要求的基本解。离散情况下，左、右两侧介质中的地震波分别有

$$\begin{pmatrix} U \\ D \end{pmatrix}_0 = \begin{pmatrix} R(z) \\ 1 \end{pmatrix} \tag{10.78}$$

及

$$\begin{pmatrix} U \\ D \end{pmatrix}_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 \\ T(z) \end{pmatrix} \tag{10.79}$$

而连续介质情况下，式(10.65)经类比，有

$$\frac{T(z)}{w^{n+1}}f_1(k,z) = \frac{f_2^*(k,z)}{w^{n+1}} + \frac{R(z)}{w^{n+1}}f_2(k,z) \tag{10.80}$$

我们已知道，在离散情况下，没有延迟的透射地震图 $T(z)/w^n$ 没有 z 的负幂次项。这样，我们对比连续介质情况，在相当于 k 界面处，在 $2k\Delta t$ 时刻之前，入射波还未到达，因而式(10.80)的左边应有

$$b_k w^k(1 - c_1 z + c_2 z^2 + \cdots) \tag{10.81}$$

式中 $b_k = t_0 t_1 \cdots t_{k-1}$。再考虑式(10.80)式的右边，引入 $K_2(k,z)$ 函数，使

$$\left.\begin{aligned} \frac{f_2^*(k,z)}{w^{n+1}} &= b_k[w^k + K_2(k,z)] \\ \frac{f_2(k,z)}{w^{n+1}} &= b_k\left[w^{-k} + K_2\left(k,\frac{1}{z}\right)\right] \end{aligned}\right\} \tag{10.82}$$

及

将式(10.81)和式(10.82)都代入式(10.80),则有

$$w^k[c_1 z + c_2 z^2 + \cdots] = K_2(k,z) + \frac{R(z)}{w^k} + R(z)K_2\left(k,\frac{1}{z}\right) \tag{10.83}$$

要使等式(10.83)成立,等式两边的各幂次项系数都应相等。左边各项幂次都大于 k,因而右边 w 的负幂项一直到 w 的正 k 幂次都应该为零,即

$$K_2(k,z) + \frac{R(z)}{w^k} + R(z)K_2\left(k,\frac{1}{z}\right) = 0 \tag{10.84}$$

由式(10.82)的第一式,有

$$K_2(k,z) = \frac{f_2^*(k,z)}{w^{n+1}b_k} - w^k \tag{10.85}$$

而根据式(10.76),$f_2^*(k,z)$ 可表示成 $F_{k-1}\left(\frac{1}{z}\right)$ 和 $G_{k-1}\left(\frac{1}{z}\right)$,最后 $K_2(k,z)$ 可表示成一个关于 w 的多项式形式,即

$$K_2(k,z) = K(k,2-k)w^{2-k} + K(k,4-k)w^{4-k} + \cdots + K(k,k)w^k \qquad (k > 2) \tag{10.86}$$

其中因数 $K(k,k)$ 可用反射因数表示,有

$$K(k,k) = \frac{1}{(1+r_{k-1})\prod_{i=0}^{k-2}(1-r_i)^2} - 1$$

即

$$r_{k-1} = \frac{1}{[1+K(k,k)]\prod_{i=0}^{k-2}(1-r_i^2)} \tag{10.87}$$

注意,这些 K 函数可以表示为反射因数,只需知道 $K(k,k)$ 即可求出它们,将式(10.86)代入式(10.84),可以写出关于这些系数的方程,有

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & R_0 \\ 0 & 0 & \cdots & R_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ R_0 & R_1 & \cdots & R_{k-1} \end{pmatrix}\right] \cdot$$

$$
\begin{pmatrix} K(k,2-k) \\ K(k,4-k) \\ \cdots \\ K(k,k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R_0 \\ -R_1 \\ \cdots \\ -R_{k-1} \end{pmatrix} \tag{10.88}
$$

这里 R_i 是 $k=i$ 时 $R(z)$ 所取得的值。上式相当于 Gel'fand-Levitan 积分方程(10.66),式中的 $K(k,k)$ 相当于 $A(x,\xi)$,由 $A(\xi,\xi)$ 可求得位势 $q(\xi)$,相应地由 $K(k,k)$ 也可按式(10.87)求出反射因数。

不管用离散方法式(10.63),或者是连续类比方法式(10.88),都是用反射地震图 R_k 反演反射因数,前者的计算是一步完成的,而后者却是分两步完成,即先从式(10.88)计算出 $K(k,k)$,再用式(10.87)求出反射因数。至此,虽已解决了一维反射地震图的反演问题,但要推广到二维或三维介质中仍极为困难。在物探上亟需解决这些问题,然而至今仍未找到很好的方法。

§3 线性化系统的离散反演问题

地震学的反演问题是通过对资料的处理,给出地球内部的结构或震源情况。这些结构和震源可由一些参数确定,称这些参数为模型参数,反演问题也就是要确定这些模型参数。这里我们从更一般的情况来叙述反演问题。资料往往是单一的一组数据,如果将矢量的定义扩大,让这一组资料数据用一个矢量来代表,每一个数据就是这个矢量的一个分量,这就可大大简化问题的表达形式。如有一组由 N 个数据组成的资料 $d_1,d_2,\cdots,d_N$,用矢量 $\boldsymbol{d}$ 来表示,有

$$
\boldsymbol{d} = [d_1,d_2,\cdots,d_N]^T \tag{10.89}
$$

这矢量的长度就是 N。同样,如果有 M 个模型参数,也可用一个长度为 M 的矢量 $\boldsymbol{m}$ 来表示,即

$$
\boldsymbol{m} = [m_1,m_2,\cdots,m_M]^T \tag{10.90}
$$

反演问题中最基本的一点就是资料和模型参数之间存在一定的关系,这种关系称作为“模型”。这种模型一般可用一个或多个公式来

表示，也就是这些公式沟通了资料与模型参数的关系。例如，最一般的情况可有

$$\left.\begin{array}{l} f_1(\boldsymbol{d},\boldsymbol{m}) = 0 \\ f_2(\boldsymbol{d},\boldsymbol{m}) = 0 \\ \cdots \\ f_L(\boldsymbol{d},\boldsymbol{m}) = 0 \end{array}\right\} \tag{10.91}$$

这里 L 是方程总个数。式(10.91)也可表示为矢量形式 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{d},\boldsymbol{m})=0$，它可包含任意复杂的非线性形式。

我们先从简单的线性问题着手，假定 $\boldsymbol{f}$ 是线性函数，将方程写成矩阵方程，有

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{d},\boldsymbol{m}) = \mathbf{F}\begin{bmatrix}\boldsymbol{d}\\ \boldsymbol{m}\end{bmatrix} = 0 \tag{10.92}$$

其中 $\mathbf{F}$ 是 $L\times(M+N)$ 阶矩阵。

在许多情况下，可以将资料从模型参数中分离出来，这时方程总数变为 $L=N$，可表示为：

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{d},\boldsymbol{m}) = \boldsymbol{d} - \mathbf{G}\boldsymbol{m} = 0 \tag{10.93}$$

这样，式(10.92)中的 $\mathbf{F}$ 相应为

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} -\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G} \end{bmatrix} \tag{10.94}$$

这里 $\mathbf{G}$ 是 $N\times M$ 阶资料核矩阵。

现在将式(10.93)重新写成

$$\boldsymbol{d} = \mathbf{G}\boldsymbol{m} \tag{10.95}$$

这是显化形式的线性反演方程。我们的问题是，已经知道了资料 $\boldsymbol{d}$，如何从方程(10.95)中求解出模型参数 $\boldsymbol{m}$。反演问题中，这个方程一般不是适定的，因而不能采用通常的代数方法。可以将这问题分成两个内容，第一是如何求得这个非齐次方程的特解 $\boldsymbol{m}_p$，第二个内容就是要讨论这个特解的分辨率和误差。

下面先较详细地介绍用广义逆求特解的方法及这种解的分辨率

与误差，然后再叙述在线性反演中较为流行的另外几种反演方法。

§4 模型空间和资料空间

如式(10.95)由如下三个代数方程构成

$$\left.\begin{aligned} m_1 + m_2 &= 1 \\ m_3 &= 2 \\ -m_3 &= 1 \end{aligned}\right\} \tag{10.96}$$

这组方程有三个，虽然未知数也有三个，但这三个方程对三个未知数的限定(或称约束)是不相同的。这里对 m_1 和 m_2 限定得不够，因而使得 m_1 和 m_2 可以有许多解；相反对 m_3 却限制过多，使得无法确定 m_3 使其满足方程。从这些简单的反演方程可以看出，不能找出一个精确地满足所有方程的解，因而只能去寻求一个近似的解，使其误差最小。这也可以说是反演问题的主旨。这类对一部分模型参数限定条件过多，而对另一部分却限定不足的情况称为混定问题。这里介绍 Lanczos(1961)的反演方法。

在方程(10.95)中，$\boldsymbol{m}=(m_1,m_2,\cdots,m_M)^{\mathrm{T}}$ 是经过推广定义的具有 M 个分量的模型矢量，对应地，在几何表示上，也应设想这矢量是在经过扩展了的 M 维空间(模型空间)中。同样，对于资料，$\boldsymbol{d}=(d_1,d_2,\cdots d_N)^{\mathrm{T}}$ 是具有 N 个分量的矢量，它也可以用一个 N 维空间(资料空间)中的矢量来作相应的几何表述。而 $\mathbf{G}$ 是 $N\times M$ 阶矩阵，有

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \cdots & G_{1M} \\ G_{21} & G_{22} \cdots & G_{2M} \\ \cdots & \cdots \quad \cdots & \cdots \\ G_{N1} & G_{N2} \cdots & G_{NM} \end{pmatrix} \tag{10.97}$$

按 Lanczos 方法，首先将 $\mathbf{G}$ 构成一个 Hermite 矩阵 $\mathbf{S}$，即

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{G} \\ \widetilde{\mathbf{G}} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \tag{10.98}$$

式中$\tilde{\mathbf{G}}$是G的复共轭转置矩阵，即$\tilde{\mathbf{G}}=(\mathbf{G}^*)^{\mathrm{T}}$。这样，S是一个$(N+M)\times(N+M)$阶方阵，且有$\tilde{\mathbf{S}}=\mathbf{S}$。因S是Hermite矩阵，它的本征值$\lambda_i$是实的，且有相应的一组互相正交的非零本征矢量$\boldsymbol{w}_i$，使得

$$\mathbf{S}\boldsymbol{w}_i=\lambda_i\boldsymbol{w}_i \qquad (i=1,2,\cdots,N+m) \tag{10.99}$$

其中本征值λ_i可由如下方程解出

$$\det(\mathbf{S}-\lambda\mathbf{I})=0 \tag{10.100}$$

将本征矢量$\boldsymbol{w}_i$分解为

$$\boldsymbol{w}_i=\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}_i\\ \boldsymbol{v}_i\end{pmatrix} \tag{10.101}$$

即$\boldsymbol{u}_i$在N维数据空间中，而$\boldsymbol{v}_i$在M维模型参数空间中。这样，本征矢量方程(10.99)可改写成

$$\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{G}\\ \tilde{\mathbf{G}} & \mathbf{0}\end{pmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{u}_i\\ \boldsymbol{v}_i\end{bmatrix}=\lambda_i\begin{bmatrix}\boldsymbol{u}_i\\ \boldsymbol{v}_i\end{bmatrix} \tag{10.102}$$

如果λ_i是非零本征值，则可得本征矢量$(\boldsymbol{u}_i,\boldsymbol{v}_i)^{\mathrm{T}}$应满足

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{G}\boldsymbol{v}_i&=\lambda_i\boldsymbol{u}_i\\ \tilde{\mathbf{G}}\boldsymbol{u}_i&=\lambda_i\boldsymbol{v}_i\end{aligned}\right\} \tag{10.103}$$

它有这样的特征，若本征值为$(-\lambda_i)$，则对应的本征矢量为$(-\boldsymbol{u}_i,\boldsymbol{v}_i)^{\mathrm{T}}$，这只要代入方程就可验证。这条特性意味着非零本征值的正、负成对出现。假设有p对非零本征值$\pm\lambda_i$，则对于$+\lambda_i(i=1,2,\cdots,p)$对应的本征矢量是$(\boldsymbol{u}_i,\boldsymbol{v}_i)^{\mathrm{T}}$，对于$-\lambda_i(i=1,2\cdots,p)$是$(-\boldsymbol{u}_i,\boldsymbol{v}_i)^{\mathrm{T}}$。对于零本征值，方程(10.103)被解耦，变成两个独立方程，有

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{G}\boldsymbol{v}_i&=\mathbf{0} \qquad (i=p+1,\cdots,M)\\ \tilde{\mathbf{G}}\boldsymbol{u}_i&=\mathbf{0} \qquad (i=p+1,\cdots-N)\end{aligned}\right\} \tag{10.104}$$

因而我们可再总结一下本征矢量方程$\boldsymbol{S}\boldsymbol{w}=\lambda\boldsymbol{w}$的特性，它有$(N+M)$个本征矢量解，其中$2p$个对应于非零本征值，而$(N+M-2p)$个对应于零本征值。这样一定有$p\leqslant\min(N,M)$。这两类本征矢量可以认为在资料空间和模型空间都分别占有不同的空间，即$\boldsymbol{u}_i(i=1,2,\cdots,$

N)从整体上来说是跨及整个资料空间，但这资料空间也相应的包含两个子空间，分别被它的两类本征矢量所跨及，一是 p 空间，一是零空间。对于 $\boldsymbol{v}_i$ 也同样，一部分跨及模型参数 p 空间，另一部分在模型参数零空间中。只有两个空间中的 p 子空间的本征矢量才通过反演方程有连系，这是要注意的地方。在零空间中的本征矢量，我们也称作为零矢量。应该指出，不是矢量本身为零值，而是对应的本征值为零，这个概念不要混淆。

进一步讨论方程(10.103)（注意这方程组也包括 $\lambda_i=0$ 的情况），分别可以得到两个独立的方程，有

$$\left.\begin{aligned}\tilde{\mathbf{G}}\,\mathbf{G}\boldsymbol{v}_i &= \lambda_i^2\boldsymbol{v}_i\\ \mathbf{G}\,\tilde{\mathbf{G}}\boldsymbol{u}_i &= \lambda_i^2\boldsymbol{u}_i\end{aligned}\right\}\qquad(10.105)$$

由于 $\tilde{\mathbf{G}}\mathbf{G}$ 和 $\mathbf{G}\tilde{\mathbf{G}}$ 都是 Hermite 矩阵，故都具有实的本征值，对应的本征矢量是 $\boldsymbol{v}_i$ 和 $\boldsymbol{u}_i$，这些本征矢量有正交性，归一化后有

$$\left.\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{v}}\,\boldsymbol{v}_j &= \delta_{ij}\qquad (i,j=1,2\cdots,M)\\ \tilde{\boldsymbol{u}}_i\boldsymbol{u}_j &= \delta_{ij}\qquad (i,j=1,2\cdots,N)\end{aligned}\right\}\qquad(10.106)$$

我们将这些本征矢量构成一个本征矢量矩阵，即

$$\mathbf{V}=(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_M)=\begin{pmatrix}v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1M}\\ v_{12} & v_{22} & \cdots & v_{2M}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ v_{M1} & v_{M2} & \cdots & v_{MM}\end{pmatrix}$$

同样，对于另一组本征矢量也可构成

$$\mathbf{U}=(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\cdots,\boldsymbol{u}_N)=\begin{bmatrix}u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1N}\\ u_{21} & u_{22} & \cdots & v_{2N}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ u_{N1} & u_{N2} & \cdots & u_{NN}\end{bmatrix}$$

因而正交性表示式(10.106)可写成

$$\left.\begin{aligned}\tilde{\mathbf{U}}\,\mathbf{U}=\mathbf{U}\,\tilde{\mathbf{U}}=\mathbf{I}\\ \tilde{\mathbf{V}}\,\mathbf{V}=\mathbf{V}\,\tilde{\mathbf{V}}=\mathbf{I}\end{aligned}\right\}\qquad(10.107)$$

U 由跨满整个资料空间的本征矢量构成。由以上讨论已知，这些本征矢量有一部分跨占在 p 子空间中，其余的都在零子空间中，因而将 U 分解为在 p 空间中的 $\mathbf{U}_p$ 和在零空间中的 $\mathbf{U}_0$；同样对 V 也进行分解，有 $\mathbf{V}_p$ 和 $\mathbf{V}_0$，即

$$\mathbf{U} = (\mathbf{U}_p, \mathbf{U}_0) = \begin{pmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1p} & u_{1(p+1)} & \cdots & u_{1N} \\ u_{21} & \cdots & u_{2p} & u_{2(p+1)} & \cdots & u_{2N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ u_{N1} & \cdots & u_{Np} & u_{N(p+1)} & \cdots & u_{NM} \end{pmatrix}$$

及 $$\mathbf{V} = (\mathbf{V}_p, \mathbf{V}_0) = \begin{pmatrix} v_{11} & \cdots & v_{1p}, v_{1(p+1)} & \cdots & v_{1M} \\ v_{21} & \cdots & v_{2p}, v_{2(p+1)} & \cdots & v_{2M} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ v_{M1} & \cdots & v_{Mp}, v_{M(p+1)} & \cdots & v_{MM} \end{pmatrix}$$

由于正交性，有 $\tilde{\mathbf{U}}_p\mathbf{U}_p = \tilde{\mathbf{V}}_p\mathbf{V}_p = \mathbf{I}$，但注意 $\mathbf{U}_p$ 和 $\mathbf{V}_p$ 都未跨满它们各自的矢量空间，因而一般来讲 $\mathbf{U}_p\tilde{\mathbf{U}}_p \neq \mathbf{I}$ 及 $\mathbf{v}_p\tilde{\mathbf{v}}_p \neq \mathbf{I}$。有了这些矩阵之后，可将式(10.103)和式(10.104)重新写成用这些矩阵表示的形式，即

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{G}\,\mathbf{V}_p &= \mathbf{U}_p\mathbf{\Lambda}_p \\ \tilde{\mathbf{G}}\,\mathbf{U}_p &= \mathbf{V}_p\mathbf{\Lambda}_p \end{aligned}\right\} \tag{10.108}$$

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{G}\,\mathbf{V}_0 &= \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{G}}\,\mathbf{U}_0 &= \mathbf{0} \end{aligned}\right\} \tag{10.109}$$

其中 $\mathbf{\Lambda}_p$ 是由非零本征值构成的对角矩阵，它是

$$\mathbf{\Lambda}_p = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_p \end{pmatrix} \tag{10.110}$$

因此也可写成

$$\mathbf{G}\,\dot{\mathbf{V}} = \mathbf{G}(\mathbf{V}_p, \mathbf{V}_0) = (\mathbf{U}_p, \mathbf{U}_0)\begin{pmatrix} \mathbf{\Lambda}_p & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

由于 $\mathbf{V}\tilde{\mathbf{V}}=\mathbf{I}$，将上式右乘 $\tilde{\mathbf{V}}$，则有

$$\mathbf{G}=(\mathbf{U}_p,\mathbf{U}_0)\begin{pmatrix}\mathbf{\Lambda}_p & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{\mathbf{V}}_p\\ \tilde{\mathbf{V}}_0\end{pmatrix}=\mathbf{U}_p\mathbf{\Lambda}_p\tilde{\mathbf{V}}_p \qquad (10.111)$$

这就是资料核矩阵的奇异值分解，也可表明资料核只与 p 空间中的量有关，而与零空间中的 $\mathbf{U}_0$ 和 $\mathbf{V}_0$ 无关。

将这种方法用来计算式(10.96)的实例，式中给出的资料核矩阵为

$$\mathbf{G}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix} \qquad \tilde{\mathbf{G}}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{G}\tilde{\mathbf{G}}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix} \qquad \tilde{\mathbf{G}}\mathbf{G}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

先解资料空间中的本征值，即

$$\mathbf{G}\tilde{\mathbf{G}}\boldsymbol{u}_i=\lambda_i^2\boldsymbol{u}_i \qquad (i=1,2,3)$$

本征矢量非零条件有

$$\begin{vmatrix}2-\lambda^2 & 0 & 0\\ 0 & 1-\lambda^2 & -1\\ 0 & -1 & 1-\lambda^2\end{vmatrix}=(2-\lambda^2)(\lambda^2-2)\lambda^2=0$$

则非零本征值是 $\lambda_1^2=\lambda_2^2=2$，它们对应的本征矢量 $\boldsymbol{u}_1$ 和 $\boldsymbol{u}_2$ 分别为

$$\boldsymbol{u}_1=\begin{pmatrix}0\\ 1/\sqrt{2}\\ -1/\sqrt{2}\end{pmatrix} \text{和} \ \boldsymbol{u}_2=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

第三个本征值 $\lambda_3^2=0$，它对应的本征矢量为 $\boldsymbol{u}_3$，也可解得为

$$\boldsymbol{u}_3=\begin{pmatrix}0\\ 1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

因而，$\mathbf{U}_p$ 和 $\mathbf{U}_0$ 有

$$\mathbf{U}_p = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \text{和} \ \mathbf{U}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

对于模型参数 p 空间中的 $\mathbf{V}_p$，先用如下关系求出本征矢量

$$\boldsymbol{v}_i = \frac{1}{\lambda_i}\tilde{\mathbf{G}}\,\boldsymbol{u}_i$$

注意在 p 空间中 $\lambda_i \neq 0$，故可利用上式，得到

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{和} \ \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

这样，就可构成 $\mathbf{V}_p$，有

$$\mathbf{V}_p = \begin{bmatrix} 1 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

为了要求出 $\boldsymbol{v}_0$，应解如下方程

$$\tilde{\mathbf{G}}\,\mathbf{G}\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{O}$$

则得

$$\boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

由这结果可看出，在零空间中的模型参数，不会影响观测量，即 $\mathbf{G}\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{O}$。

§5 广义逆方法

由上一节的讨论知，任何 $N \times M$ 阶的资料核矩阵总可表示为三

个矩阵的乘积，即

$$\mathbf{G} = \mathbf{U}\Lambda\tilde{\mathbf{V}} \tag{10.112}$$

这里 $\mathbf{U}$ 是一个 $(N\times N)$ 阶本征矢量矩阵。它跨及整个资料空间，$\mathbf{V}$ 是一个 $(M\times M)$ 阶本征矢量矩阵，它跨及整个模型参数空间，而 Λ 是一个 $(N\times M)$ 阶的对角本征值矩阵，比如在 $N=4, M=3$ 的情况下，它的形式为

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{10.113}$$

因为 $\mathbf{U}$ 和 $\mathbf{V}$ 各自跨满本空间，因而有 $\mathbf{U}\tilde{\mathbf{U}}=\tilde{\mathbf{U}}\mathbf{U}=\mathbf{I}$ 及 $\mathbf{V}\tilde{\mathbf{V}}=\tilde{\mathbf{V}}\mathbf{V}=\mathbf{I}$。

如果资料核是方阵，则它的逆矩阵能立即写出，是

$$\mathbf{G}^{-1} = \mathbf{V}\Lambda^{-1}\tilde{\mathbf{U}} \tag{10.114}$$

而由式(10.111)知资料核矩阵只与 p 空间的量有关，按式(10.112)和式(10.114)之间的关系，类比资料核是方阵的情况，那么，可以假定在一般情况下，式(10.111)的逆也有

$$\mathbf{G}^{-g} = \mathbf{V}_p\Lambda_p^{-1}\tilde{\mathbf{U}}_p \tag{10.115}$$

此 $\mathbf{G}^{-g}$ 称为广义逆矩阵，简称广义逆，由它表示的模型参数值为

$$\boldsymbol{m}_g = \mathbf{G}^{-g}\boldsymbol{d} \tag{10.116}$$

此称作广义逆解。

下面我们说明这种类比与假定所得到的广义逆及其解能否满足方程，以及它所具有的特征。

第一种情况，没有 $\mathbf{U}_0$ 和 $\mathbf{V}_0$ 空间的情况。这是 $N=M=p$ 的情况，因而资料核是一个方阵，这时 p 空间就是全空间，有 $\mathbf{U}_p\tilde{\mathbf{U}}_p=\mathbf{I}$ 和 $\mathbf{V}_p\tilde{\mathbf{V}}_p=\mathbf{I}$。这样，直接可从式(10.111)中求出逆，即 $\mathbf{G}^{-1}=(\mathbf{U}_p\Lambda_p\tilde{\mathbf{V}}_p)^{-1}=\mathbf{V}_p\Lambda_p^{-1}\tilde{\mathbf{U}}_p=\mathbf{G}^{-g}$，广义逆与没有 $\mathbf{U}_0$、$\mathbf{V}_0$ 时的精确逆矩阵一致。

第二种情况，没有 $\mathbf{V}_0$ 但存在 $\mathbf{U}_0$ 的情况，此时有 $M=p$ 及 $N>$

M,这是超定问题。构成方阵 $\tilde{G}G=V_p\Lambda_p^2\tilde{V}_p$。由于 $M=p$,因而 V_p 也是一个 $p\times p$ 阶方阵,方阵的逆立即可求得为 $(\tilde{G}G)^{-1}=V_p\Lambda_p^{-2}\tilde{V}_p$。对方程 $Gm=d$ 两边左乘 $\tilde{G}$,得 $\tilde{G}Gm=\tilde{G}d$,利用上面得到的逆,有

$$
\begin{aligned}
m_g &= (\tilde{G}G)^{-1}\tilde{G}d = V_p\Lambda_p^{-2}\tilde{V}_p \cdot V_p\Lambda_p\tilde{U}_p d \\
&= V_p\Lambda_p\tilde{U}_p d = G^{-g}d \qquad (10.117)
\end{aligned}
$$

证明在这种情况下,广义逆和它的解是正确的,而且广义逆解就是最小二乘方解。用几何方法与空间概念可以容易地证明解在 U_p 空间中设有误差,误差只是在 U_0 空间,而且它的方差是最小的。

用广义逆解构成的误差有

$$
d - Gm_g = d - U_p\Lambda_p\tilde{V}_pV_p\Lambda_p^{-1}\tilde{U}_p d = d - U_p\tilde{U}_p d
$$

将 $\tilde{U}_p$ 左乘此式两边,并利用正交关系 $\tilde{U}_pU_p=I$,可得到

$$
\tilde{U}_p(d-Gm_g)=\tilde{U}_pd-\tilde{U}_pU_p\tilde{U}_pd=O
$$

表示广义逆解在 U_p 空间中没有误差。

又由于 $\tilde{U}_0Gm_g=O$,即 Gm_g 在 U_0 空间中没有分量,用图 10.15 中的矢量表示,只是沿着 U_p 轴,即被限制在 U_p 空间中。前面已证明误差 $d-Gm_g$ 在 U_p 空间中没有分量,因而可以用图中垂直于 U_p 轴的矢量来表示,这也表明,资料矢量 d 和 Gm_g 之间的距离 $|d-Gm_g|^2$ 也减小到极小,也就是达到了最小方差。

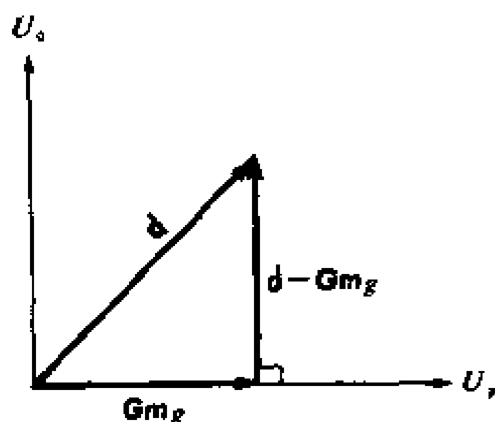


图 10.15 广义逆解的方差最小的几何说明

第三种情况，在没有 $\mathbf{U}_0$ 但有 $\mathbf{V}_0$ 空间的情况，此时有 $N=p$ 而 $M>N$，为欠定问题，我们可以立即证明，广义逆解 $\boldsymbol{m}_g$ 完全能满足方程 $\mathbf{G}\boldsymbol{m}_g=\boldsymbol{d}$，此时有 $\mathbf{U}_p\tilde{\mathbf{U}}_p=\mathbf{I}$。可以这样证明，将广义逆解 $\boldsymbol{m}_g=\mathbf{G}^{-g}\boldsymbol{d}$ 的两边左乘 $\mathbf{G}$，即有 $\mathbf{G}\boldsymbol{m}_g=\mathbf{G}\,\mathbf{G}^{-g}\boldsymbol{d}=\mathbf{U}_p\Lambda_p\tilde{\mathbf{V}}_p\mathbf{V}_p\Lambda_p^{-1}\tilde{\mathbf{U}}_p\boldsymbol{d}=\boldsymbol{d}$，从而得到了证明。广义逆解 $\boldsymbol{m}_g$ 被限制于 $\mathbf{V}_p$ 空间中。但在欠定问题，模型参数还有 $\mathbf{V}_0$ 空间，这部分中的模型参数不会影响反演方程而满足齐次方程，因而 $\boldsymbol{m}=\boldsymbol{m}_g+\sum_{i=p+1}^{m}a_i\boldsymbol{v}_i$，式中的 $\boldsymbol{v}_i$ 是 $\mathbf{V}_0$ 空间中的本征矢量，它们之间有正交性 $\tilde{v}_iv_j=\delta_{ij}$。一般解的长度有 $|\boldsymbol{m}|^2=|\boldsymbol{m}_g|^2+\sum_{i=p+1}^{m}a_i^2\geqslant|\boldsymbol{m}_g|^2$，这表示广义逆解不单能满足反演方程，而且是满足方程的所有解中具有最小长度的一个。

最后一种情况，既有 $\mathbf{V}_0$ 又有 $\mathbf{U}_0$ 的情况，这是一种混定问题。用广义逆 $\mathbf{G}^{-g}=\mathbf{V}_p\Lambda_p^{-1}\tilde{\mathbf{U}}_p$ 可以使资料空间中的误差长度 $|\boldsymbol{d}-\mathbf{G}\boldsymbol{m}|^2$ 和模型参数空间中的模型参数长度 $|\boldsymbol{m}|^2$ 达到极小。这可用前面我们已给出的实例来说明。实例的广义逆是

$$\mathbf{G}^{-g}=\begin{bmatrix}0 & 1/\sqrt{2}\\ 0 & 1/\sqrt{2}\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/\sqrt{2} & 0\\ 0 & 1/\sqrt{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2}\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1/2 & 0 & 0\\ 1/2 & 0 & 0\\ 0 & 1/2 & -1/2\end{bmatrix}$$

相应的广义逆解是

$$\boldsymbol{m}_g=\mathbf{G}^{-g}\boldsymbol{d}=\begin{bmatrix}1/2\\ 1/2\\ 1/2\end{bmatrix}$$

§6 广义逆解的分辨率和协方差

下面处理解的唯一性和可靠性问题，也就是讨论解 $\boldsymbol{m}_g$ 与地球模型中的实际值 $\boldsymbol{m}$ 究竟有多少差异。广义逆解 $\boldsymbol{m}_g=\mathbf{G}^{-g}\boldsymbol{d}$，而 $\boldsymbol{d}=\mathbf{G}\boldsymbol{m}$，故

$$\boldsymbol{m}_g = \mathbf{G}^{-g}\mathbf{G}\boldsymbol{m} \tag{10.118}$$

当 $\boldsymbol{d}$ 在资料零空间 $\mathbf{U}_0$ 有分量时，广义逆解 $\boldsymbol{m}_g$ 不能精确满足反演方程，即 $\boldsymbol{d}\neq\mathbf{G}\boldsymbol{m}_g$，但式(10.118)仍成立，用式(10.111)和式(10.115)代入，有

$$\boldsymbol{m}_g = \mathbf{V}_p\mathbf{\Lambda}_p^{-1}\widetilde{\mathbf{U}}_p\mathbf{U}_p\mathbf{\Lambda}_p\widetilde{\mathbf{V}}_p\boldsymbol{m} = \mathbf{V}_p\widetilde{\mathbf{V}}_p\boldsymbol{m} \tag{10.119}$$

若没有 $\mathbf{V}_0$ 空间，则 $\mathbf{V}_p\widetilde{\mathbf{V}}_p=\mathbf{I}$，则有 $\boldsymbol{m}_g=\boldsymbol{m}$，即广义逆解 $\boldsymbol{m}_g$ 与实际的模型参数 $\boldsymbol{m}$ 完全相同。因而在 $\mathbf{V}_0=0$ 时，不管 $\mathbf{U}_0$ 存在与否，解都是唯一的。而当 $\mathbf{V}_0$ 空间存在时，式(10.119)则表明，$\mathbf{V}_p\widetilde{\mathbf{V}}_p$ 的行矢量构成了加权系数，使得 $\boldsymbol{m}$ 加权平均后等于 $\boldsymbol{m}_g$，因而矩阵 $\mathbf{V}_p\widetilde{\mathbf{V}}_p$ 可认为是分辨矩阵。它的对角元素可作为分辨率的表征，对角线元素的和(即矩阵的迹)应等于 p，这是构成 $\mathbf{V}_p$ 的本征矢量 $\mathbf{V}_i$ 的数目，例如，前述实例的分辨矩阵是

$$\mathbf{V}_p\widetilde{\mathbf{V}}_p=\begin{pmatrix}0 & 1/\sqrt{2}\\ 0 & 1/\sqrt{2}\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0\\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

这表明资料只能确定 m_1 和 m_2 的平均值，但能单一地确定 m_3。

上面讨论的是模型参数分辨率，同样，也可讨论资料的分辨率。将广义逆解 $\boldsymbol{m}_g$ 代入反演公式而得到资料的期望值 $\boldsymbol{d}_g$，它与实际观测到的资料 $\boldsymbol{d}$ 有如下的关系：

$$\boldsymbol{d}_g = \mathbf{G}\mathbf{G}^{-g}\boldsymbol{d} = \mathbf{U}_p\widetilde{\mathbf{U}}_p\boldsymbol{d} \tag{10.120}$$

在没有 $\mathbf{U}_0$ 的情况，$\mathbf{U}_p\widetilde{\mathbf{U}}_p=\mathbf{I}$，那么在式(10.120)中有 $\boldsymbol{d}_g=\boldsymbol{d}$，此时期望值与实际资料一致。如果存在 $\mathbf{U}_0$ 的情况，则资料的期望值可表示

为实际观测资料的加权平均，加权系数由 $\mathbf{U}_p\widetilde{\mathbf{U}}_p$ 的行矢量给出。在前述的实例中，有

$$\mathbf{U}_p\widetilde{\mathbf{U}}_p = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

这表明期望值 d_{g1} 符合实测值 d_1，但却只能得到 d_2 和 d_3 的加权平均值（两个平均值有 $d_{g2}=-d_{g3}$）。

衡量解的可靠性是用解的协方差矩阵。由于资料误差 $\Delta \boldsymbol{d}$ 要引起广义逆解的误差 $\Delta \boldsymbol{m}_g$，它们之间的关系有 $\Delta \boldsymbol{m}_g=\mathbf{G}^{-g}\Delta \boldsymbol{d}$，它们的协方差矩阵是 $\langle\Delta \boldsymbol{m}_g\Delta \widetilde{\boldsymbol{m}}_g\rangle=\mathbf{G}^{-g}\langle\Delta \boldsymbol{d}\Delta \widetilde{\boldsymbol{d}}\rangle\widetilde{\mathbf{G}}^{-g}$，式中的 $\langle\rangle$ 表示平均。如果资料中每个量都是独立的，且都有共同的方差 σ_d^2，这时，上式可简化为

$$\langle\Delta \boldsymbol{m}_g\Delta \widetilde{\boldsymbol{m}}_g\rangle = \sigma_d^2\mathbf{G}^{-g}\widetilde{\mathbf{G}}^{-g} \tag{10.121}$$

第一种情况，$\mathbf{U}_0=\mathbf{0}$ 和 $\mathbf{V}_0=\mathbf{0}$，则 $\mathbf{G}^{-g}=\mathbf{G}^{-1}$，式(10.121)可写成

$$\langle\Delta \boldsymbol{m}_g\Delta \widetilde{\boldsymbol{m}}_g\rangle = \sigma_d^2(\widetilde{\mathbf{G}}\mathbf{G})^{-1} \tag{10.122}$$

第二种情况，$\mathbf{U}_0\neq\mathbf{0}$ 而 $\mathbf{V}_0=\mathbf{0}$，这是超定问题。用 $\widetilde{\mathbf{G}}$ 左乘 $\boldsymbol{d}=\mathbf{G}\boldsymbol{m}$ 的两边，有 $\widetilde{\mathbf{G}}\boldsymbol{d}=\widetilde{\mathbf{G}}\mathbf{G}\boldsymbol{m}$，即可得 $\boldsymbol{m}=(\widetilde{\mathbf{G}}\mathbf{G})^{-1}\widetilde{\mathbf{G}}\boldsymbol{d}$，称为最小二乘解法。若这个解与广义逆解相同，则应有 $\boldsymbol{m}=(\widetilde{\mathbf{G}}\mathbf{G})^{-1}\widetilde{\mathbf{G}}\boldsymbol{d}=\boldsymbol{m}_g=\mathbf{G}^{-g}\boldsymbol{d}$，所以 $\mathbf{G}^{-g}=(\widetilde{\mathbf{G}}\mathbf{G})^{-1}\widetilde{\mathbf{G}}$。代入式(10.121)中，我们得到

$$\langle\Delta \boldsymbol{m}_g\Delta \widetilde{\boldsymbol{m}}_g\rangle = \sigma_d^2(\widetilde{\mathbf{G}}\mathbf{G})^{-1}\widetilde{\mathbf{G}}\mathbf{G}(\widetilde{\mathbf{G}}\mathbf{G})^{-1} = \sigma_d^2(\widetilde{\mathbf{G}}\mathbf{G})^{-1} \tag{10.123}$$

这也是最小二乘方法中得到的方差公式。

第三种情况，$\mathbf{U}_0=\mathbf{0}$ 而 $\mathbf{V}_0\neq\mathbf{0}$，这是欠定问题。用最小长度法求解。令 $\boldsymbol{m}=\widetilde{\mathbf{G}}\lambda$，代入方程得 $\boldsymbol{d}=\mathbf{G}\widetilde{\mathbf{G}}\lambda$，它对于 λ 是一个适定方程，可解出有 $\lambda=(\mathbf{G}\widetilde{\mathbf{G}})^{-1}\boldsymbol{d}$，因而最后的反演问题的解是 $\boldsymbol{m}=\widetilde{\mathbf{G}}(\mathbf{G}\widetilde{\mathbf{G}})^{-1}\boldsymbol{d}$。如果这个解与广义逆解相同。则由 $\boldsymbol{m}=\widetilde{\mathbf{G}}(\mathbf{G}\widetilde{\mathbf{G}})^{-1}\boldsymbol{d}$ 和 $\boldsymbol{m}_g=\mathbf{G}^{-g}\boldsymbol{d}$ 知，

$G^{-g}=\widetilde{G}(G\widetilde{G})^{-1}$。代入式(10.121)中,得到

$$\langle\Delta m_g\Delta\widetilde{m}_g\rangle=\sigma_d^2\widetilde{G}(G\widetilde{G})^{-1}(\widetilde{G\widetilde{G}})^{-1}G \qquad (10.124)$$

最后,无论那一种情况,用广义逆的一般形式 $G^{-g}=V_p\Lambda_p^{-1}\widetilde{U}_p$ 代入式(10.121),则有

$$\langle\Delta m_g\Delta\widetilde{m}_g\rangle=\sigma_d^2V_p\Lambda_p^{-1}\widetilde{U}_pU_p\Lambda_p^{-1}\widetilde{V}_p=\sigma_d^2V_p\Lambda_p^{-2}\widetilde{V}_p \quad (10.125)$$

式中 Λ_p^{-2} 是元素为 $\lambda_i^{-2}(i=1,2,\cdots,p)$的对角矩阵。

显然,当 λ_i 较小时,解的协方差就较大。为了改善协方差,通常可将较小的本征值舍去,使$\langle\Delta m_g\Delta\widetilde{m}_g\rangle$保持在一定水平上。这样做又会引起另一个问题,即减少了非零本征值的个数 p,会降低模型参数和资料的分辨率,因而经常需要权衡利弊,最后折衷地选定一个合适的 p。

前述实例的协方差为

$$\langle\Delta m_g\Delta\widetilde{m}_g\rangle=\sigma_d^2\begin{bmatrix}0 & 1/\sqrt{2}\\0 & 1/\sqrt{2}\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1/2 & 0\\0 & 1/2\end{pmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0\end{bmatrix}$$

$$=\sigma_d^2\begin{bmatrix}1/4 & 1/4 & 0\\1/4 & 1/4 & 0\\0 & 0 & 1/2\end{bmatrix}$$

这表明,m_{g1}和 m_{g2}的方差是 m_{g3}方差的一半,m_{g1}和 m_{g2}是完全相关的,其相关系数为+1,相关性由它们的解 $m_1=m_2=d_1/2$ 确定。

§7 最大似然逆方法及随机逆方法

在上一节中,我们得到的解的协方差结果具有比较简单的形式,这是因为已假定资料相互独立且有相同方差 σ_d^2。若不作这个假定,认为资料间是相关的,资料的协方差为 R_d 则不单使解估值的协方差显得复杂,而且影响解的分布,最后必然影响解。这里介绍在这种情况下求解的方法——最大似然率方法。

当资料不能独立而有协方差 $\mathbf{R}_d$ 时，资料的分布具有多元互相关 Gauss 分布形式，有

$$P(d) \propto \exp\left[-\frac{1}{2}\widetilde{(d-\mathbf{G}m)}\mathbf{R}_d^{-1}(d-\mathbf{G}m)\right] \tag{10.126}$$

式中 $\mathbf{R}_d$ 已知，模型参数 m 是待求的，计算最佳的模型参数 m 可通过使式(10.126)表示的概率达到最大，即取最大似然率而得到。要使似然率达到最大，也就是使指数项 $\widetilde{(d-\mathbf{G}m)}\mathbf{R}_d^{-1}(d-\mathbf{G}m)$ 达到极小，而不是以前所述的只使 $|d-\mathbf{G}m|^2$ 达到最小。同样，在欠定问题中，如果模型参数之间有关，它的协方差 $\mathbf{R}_m$ 不是简单地比例于一个单位矩阵，则在模型参数空间中求极小时也需修改，即需求 $\tilde{m}\mathbf{R}_m^{-1}m$ 的极小而不是简单地对 $|m|^2$ 求极小。可以通过变量变换的办法，使最大似然率法的形式变得更简单。

由于 $\mathbf{R}_d$ 和 $\mathbf{R}_m$ 是正定矩阵，因而总可分解为

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{R}_d &= \mathbf{D}\Lambda_d\widetilde{\mathbf{D}} \\ \mathbf{R}_m &= \mathbf{M}\Lambda_m\widetilde{\mathbf{M}} \end{aligned}\right\} \tag{10.127}$$

式中 Λ_d 和 Λ_m 分别是 $\mathbf{R}_d$ 和 $\mathbf{R}_m$ 的本征值的对角矩阵，而 $\mathbf{D}$ 和 $\mathbf{M}$ 则分别为它们本征矢量矩阵。由于 $\mathbf{R}_d$ 与 $\mathbf{R}_m$ 正定，故没有零本征值。这样，$\mathbf{D}$ 和 $\mathbf{M}$ 都是完善的，即有 $\mathbf{D}\widetilde{\mathbf{D}}=\widetilde{\mathbf{D}}\mathbf{D}=\mathbf{I}$，$\mathbf{M}\widetilde{\mathbf{M}}=\widetilde{\mathbf{M}}\mathbf{M}=\mathbf{I}$。现在引入变量变换，设带“′”的量为新变量，使

$$\left.\begin{aligned} d' &= \Lambda_d^{-1/2}\widetilde{\mathbf{D}}d \\ m' &= \Lambda_m^{-1/2}\widetilde{\mathbf{M}}m \\ \mathbf{G}' &= \Lambda_d^{-1/2}\widetilde{\mathbf{D}}\mathbf{G}\mathbf{M}\Lambda_m^{1/2} \end{aligned}\right\} \tag{10.128}$$

则原变量可写成

$$\left.\begin{aligned} d &= \mathbf{D}\Lambda_d^{1/2}d' \\ m &= \mathbf{M}\Lambda_m^{1/2}m' \\ \mathbf{G} &= \mathbf{D}\Lambda_d^{1/2}\mathbf{G}'\Lambda_m^{-1/2}\widetilde{\mathbf{M}} \end{aligned}\right\} \tag{10.129}$$

这样，引入新变量后，使 $\widetilde{(d-\mathbf{G}m)}\mathbf{R}_d^{-1}(d-\mathbf{G}m)=|d'-\mathbf{G}'m'|^2$，$\tilde{m}\mathbf{R}_m^{-1}m=|m'|^2$，$\mathbf{G}'$ 的广义逆就可使上述两个值达到极小，解出新变

量 $m'_g=(G')^{-1}d'$，将它代入式(10.129)，给出最大似然逆解 m_{max} 为

$$m_{max} = M\Lambda_m^{1/2} m'_g \tag{10.131}$$

从上述讨论可知，通过变量变换后，最大似然率法也可变成广义逆问题。在广义逆法中，需要对资料核矩阵作奇异值分解，分析其本征矢量等，这些过程使方法变得较为复杂。下面介绍随机逆方法，这种方法只要求矩阵乘法和求逆，显然有它方便之处。现根据 Franklin (1970)的工作叙述如下。

资料中往往包含有用的信号和无用的噪声，使反演方程变为

$$\mathbf{d} = \mathbf{G}m + n \tag{10.131}$$

其中 n 是噪声。m 和 n 都是随机变量，可假定它们的均值为零(如果不是，则可从最初过程中减去均值)即

$$\langle m \rangle = \langle n \rangle = 0 \tag{10.132}$$

它们的协方差矩阵分别为

$$\left.\begin{aligned} \langle m\tilde{m} \rangle &= \mathbf{R}_m \\ \langle n\tilde{n} \rangle &= \mathbf{R}_n \end{aligned}\right\} \tag{10.133}$$

设方程(10.131)的解为 $m^* = \mathbf{L}d$，称 $\mathbf{L}$ 为随机逆矩阵，简称随机逆。它可用 m 和 $\mathbf{L}d$ 之间偏差的最小二乘方来确定。考虑有 n 次测试，每次测试都能获得 $m^{(k)}$ 和 $n^{(k)}(k=1,\cdots,n)$，使得

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(m_i^{(k)} - \sum_{j=1}^{N}(L_{ij}d_j^{(k)})^2$$

达到极小，从而确定出 L，则有

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}m_i^{(k)} - \sum_{j=1}^{N}(L_{ij}d_j^{(k)})d_l^{(k)} = 0$$

或将它写成

$$\langle m\tilde{d} \rangle = \mathbf{L}\langle d\tilde{d} \rangle \tag{10.134}$$

即

$$\mathbf{L} = \mathbf{R}_{md}\mathbf{R}_d^{-1} \tag{10.135}$$

式中 $\mathbf{R}_{md}=\langle m\tilde{d} \rangle$。另一方面，$m$ 和 n 应该是不相关的，有 $\langle m\tilde{n} \rangle=0$。因而有

$$\mathbf{R}_d = \langle d\tilde{d} \rangle = \langle (\mathbf{G}m + n)\widetilde{(\mathbf{G}m + n)} \rangle = \mathbf{G}\mathbf{R}_m\tilde{\mathbf{G}} + \mathbf{R}_n$$

$$(10.136)$$

还有关系

$$\mathbf{R}_{md} = \mathbf{R}_m\tilde{\mathbf{G}} \tag{10.137}$$

将它们代入式(10.135)式，可得

$$\mathbf{L} = \mathbf{R}_m\tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{G}\mathbf{R}_m\tilde{\mathbf{G}} - \mathbf{R}_n)^{-1} \tag{10.138}$$

这样，用随机逆求得的解是

$$m^* = \mathbf{L}d = \mathbf{R}_{md}\mathbf{R}_d^{-1}d = \mathbf{R}_m\tilde{\mathbf{G}}\mathbf{R}_d^{-1}d \tag{10.139}$$

也像处理最大似然逆那样，引入变量变换，类似于式(10.127)与式(10.129)，有

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{R}_m &= \mathbf{M}\Lambda_m\tilde{\mathbf{M}} \\ \mathbf{R}_d^{-1} &= \mathbf{D}\Lambda_d^{-1}\tilde{\mathbf{D}} \\ m &= \mathbf{M}\Lambda_m^{1/2}\mathbf{m}' \\ d &= \mathbf{D}\Lambda^{1/2}d' \end{aligned}\right\} \tag{10.140}$$

那么可有

$$m^* = \mathbf{M}\Lambda_m^{1/2}(m^*)' = \mathbf{R}_m\tilde{\mathbf{G}}\mathbf{R}_d^{-1}d = \mathbf{M}\Lambda_m\tilde{\mathbf{M}}\tilde{\mathbf{G}}\mathbf{D}\Lambda_d^{-1}\tilde{\mathbf{D}}d,$$

此式用式(10.128)代入，得

$$(m^*)' = \tilde{\mathbf{G}}'d' \tag{10.141}$$

这样，对照随机逆算子的定义，可以看出，变换过的随机逆算子即为变换过资料核 $\mathbf{G}'$ 的转置。

在特殊情况下，即当 $\mathbf{R}_m = \sigma_m^2\mathbf{I}$ 及 $\mathbf{R}_n = \sigma_n^2\mathbf{I}$ 情况时，随机逆可对广义逆给出一个较为精确的近似。将这些代入随机逆表达式(10.138)中，得

$$\mathbf{L}_0 = \tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{G}\tilde{\mathbf{G}} + \varepsilon^2\mathbf{I})^{-1} \tag{10.142}$$

其中 $\varepsilon^2 = \sigma_n^2/\sigma_m^2$。

对资料核作本征值分解。它的本征矢量矩阵是 $\mathbf{U} = (\mathbf{U}_p, \mathbf{U}_0)$，用它表示 $(\mathbf{G}\tilde{\mathbf{G}} + \varepsilon^2\mathbf{I})^{-1}$，则有

$$(\mathbf{G}\widetilde{\mathbf{G}}+\varepsilon^2\mathbf{I})^{-1}=(\mathbf{U}_p,\mathbf{U}_0)\begin{pmatrix}(\mathbf{\Lambda}_p^2+\varepsilon^2\mathbf{I})^{-1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \varepsilon^{-2}\mathbf{I}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\widetilde{\mathbf{U}}_p\\ \mathbf{U}_0\end{pmatrix}$$

$$=\mathbf{U}_p(\mathbf{\Lambda}_p^2+\varepsilon^2\mathbf{I})^{-1}\widetilde{\mathbf{U}}_p+\mathbf{U}_0\varepsilon^{-2}\widetilde{\mathbf{U}}_0$$

又由于 $\widetilde{\mathbf{G}}=\mathbf{V}_p\mathbf{\Lambda}_p\widetilde{\mathbf{U}}_p$ 及 $\widetilde{\mathbf{U}}_p\mathbf{U}_0=\mathbf{0}$,将它们代入式(10.142),得到

$$\mathbf{L}_0=\widetilde{\mathbf{G}}(\mathbf{G}\widetilde{\mathbf{G}}+\varepsilon^2\mathbf{I})^{-1}=\mathbf{V}_p\mathbf{\Lambda}_p(\mathbf{\Lambda}_p^2+\varepsilon^2\mathbf{I})^{-1}\widetilde{\mathbf{U}}_p \tag{10.143}$$

将此式与广义逆比较,可看到它们之间有近似关系。

算子 $\mathbf{L}_0$ 还可以写为

$$\mathbf{L}_0=(\widetilde{\mathbf{G}}\mathbf{G}+\varepsilon^2\mathbf{I})^{-1}\widetilde{\mathbf{G}} \tag{10.144}$$

因为$(\widetilde{\mathbf{G}}\mathbf{G}+\varepsilon^2\mathbf{I})^{-1}=\mathbf{V}_p(\mathbf{\Lambda}_p^2+\varepsilon^2\mathbf{I})^{-1}\widetilde{\mathbf{V}}_p+\mathbf{V}_0\varepsilon^{2}\widetilde{\mathbf{V}}_0$ 及 $\widetilde{\mathbf{V}}_0\mathbf{V}_p=\mathbf{O}$ 代入式(10.144),则有

$$\mathbf{L}_0=\mathbf{V}_p(\mathbf{\Lambda}_p^2+\varepsilon^2\mathbf{I})^{-1}\mathbf{\Lambda}_p\widetilde{\mathbf{U}}_p \tag{10.145}$$

即与式(10.143)有相同的结果。由式(10.144)给出的形式也称阻尼最小二乘方解。

$\mathbf{L}_0$ 的分辨矩阵是

$$\mathbf{L}_0\mathbf{G}=\mathbf{V}_p\mathbf{\Lambda}_p^2(\mathbf{\Lambda}_p^2+\varepsilon^2\mathbf{I})^{-1}\widetilde{\mathbf{V}}_p \tag{10.146}$$

此矩阵的逆是模型参数空间分辨率的量度,有

$$\mathrm{trace}(\mathbf{L}_0\mathbf{G})=\sum_{j=1}^{p}\frac{\lambda_i^2}{\lambda_i^2+\varepsilon^2} \tag{10.147}$$

这个值会小于 p,因而由于 ε^2 会降低分辨率。至于它的协方差,有

$$\langle\Delta m^*\Delta m^*\rangle=\sigma_d^2L_0\widetilde{L}_0=\sigma_d^2\mathbf{V}_p\frac{\mathbf{\Lambda}_p^2}{(\mathbf{\Lambda}_p^2+\varepsilon\mathbf{I})^2}\widetilde{\mathbf{V}}_p \tag{10.148}$$

在上面公式推导中,已假定各个资料相互独立且有均一的方差 σ_d^2。注意,在随机逆讨论中,这方差是由随机模型 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{d}-\mathbf{G}\boldsymbol{m}$ 中的 $\Delta\boldsymbol{d}$ 产生的,因而也相当于 $\sigma_d^2=\sigma_n^2$。从式(10.148)式可看出,当 ε^2 增加时,模型参数的估算误差就可减小,因而分辨率和误差总是相互制约的,需要对 ε^2 作最佳的选择(即确定 σ_n^2/σ_m^2 值)。

现在我们还是用前述实例,计算 L_0 并与广义逆解的结果作比

较。计算可得

$$\mathbf{G}\widetilde{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{G}\widetilde{\mathbf{G}} + \varepsilon^2 \mathbf{I})^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{2+\varepsilon^2} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1+\varepsilon^2}{(1-\varepsilon^2)^2-1} & \dfrac{1}{(1+\varepsilon^2)^2-1} \\ 0 & \dfrac{1}{(1-\varepsilon^2)^2-1} & \dfrac{1+\varepsilon^2}{(1+\varepsilon^2)^2-1} \end{bmatrix}$$

这样有

$$\mathbf{L}_0 = \widetilde{\mathbf{G}}(\mathbf{G}\widetilde{\mathbf{G}} + \varepsilon^2 \mathbf{I})^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{2+\varepsilon^2} & 0 & 0 \\ \dfrac{1}{2+\varepsilon^2} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{2+\varepsilon^2} & \dfrac{-1}{2+\varepsilon^2} \end{bmatrix}$$

在 $\varepsilon^2 \to 0$ 时，即噪声方差为零，这时，随机逆接近于广义逆，即有

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathbf{L}_0 = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{2} & 0 & 0 \\ \dfrac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{bmatrix} = \mathbf{G}^{-g}$$

§8 用 Backus 和 Gilbert 法解欠定反演问题

前面我们采用奇异值分解求得广义逆，现在介绍另一种求广义逆的方法，即从最小化展布函数而得来。因而首先讲述展布函数的定义。如果资料与模型参数的分辨矩阵分别为 **N** 和 **R**，则它们的展布(有时也称为 Dirichlet 展布)函数定义为

$$\begin{cases} \text{Spread}(\mathbf{N}) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}(N_{ij} - \delta_{ij})^2 \\ \text{Spread}(\mathbf{R}) = \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{M}(R_{ij} - \delta_{ij})^2 \end{cases} \tag{10.149}$$

在超定问题中，已经知道它有完善的模型参数分辨率，即它的展布 Spread(**R**)＝0，因而这里可以从对资料展布函数 Spread(**N**)最小化着手。**N** 的第 k 行的展布为 J_k 它有

$$J_k = \sum_{j=1}^{N}(N_{ki} - \delta_{ki})^2 = \sum_{i=1}^{N}N_{ki}^2 - 2\sum_{i=1}^{N}N_{ki}\delta_{ki} + \sum_{i=1}^{N}\delta_{ki}^2 \tag{10.150}$$

因为每一个 J_k，都是正的，因而最小化 $\text{Spread}(\mathbf{N}) = \sum_{k=1}^{N}J_k$ 就相当于最小化每一个 J_k。现在将资料的分辨矩阵 $\mathbf{N}=\mathbf{GG}^{-g}$代入上式中，使对广义逆元素的微商达极小来求得广义逆元素，即

$$\partial J_k/\partial G_{qr}^{-g} = 0 \tag{10.151}$$

对第一项微商有

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial G_{qr}^{-g}}\left[\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{j=1}^{M}G_{kj}G_{ji}^{-g}\right)\left(\sum_{p=1}^{M}G_{kp}G_{pi}^{-g}\right)\right] \\
&=\frac{\partial}{\partial G_{qr}^{-g}}\left[\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\sum_{p=1}^{M}G_{ji}^{-g}G_{pi}^{-g}G_{kj}G_{kp}\right] \\
&=2\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\sum_{p=1}^{M}\delta_{jq}\delta_{ir}G_{pi}^{-g}G_{kj}G_{kp} \\
&=2\sum_{p=1}^{M}G_{pr}^{-g}G_{kq}G_{kp}
\end{aligned} \tag{10.152}$$

对第二项微商有

$$\frac{\partial}{\partial G_{qr}^{-g}}\left[-2\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{j=1}^{M}G_{kj}G_{ji}^{-g}\delta_{ki}\right)\right] = \frac{\partial}{\partial G_{qr}^{-g}}\left(-2\sum_{j=1}^{N}G_{kj}G_{jk}^{-g}\right) = -2G_{rq} \tag{10.153}$$

第三项微商为零，因为它与广义逆无关。把它们合在一起写成矩阵形

式，有

$$\tilde{\mathbf{G}}\mathbf{G}\mathbf{G}^{-g}=\tilde{\mathbf{G}} \tag{10.154}$$

由于 $\tilde{\mathbf{G}}\mathbf{G}$ 是方阵，因而可解得 $\mathbf{G}^{-g}=(\tilde{\mathbf{G}}\mathbf{G})^{-1}\tilde{\mathbf{G}}$，这就是最小二乘方广义逆形式。

对于欠定问题，由于资料的分辨矩阵为单位矩阵，它的展布函数为零。我们只要最小化 Spread(**R**)，就能得到最小长度广义逆，有，$\mathbf{G}^{-g}=\tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{G}\tilde{\mathbf{G}})^{-1}$。

在反演问题中经常会遇到资料和模型参数存在一个自然的顺序，这时，Dirichlet 展布函数就不是很适合于用来度量分辨性的好坏，因为在 Dirichlet 展布函数中，对于分辨矩阵中的非对角元素，不管它们离主对角线远近都加相同的权因子。然而在有自然顺序情况下，我们更喜欢在主对角线附近有较大的元素，使得分辨矩阵的每一行都是一个局部化了的平均函数。当在远离主对角线的位置上出现较大振幅，即分辨矩阵带有边瓣时，若仍用 Dirichlet 展布函数来计算广义逆，则得不到最佳的解估值。当然我们更愿意要没有边瓣的广义逆，甚至加宽近主对角线处的非零元素带都在所的惜。基于这种理由，Backus—Gilbert 采用了对分辨矩阵中的各个元素加不同的权因子的方法，权因子的选择要按离对角元素的距离而定，用这种加过权的分辨矩阵来计算它的展布函数。

这里我们以欠定问题为例，对分辨矩阵 **R** 各元素，加以不同的权因子 $w(i,j)$，使得新的分辨矩阵的每一行都有像脉冲函数的形状。这种权函数可这样选择：$w=(i,i)=0$，$w(i,j)$是非负的，且有 $w(i,j)=w(j,i)$。比如对具有简单线性的自然顺序参数，可选择权函数为 $w(i,j)=(i-j)^2, i\neq j$，这时构成新的展布函数，称为 Backus—Gilbert 展布函数，它是

$$\begin{aligned}\mathrm{Spread}(\mathbf{R})&=\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{M}w(i,j)(R_{ij}-\delta_{ij})^2\\&=\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{M}w(i,j)R_{ij}^2\end{aligned} \tag{10.155}$$

同样，对于资料的分辨矩阵的展布函数也可作这种修正。新的分辨矩阵的边瓣会比以前的小。可用这种展布函数推导出新的广义逆。我们也应注意到，经这样一修正，推导出来的 Backus Gilbert 广义逆，在欠定问题中，再也不会使反演方程能精确地满足。这种影响是无法避免的，因而只有不断地试验，最后得到各方面都满意的折衷解。

下面我们从 B-G 展布函数式(10.155)出发，推导出欠定问题的广义逆来，最小化 B-G 展布函数(10.155)，为此我们要求分辨矩阵每一行的元素和为 1，即

$$\sum_{j=1}^{M} R_{ij} = 1 \tag{10.156}$$

而 $\mathbf{R}$ 的第 k 行的 B-G 展布为 J_k，有

$$\begin{aligned} J_k &= \sum_{l=1}^{M} w(l,k) R_{kl} R_{kl} = \sum_{l=1}^{M} w(l,k) \Big(\sum_{i=1}^{N} G_{ki}^{-g} G_{il}\Big)\Big(\sum_{j=1}^{N} G_{kj}^{-g} G_{jl}\Big) \\ &= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} G_{ki}^{-g} G_{kj}^{-g} \Big(\sum_{l=1}^{M} w(l,k) G_{il} G_{jl}\Big) \\ &= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} G_{ki}^{-g} G_{kj}^{-g} [s_{ij}]_k \end{aligned} \tag{10.157}$$

其中已定义了

$$[s_{ij}]_k = \sum_{l=1}^{M} w(l,k) G_{il} G_{jl} \tag{10.158}$$

而约束条件式(10.156)，也可用广义逆表示为

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{M} R_{ik} &= \sum_{k=1}^{M}\Big(\sum_{j=1}^{N} G_{ij}^{-g} G_{jk}\Big) = \sum_{j=1}^{N} G_{ij}^{-g} \sum_{k=1}^{M} G_{jk} \\ &= \sum_{j=1}^{N} G_{ij}^{-g} u_j = 1 \end{aligned} \tag{10.159}$$

式中

$$u_j = \sum_{k=1}^{M} G_{jk} \tag{10.160}$$

现在在给定约束条件下，要使 J_k，相对于广义逆元素最小化。可

采用 Lagrange 乘子法。定义 Lagrange 函数 φ,有

$$\varphi = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} G_{ki}^{-K} G_{kj}^{-K} [s_{ij}]_k - 2\lambda \sum_{j=1}^{N} G_{kj}^{-K} u_j \tag{10.161}$$

其中 -2λ 就是 Lagrange 乘子。将此式相对于广义逆元素作微商并设定为零,有

$$\frac{\partial \varphi}{\partial G_{kp}^{-K}} = 2\sum_{i=1}^{N} [s_{pi}]_k G_{ki}^{-K} - 2\lambda u_p = 0 \tag{10.162}$$

同时又考虑到约束条件式(10.159),合在一起写成矩阵方程,即

$$\begin{pmatrix} [\mathbf{s}_{ij}]_k & \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{G}_{kj}^{-K} \\ -\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{O} \\ 1 \end{pmatrix} \tag{10.163}$$

注意到 $[\mathbf{s}_{ij}]_k$ 是一个 $M \times M$ 阶矩阵,它的元素是式(10.158),而 $(\boldsymbol{G}_{kj}^{-K})$ 是一个长度为 M 的矢量,j 为它的分量序号,这样,式(10.163)中的矩阵是 $(M+1) \times (M+1)$ 阶方阵,从这方程中要解出广义逆第 k 行的 M 个元素和一个 Lagrange 乘子 λ。

上述方程可用线性代数的办法求解,其必要条件是方程中矩阵的逆存在,并假定这个逆可以分解成一个 $M \times M$ 阶方阵 $\mathbf{A}$ 和一个矢量 $\boldsymbol{b}$ 及一个标量 c。那么,此逆矩阵与原矩阵相乘便构成一个单位矩阵,为:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [s_{ij}]_k & \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O}^{\mathrm{T}} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}[s_{ij}]_k + \boldsymbol{b}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} & \mathbf{A}\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}[s_{ij}]_k + c\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u} \end{pmatrix} \tag{10.164}$$

式中相对应的各部分的关系为:

(1)$\mathbf{A}[s_{ij}]_k + \boldsymbol{b}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} = \mathbf{I}$,可得

$$\mathbf{A} = (\mathbf{I} - \boldsymbol{b}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}})[s_{ij}]_k^{-1} = [s_{ij}]_k^{-1} - \boldsymbol{b}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}[s_{ij}]_k^{-1} \tag{10.165}$$

(2)$\mathbf{A}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{O}$,将式(10.165)右乘 $\boldsymbol{u}$,得 $[s_{ij}]_k^{-1}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{b}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}[s_{ij}]_k^{-1}\boldsymbol{u}$,则有

$$\boldsymbol{b} = \frac{[s_{ij}]_k^{-1}\boldsymbol{u}}{\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}[s_{ij}]_k^{-1}\boldsymbol{u}} \tag{10.166}$$

(3)$\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u} = 1$

(4)$\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}[s_{ij}]_k + c\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{O}^{\mathrm{T}}$,也可写成 $[s_{ij}]_k\boldsymbol{b} + c\boldsymbol{u} = \boldsymbol{O}$,其中已考虑了 $[s_{ij}]_k$

是对称的。将它左乘 $\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}$，并用 $\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}=1$，可得

$$c=-\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}[s_{ij}]_k\boldsymbol{b}=\frac{1}{\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}[s_{ij}]_k^{-1}\boldsymbol{u}} \tag{10.167}$$

一旦求得 $\mathbf{A}$、$\boldsymbol{b}$ 和 c，则 B-G 广义逆就不难得到，它的分量是

$$G_{kl}^{-K}=\frac{\sum_{i=1}^{N}[s_{il}]_k^{-1}u_i}{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}u_iu_j[s_{ij}]_k^{-1}} \tag{10.168}$$

§9 非线性反演问题简述

地震学中的反演问题多是非线性的。要解决这种非线性问题，不外乎有下述两种方法，一是适当选择参数，使反演方程具有线性化的特征，二是直接对非线性反演方程作线性化。以下对这两个方法分别作简单的介绍。

关于参数线性化，如有一套资料 (z,d)，其中 z 是辅助变量，且有简单的模型（反演方程），为

$$d_i=m_1\exp m_2z_i \tag{10.169}$$

式中 m_1 和 m_2 是待求的模型参数。这是一个非线性方程。若选择新参数，使

$$\left.\begin{aligned}m'_1&=\lg m_1\\ m'_2&=m_2\\ d'_i&=\lg d_i,(i=1,2,\cdots,N)\end{aligned}\right\} \tag{10.170}$$

代入方程(10.169)中，则有

$$d'_i=m'_1+m'_2z_i \qquad (i=1,2,\cdots,N) \tag{10.171}$$

此变换后的方程是线性的，然而，虽然线性化了反演方程，其中仍存在两个问题。一是这种简单的变换，在许多情况下并不奏效，也就是不容易找到能线性化反演方程的参数；二是从表面上看，线性方程

(10.171)是一个超定问题，可以用最小二乘方法求解，然而要用最小二乘方法的前提是作为新参数的 d_i' 必须是一个具有均一方差的 Gauss 分布状态的资料。但一般说，即便原资料 d_i 具有 Gauss 分布，变换过的新资料 d_i' 也已是非 Gauss 分布的。这两方面的问题都不易解决，因而将注意力转移到直接线性化反演方程上来。

关于反演方程的线性化。设方程有显化形式为

$$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{m}) \tag{10.172}$$

其中 $\boldsymbol{g}$ 是具有非线性的函数。求解方程(10.172)可以应用迭代公式。如已求得第 n 次的解 $\boldsymbol{m}_n^{est}$，则可将方程(10.172)在这个解上进行线性化，即用 Taglor 展开，有

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{m}) \approx \boldsymbol{g}(\boldsymbol{m}_n^{est}) + \nabla \boldsymbol{g}(\boldsymbol{m} - \boldsymbol{m}_n^{est}) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{m}_n^{est}) + \mathbf{G}_n(\boldsymbol{m} - \boldsymbol{m}_n^{est}) = \boldsymbol{d} \tag{10.173}$$

式中已略去二阶以上项，并定义 $\mathbf{G}_n = \nabla \boldsymbol{g}$。令 $\Delta \boldsymbol{m}_{n+1} = \boldsymbol{m} - \boldsymbol{m}_n^{est}$，则可写出近似方程为

$$G_n \Delta \boldsymbol{m}_{n+1} = \boldsymbol{d} - \boldsymbol{g}(\boldsymbol{m}_n^{est}) \tag{10.174}$$

从这方程中可以得到第 $n+1$ 次的解，即

$$\boldsymbol{m}_{n+1}^{est} = \boldsymbol{m}_n^{est} + \Delta \boldsymbol{m}_{n+1} \tag{10.175}$$

这种迭代解可以从最初开始，即可以假定一个初始解 $\boldsymbol{m}_0^{est}$，然后对反演近似方程(10.174)求解($n=0$)，这时根据方程所具有的特性，用不同的方法进行，解得 $\Delta \boldsymbol{m}_1$，由此也得到 $\boldsymbol{m}_1^{est}$。继续可作第二次迭代，如此反复，直到满足要求为止。

在一些特定情况下，很容易写出这些迭代解的最后形式。如在纯超定问题中，资料间是相互独立的，且有均一的方差 σ_d^2，这时迭代解为

$$\boldsymbol{m}_{n+1}^{est} = [\tilde{\mathbf{G}}_n \mathbf{G}_n]^{-1} \tilde{\mathbf{G}}_n [\boldsymbol{d} - \boldsymbol{g}(\boldsymbol{m}_n^{est})] + \boldsymbol{m}_n^{est} \tag{10.176}$$

又如最小阻尼二乘方问题中，模型参数也是相互独立的，它们的平均值为零，且也有均一的方差 σ_m^2，这时迭代解有

$$\boldsymbol{m}_{n+1}^{est} = [\tilde{\mathbf{G}}_n \mathbf{G}_n + \frac{\sigma_d^2}{\sigma_m^2}\mathbf{I}]^{-1} \tilde{\mathbf{G}}_n [\boldsymbol{d} - \boldsymbol{g}(\boldsymbol{m}_n^{est})] + \boldsymbol{m}_n^{est} \tag{10.177}$$

最后，在纯欠定问题中，有迭代解

$$m_{n+1}^{est} = \tilde{G}_n [G_n \tilde{G}_n]^{-1} [d - g(m_n^{est})] + m_n^{est} \tag{10.178}$$

§10 地震反演问题的实例

这里举两个计算实例。

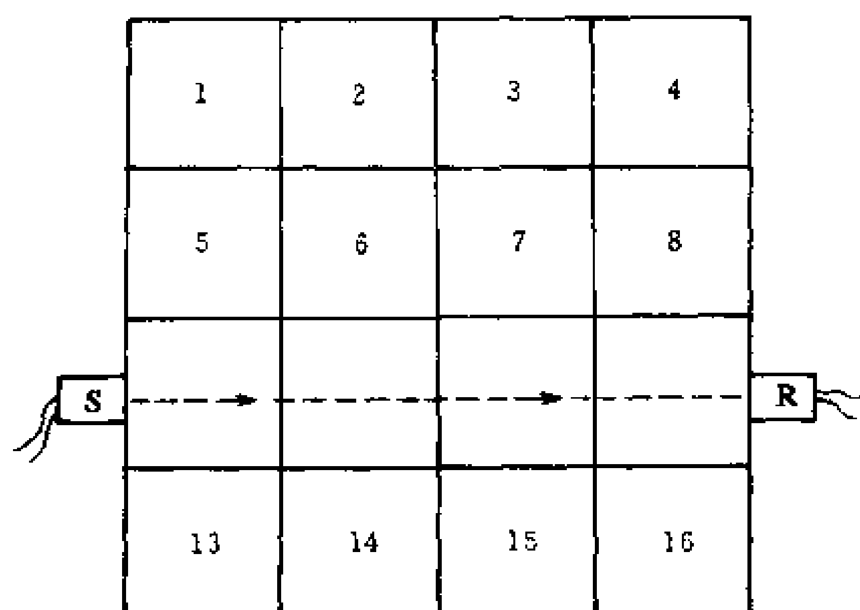


图 10.16 测定各行和各列砖块的走时

S 是声源，R 是接收器

第一个实例是声层析问题。有一面墙由方砖砌成(图 10.16)，每块砖是用不同的粘土烧制的，因而每块砖都有不同的声波速度。在墙的四边按源与接收点的不同位置来测出波的走时，以此来确定各块砖的速度值。比如先测定各行后测定各列的走时，得到 8 个走时资料 $d=[T_1, T_2, \cdots, T_8]^T$ 各块砖的慢度(波速的倒数)为 s_i，它们构成模型参数矢量 $m=[s_1, s_2, \cdots, s_{16}]^T$。这样，按图所示写出反演方程(设方砖的宽度为 h)：

$$\left.\begin{aligned}
&\text{第一行}, T_1 = h(s_1 + s_2 + s_3 + s_4)\\
&\text{第二行}, T_2 = h(s_5 + s_6 + s_7 + s_8)\\
&\cdots\cdots\\
&\text{第四列}, T_8 = h(s_4 + s_8 + s_{12} + s_{16})
\end{aligned}\right\} \tag{10.179}$$

这样可以构成一个标准的矩阵形式，即

$$\boldsymbol{d} = \mathbf{G}\boldsymbol{m}$$

其中

$$\mathbf{G} = h\begin{bmatrix}
1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\\
0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\\
\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\\
\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\\
0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1
\end{bmatrix} \tag{10.180}$$

因为 $M>N$，因而这是个欠定问题，但这不是一个纯欠定问题，因为各行加在一起的总走时应该等于各列加在一起的总走时，但每次测量得到的数据不会是相同的，这就构成了超定的因素，所以这是一个混定问题。

作为实测，我们将每行和每列的砖块数扩大到 10 块，且只有两类砖块，一类是高速砖块，速度值为 12 单位，其 3×3 块镶嵌在墙的左上角，另一类是低速砖块，速度值为 10 单位(图 10.17)。将资料核矩阵作奇异值分解，有 $p=19$ 个非零本征值和一个零本征值，将它们按大小排列起来，有像图 10.18 所示的图线。这种图线可以确认问题具有超定即多余约束的特性。为求解反演问题，我们必须给出一定的先验条件。比如现在的问题中，认为所要求的模型参数都应该接近先验的慢度，如 $\langle m_i \rangle = \frac{1}{10}$。问题的解可由自然广义逆表示，即有 $\boldsymbol{m}^{\text{est}} = \langle \boldsymbol{m} \rangle + \boldsymbol{G}^{-g}[\boldsymbol{d} - \boldsymbol{G}\langle \boldsymbol{m} \rangle]$。这个解的结果已示于图 10.19 中，基本上符合原有问题的特征。但沿着高速区的行和列，慢度值有所减小，这是由于模型分辨矩阵 $\mathbf{R}$ 有较大的边瓣，如图 10.20a 所示。它是 10×10 网格，其对角元素只有一个是 0.18，而与该对角元素同行同列的

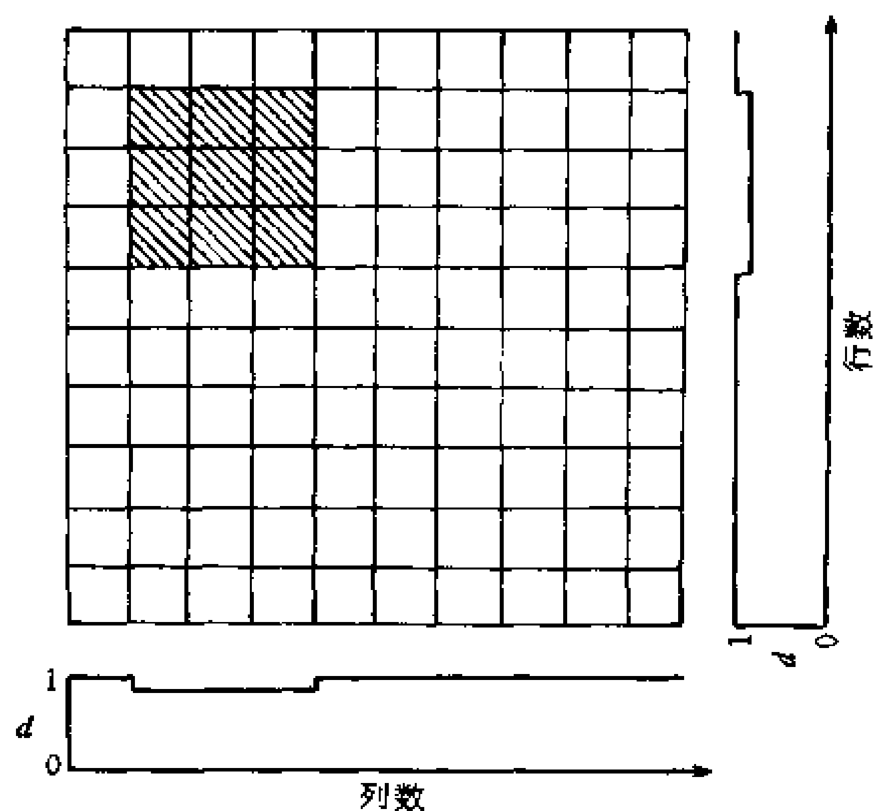


图 10.17 由高、低速砖块砌成的墙(阴影部分是高速砖块)

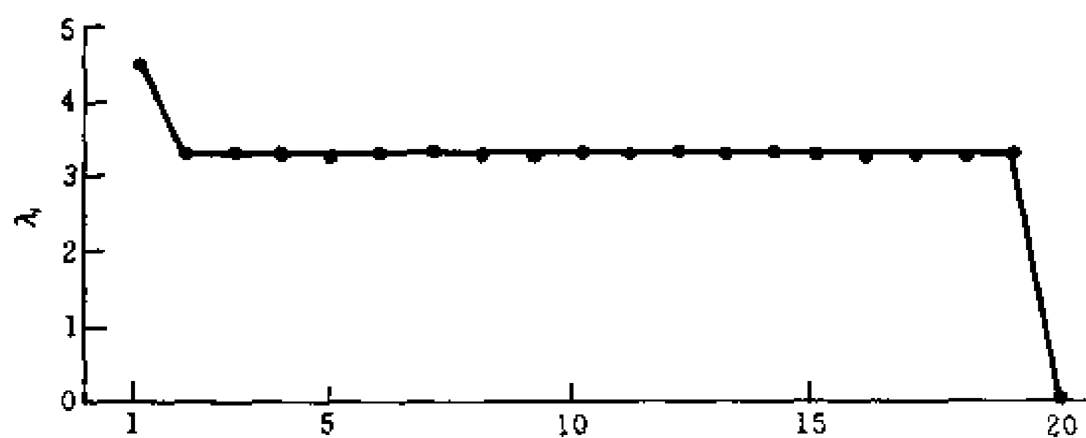
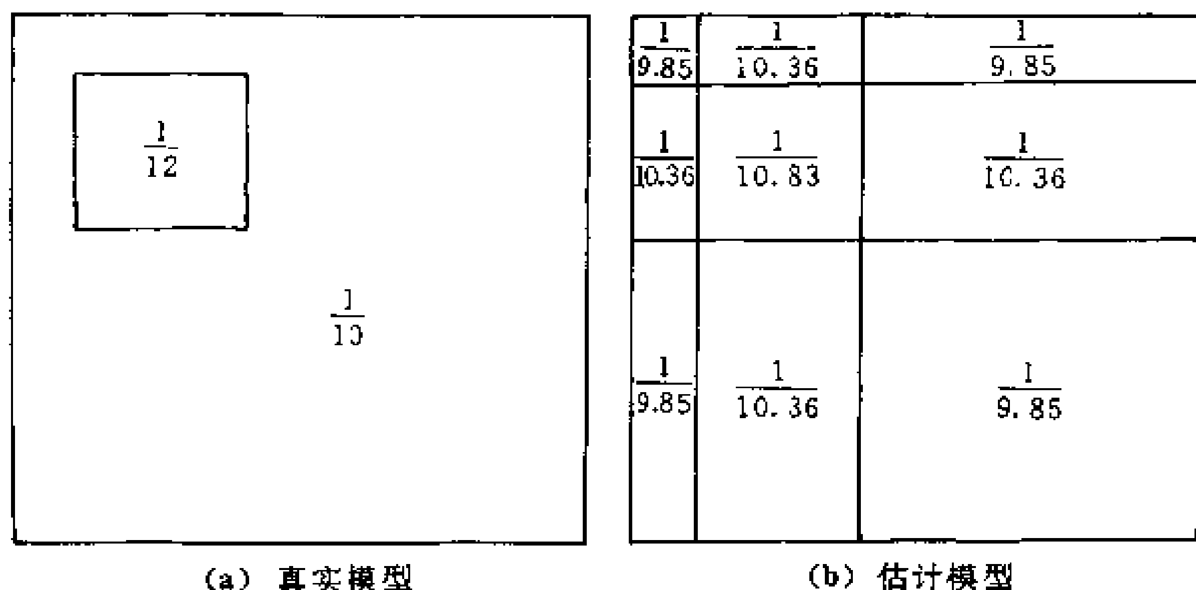


图 10.18 声层析问题的本征值

元素也有较大的值 0.08。在这个声层析问题中,设计的测量方式不特别适合于分辨高速区的位置。可以用 B-G 广义逆方法来减小这种



(a) 真实模型　　　　(b) 估计模型

图 10.19　声层析问题的解

边瓣。对于分辨矩阵非对角元素，用权因子去修正，如图 10.20b、c、d 所示。用与砖块之间的几何距离的幂函数作为权函数，它们分别为一次幂，二次幂及三次幂。应当指出，这个问题是混定的，在计算 B-G 广义逆时要避免出现奇异矩阵。

第二个实例是地震定位问题。所谓定位问题就是根据波的走时来确定震源位置(x_0, y_0, z_0)及发震时刻 t_0。

设某一台站位于(x_i, y_i, z_i)点，其接收到的波的走时为$T_i = T(\boldsymbol{m}; x_i, y_i, z_i)$，其中 $\boldsymbol{m} = (x_0, y_0, z_0, t_0)^{\mathrm{T}}$。则对于 P、S 波的到时分别为

$$\left.\begin{aligned} t_{\mathrm{P}_i} &= T_{\mathrm{P}}(\boldsymbol{m}; x_i, y_i, z_i) \\ t_{\mathrm{S}_i} &= T_{\mathrm{S}}(\boldsymbol{m}; x_i, y_i, z_i) \end{aligned}\right\} \tag{10.181}$$

一般说，这些关系都是非线性的，即有 $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{m})$形式。如果所得资料使问题成为超定，则可用迭代最小二乘方法求解。

为线性化反演问题，首先要计算∇T_i，这走时梯度的解析形式不容易得到，因而可用有限差分法给予数值计算，有

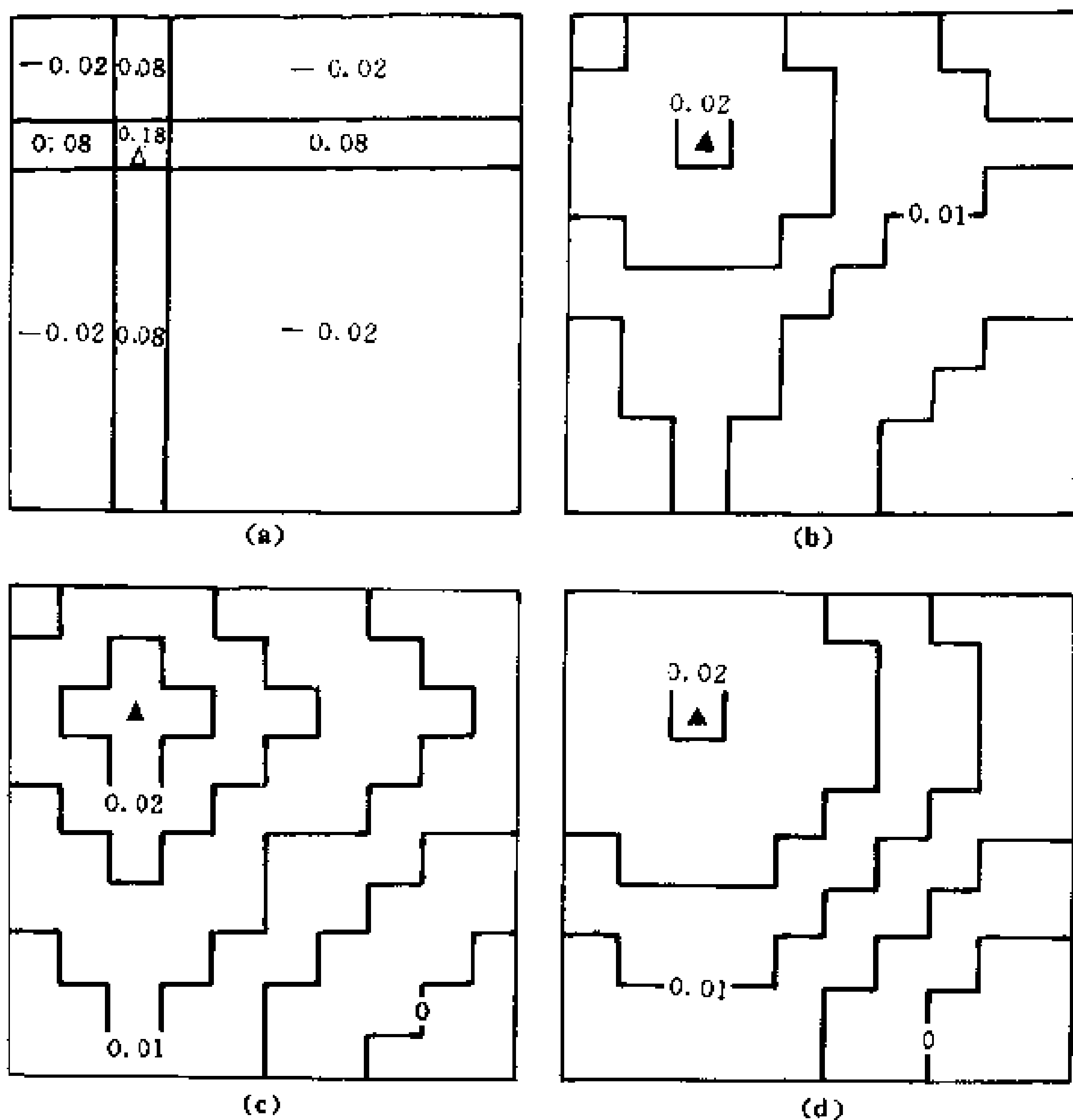


图 10.20　模型参数分辨矩阵

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{\partial T_i}{\partial m_1} &= \frac{\{T_i[\boldsymbol{m}+(\varepsilon,0,0,0)^{\mathrm{T}}]-T_i(\boldsymbol{m})\}}{\varepsilon} \\
\frac{\partial T_i}{\partial m_2} &= \frac{\{T_i[\boldsymbol{m}+(0,\varepsilon,0,0)^{\mathrm{T}}]-T_i(\boldsymbol{m})\}}{\varepsilon} \\
\frac{\partial T_i}{\partial m_3} &= \frac{\{T_i[\boldsymbol{m}+(0,0,\varepsilon,0)^{\mathrm{T}}]-T_i(\boldsymbol{m})\}}{\varepsilon}
\end{aligned}\right\} \tag{10.182}
$$

由于走时只与震源位置有关而与发震时刻无关，故$\frac{\partial T_i}{\partial m_4}=0$。式(10.182)表示当震源位置沿着坐标轴稍有移动时所引起的走时变化。这种计算方法有两个缺点：第一，若ϵ取得非常小，这样有限差分就非常接近它的微商，但式中分子部分的两项几乎相等，运算过程就会有非常大的舍入误差，第二，方法中要求计算三个走时梯度因而要作4次走时运算，大大增加了运算量与花费。

这里有一种改进的办法，可先考察一下射线离开震源时的几何特征(图10.21)。若震源沿射线移动Δx_0，如图10.21a所示，则走时减少了$\frac{s}{v(m)}$，这里s是Δx_0的长度，$v(m)$是震源附近地区的波速。如果按图10.21b方式，震源在垂直于射线方向移动的小矩离s，则此

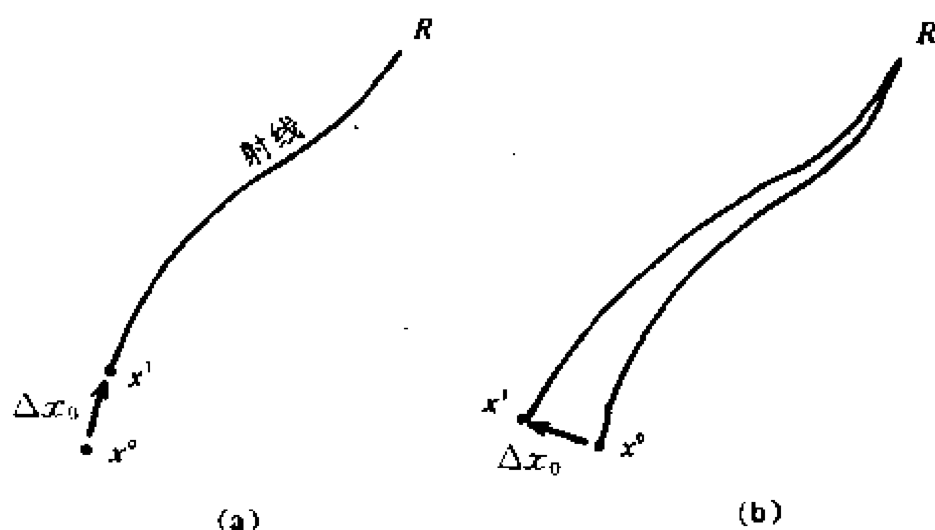


图10.21 移动震源方法计算走时梯度

时引起的走时变化可以忽略，因为新的路径非常接近原来的路径。因此，走时梯度可表示为$\nabla T=\frac{\hat{s}}{v(m)}$，其中$\hat{s}$是射线在震源处的切向单位矢量。这种计算程序使得求梯度时不需要有额外的工作量，因为计算射线路径是为求走时所必须的。

令 $s_{P_i}(\boldsymbol{m})$ 和 $s_{S_i}(\boldsymbol{m})$ 分别代表到第 i 个台站的 P 波和 S 波的射线方向，设接收器为 n 个，$i=1,2,\cdots,n$，则线性化之后的反演问题是

$$
\begin{bmatrix}
s_{1P_1}/v_P & s_{2P_1}/v_P & s_{3P_1}/v_P & 1 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
s_{1P_n}/v_P & s_{2P_n}/v_P & s_{3P_n}/v_P & 1 \\
s_{1S_1}/v_S & s_{2S_1}/v_S & s_{3S_1}/v_S & 1 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
s_{1S_1}/v_S & s_{2S_1}/v_S & s_{3S_1}/v_S & 1
\end{bmatrix}_{m=m_n}
\begin{bmatrix}
\Delta x_0 \\ \Delta y_0 \\ \Delta z_0 \\ t_0
\end{bmatrix}_{n+1}
=
\begin{bmatrix}
t_{P_1} - T_{P_1} \\ \cdots \\ t_{P_n} - T_{P_n} \\ t_{S_1} - T_{S_1} \\ \cdots \\ t_{S_n} - T_{S_n}
\end{bmatrix}_{m=m_n}
\tag{10.183}
$$

式中 n 为迭代次数，s_1，s_2，s_3 是单位矢量 $\hat{s}$ 在坐标轴上的投影。这个超定方程可用最小二乘方法求解。

但在某些情况下，矩阵可能变成欠定的，这时就不能用最小二乘解了。当只用一个震相(比如 P 波)的到时时，欠定问题很有可能发生，此时矩阵方程只有上半部分。若所有射线都以一种方式离开震源，也就是它们的单位矢量有一个或二个分量相等时，则矩阵中相应的列会具有$(1,1,\cdots,1)^T$ 形式，这样与第 4 列构成一线性相关关系，造成定位的非唯一性，这时还要靠与发震时刻 t_0 的折衷选择来鉴别。当所有台站都离震源较远时也可能发生这种情况。如果加上 S 波到时则可解决这种不唯一问题。因为这时矩阵中的列矢量变成$[1,\cdots,1,v_S/v_P,\cdots,v_S/v_P]^T$，它与第 4 列线性无关。因此，最好采用奇异值分解，用自然广义逆来解地震定位问题，它可较容易确定问题的欠定性。

这种地震定位问题也可扩展为既可定位又可同时确定介质的速度分布问题，因而也变成了类似于层析问题。此时若有足够多的地震，且充分考虑到射线的选择，使有足够的射线通过每一部分，就能使得反演问题的解更为理想。

习题与思考题

1. 利用式(10.18),证明当所有射线都出现在同一震中距 X_c 处时,介质的速度分布为 $c(z)=c_0\mathrm{ch}(\pi z/X_c)$。

2. 当 $c(z)=c_0+gz$ 时,求证:

$$X(p)=2\frac{\sqrt{1-c_0^2p^2}}{gp},Z(p)=\frac{1}{g}(p^{-1}-c_0)。$$

3. 设走时 T 与距离 Δ 的关系为 $T\propto\sin\lambda\Delta$,($\lambda$ 为常数),若 r_0 为地球半径,则可引入常数 a、b,使 $T=\frac{2r_0^{1-b}}{a(1-b)}\sin[(1-b)\frac{\Delta}{2}]$,试推导与其相关的速度分布为 $c=ar^b$。

[提示:$\int_0^x \mathrm{arcch}\,\frac{(\cos)\lambda x}{\cos\lambda X}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2\lambda}\log(\sec\lambda X)$]

4. 试用与式(10.96)类似的三个未知数来确定一个线性反演问题,求 V_0、V_p、U_0 和 U_p 空间的本征值和本征矢量。用式(10.115)计算广义逆,用式(10.119)计算分辨矩阵,用式(10.113)计算解的协方差。

5. 对于阻尼二乘方解,其分辨矩阵和协方差矩阵分别由式(10.146)和式(10.148)给出。令分辨矩阵和协方差矩阵的对角元素分别为 R_{ii} 和 C_{ii},试证明 $C_{ii}\leqslant\frac{\sigma_d^2}{\varepsilon^2}(R_{ii}-R_{ii}^2)$。

6. 试述 B-G 展布函数的定义及由此而得到的 G-B 广义逆形式。

第十一章 地震观测的解释

随着理论地震学的发展，地震观测台网的完善，及高速电子计算机的使用，从本世纪70年代开始，地震学的研究有了飞速的发展，地震观测资料已能定量且精细地探测地球内部的特征及震源特征。本章作为本书的最后部分，简述天然地震资料处理的一些技术问题与某些地震观测资料的定量解释，期望能使理论进一步联系地震学所研究的实际问题。

§1 地震观测台网与地球模型

地震观测台（简称地震台）的主要任务是接收全球各地发生的地震（近震与远震），并将有关地震的数据，如地震定位数据、仪器响应数据等，进行保存、汇编与交流。地震台设置的地震仪按所接收的地震波波段而分类。以摆式地震仪为例，仪器固有周期为1s的称为短周期地震仪，记录区域性地震；固有周期为十几秒的称为中长周期地震仪，记录近震及远震；还有长周期地震仪，记录大震发生的长周期面波与自由振荡波。各类基准观测台都具有各类周期段的三分向（一个垂直向、两个水平向）地震仪，多为宽频带响应，以便最大限度的记录到各类地震信息。

由各个地震台组成的地震观测台网，提供监测震情与探测地球内部的基础资料。从60年代开始设置的全球标准台网（WWSSN），至80年代将其中的100个台使用数字化记录，而命名为数字化标准台网（DWWSSN），而后，其中约有30个台站构成全球数字地震台网

(GDSN)。1987 年,我国数字化台网(CDSN)建成。目前,CDSN 由 9 个台站组成,它与我国基准台网、区域台网配套使用,监视我国的地震情况,并扩大我国地震资料的国际交流。随着卫星通讯技术的发展与区域资料勘探及震情考察,目前,已发展用全球定位术(GPS)传递地震信息及各种配套的特殊台网与台阵的信息,例如法国的 Geoscope 观测台网等。应该说,随着近代地震台网的完善,已使经典地震学发展到数字地震学的研究方向。

地震观测记录图与理论地震图的拟合是地震学反演的重要内容之一,而理论地震图的得到依赖于合理的地球模型的建立。基于 J—B 走时而建立的布伦地球模型,将地球内部分为 A、B、C、D、E、F、G 等 7 个区,其中 A 区表示地壳,B、C 区为上地幔,D 区为下地幔,E 区为外核,F 区为外核与内核的过渡层,G 区为内核。随着现代地震台网的完善与各类地震数据,特别是长周期数据的增多,1981 年,已推出包含有地球介质衰减及各向异性数据的初步参考地球模型(PREM,Prelimiary Reference Earth Model),它将地球内部分为 9 个区,并对上地幔有较精细的分析,成为当今地震研究工作的主要背景模型(或曰初始模型),此模型的主要参数列于表 11.1。鉴于上地幔的复杂性,我们引入几个关于大陆、海洋、地盾的分层地球模型供参考,它们分别列于表 11.2,11.3,11.4,11.5。

由地震观测台网测得的各类地震资料,进行分析与解释,反演建立反映地球内部特征的地球模型,然后以地球模型为蓝本,进一步研究与探测真实的地球内部的精细结构与状态,如此循环不已,以达到对地球的完整认识,这是从经典地震学发展到近代地震学的必由之路。

表 11.1 PREM 参数(参考周期为 1s, $x=r/a$ 为归一化半径, $a=6371$km)

区域	半径/km	深度/km	密度/g・cm^{-3}	v_P/km・s^{-1}	v_S/km・s^{-1}	Q_μ	Q_K	Bullen模型区域
内核	0~ 1221.5	6370 5148.5	13.0885 $-8.8381x^2$	11.2622 $-6.3640x^2$	3.6678 $-4.4475x^2$	84.6	1327.7	G — F
外核	1221.5~ 3480.0	2891	12.5815 $-1.2638x$ $-3.6426x^2$ $-5.5281x^3$	11.0487 $-4.0362x$ $+4.8023x^2$ $-13.5732x^3$	0	∞	57823	E
下地幔	3480.0~ 3630.0	2741	7.9565 $-6.4761x$ $+5.5283x^2$ $-3.0807x^3$	15.3891 $-5.3181x$ $+5.5242x^3$ $-2.5514x^3$	6.9254 $+1.4672x$ $-2.0834x^2$ $+0.9783x^3$	312	57823	D
	3630.0~ 5600.0	771	7.9565 $-6.4761x$ $+5.5283x^2$ $-3.0807x^3$	24.9520 $-40.4673x$ $+51.4832x^2$ $-26.6419x^3$	11.1671 $-13.7818x$ $+17.4575x^2$ $-9.2777x^3$	312	57823	
	5600.0~ 5701.0	670	7.9565 $-6.4761x$ $+5.5283x^2$ $-3.0807x^3$	29.2766 $-23.6027x$ $+5.5242x^2$ $-2.5514x^3$	22.3459 $-17.2473x$ $2.0834x^2$ $+0.9783x^3$	312	57823	
过渡带	5701.0~ 5771.0	600	5.3197 $-1.4836x$	19.0957 $-9.8672x$	9.9839 $-4.9324x$	143	57823	C
	5771.0~ 5971.0	400	11.2494 $-8.0298x$	39.7027 $-32.6166x$	22.3512 $-18.5856x$	143	57823	
	5971.0~ 6151.0	220	7.1089 $-3.8045x$	20.3926 $-12.2569x$	8.9496 $-4.4597x$	143	57823	

续表 11.1

区域	半径/km	深度/km	密度/g·cm^{-3}	v_P/km·s^{-1}	v_S/km·s^{-1}	Q_μ	Q_K	Bullen模型区域
LVZ* 低速层	6151.0~6291.0	80	2.6910 $+0.6924x$	0.8317 $+7.2180x$ v_{PH}	5.8582 $-1.4678x$ v_{SH}	80 η	57823	B
				3.5908 $+4.6172x$ v_{PH}	-1.0839 $+5.7176x$ v_{SH}	3.3687 $-2.4778x$ Q_μ	Q_K	
LID* 顶盖区	6291.0~6346.6	24.4	2.6910 $+0.6924x$	0.8317 $+7.2180x$ v_{PH}	5.8582 $-1.4678x$ v_{SH}	600 η	57823	
				3.5908 $+4.6172x$	-1.0839 $+5.7176x$	3.3687 $-2.4778x$ Q_μ	Q_k	
地壳	6346.6~6356.0	15	2.900	6.800	3.900	600	57823	A
	6356.0~6368.0	3	2.600	5.800	3.200	600	57823	
海洋	6368.0~6371.0	0	1.020	1.450	0	∞	57823	

* 深度 24.4~220km 为横向各向同性。相当的各向同性的速度值为 $v_P=4.1875+3.9382x$，$v_S=2.1519+2.3481x$。η 为量纲为一的速度差异参数。

表 11.2.1 Jeffreys－Bullen A′(J－BA′)地球模型

地球平均半径/km	S 波速/(km/s)	P 波速/(km/s)	密度/(g/cm³)	μ/(10^{10}N/m²)	κ/(10^{10}N/m²)	g/(cm/s²)
6370.0	3.55	6.30	2.84	3.58	6.50	982.7
6338.0	3.55	6.30	2.84	3.58	6.50	985.0
6338.0	4.35	7.75	3.32	6.28	11.56	985.0
6310.0	—	—	—	—	—	
6270.0	4.45	7.95	3.38	6.69	12.44	987.1
6220.0	—	—	—	—	—	—
6170.0	4.60	8.26	3.47	7.34	13.88	990.2
6070.0	4.76	8.58	3.55	8.04	15.41	993.2
5970.0	4.94	8.93	3.63	8.86	17.14	996.2
5957.0	4.96	8.97	3.64	8.96	17.34	996.6
5870.0	5.32	9.66	3.87	10.95	21.51	998.5
5770.0	5.66	10.24	4.10	13.13	25.48	999.5
5670.0	5.93	10.67	4.30	15.12	28.79	999.2
5570.0	6.13	11.01	4.46	16.76	31.72	998.0
5470.0	6.27	11.25	4.57	17.97	33.88	996.3
5370.0	6.36	11.43	4.65	18.81	35.67	994.4
5170.0	6.50	11.71	4.77	20.15	38.54	990.8
4970.0	6.62	11.99	4.89	21.43	41.73	987.9
4770.0	6.73	12.26	5.00	22.65	44.96	986.1
4570.0	6.83	12.53	5.11	23.84	48.44	985.8
4370.0	6.92	12.79	5.22	25.00	52.06	987.5
4170.0	7.02	13.03	5.32	26.22	55.37	991.8
3970.0	7.12	13.27	5.42	27.48	58.81	999.7
3770.0	7.21	13.50	5.52	28.70	62.34	1011.9
3570.0	7.30	13.64	5.61	29.90	64.51	1029.9
3490.0	—	—	—	—	—	—
3470.0	7.30	13.64	5.66	30.16	65.09	1041.5
3470.0		8.10	9.70		63.64	1041.5
3123.0		8.53	10.21		74.29	963.2
2776.0		9.03	10.62		86.60	876.9

续表 11.2.1

地球平均半径/km	S波速/(km/s)	P波速/(km/s)	密度/(g/cm³)	μ/($10^{10}N/m^2$)	κ/($10^{10}N/m^2$)	g/(cm/s²)
2429.0		9.44	11.02		98.20	783.9
2082.0		9.78	11.38		108.85	684.2
1735.0		10.10	11.70		119.35	578.4
1388.0		10.44	11.90		129.70	467.9
1318.6		—	—		—	—
1297.8		—	—		—	—
1283.9		—	—		—	—
1250.0		9.40	12.00		106.03	422.9
1250.0		11.16	12.00		149.45	422.9
1249.2		—	—		—	—
1214.5		—	—		—	—
1179.8		—	—		—	—
1145.1		—	—		—	—
1125.0		11.19	12.06		151.01	381.5
1110.4		—	—		—	—
1075.7		—	—		—	—
1041.0		—	—		—	—
1000.0		11.21	12.10		152.05	339.8
875.0		11.23	12.13		152.97	297.9
867.5		—	—		—	—
750.0		11.25	12.17		154.03	255.8
694.0		—	—		—	—
625.0		11.27	12.20		154.96	213.5
520.5		—	—		—	—
500.0		11.28	12.22		155.49	171.0
375.0		11.29	12.24		156.08	128.4
347.0		—	—		—	—
250.0		11.30	12.26		156.61	85.7
173.5		—	—		—	—
0.0		11.31	12.30		157.34	0.0

表 11-2-2 Gutenberg—Bullard I (G—BI)地球模型

地球平均半径/km	S波速/(km/s)	P波速/(km/s)	密度/(g/cm³)	μ/(10^{10}N/m²)	κ/(10^{10}N/m²)	g/(cm/s²)
6370.0	3.55	6.30	2.84	3.58	6.50	981.6
6338.0	3.55	6.30	2.84	3.58	6.50	983.9
6338.0	4.65	8.16	3.67	7.94	13.86	983.9
6310.0	4.60	8.15	3.70	7.83	14.14	984.0
6270.0	4.40	8.00	3.74	7.24	14.28	984.0
6220.0	4.35	7.85	3.79	7.17	13.79	984.0
6170.0	4.40	8.05	3.83	7.41	14.93	983.9
6070.0	4.60	8.50	3.92	8.29	17.26	983.6
5970.0	—	—	—	—	—	—
5957.0	5.00	9.06	4.01	10.04	19.57	983.0
5870.0	5.30	9.60	4.08	11.46	22.32	982.4
5770.0	5.60	10.10	4.15	13.01	24.98	981.6
5670.0	5.90	10.50	4.21	14.66	26.88	980.9
5570.0	6.15	10.90	4.27	16.16	29.21	980.3
5470.0	6.30	11.30	4.33	17.21	32.41	979.7
5370.0	6.35	11.40	4.40	17.74	33.53	979.2
5170.0	6.50	11.80	4.50	19.01	37.31	978.9
4970.0	6.60	12.05	4.62	20.12	40.25	979.8
4770.0	6.75	12.30	4.72	21.51	42.73	982.1
4570.0	6.85	12.55	4.82	22.62	45.76	986.4
4370.0	6.95	12.80	4.92	23.76	48.92	993.3
4170.0	7.00	13.00	5.02	24.60	52.04	1003.5
3970.0	7.10	13.20	5.11	25.76	54.69	1018.0
3770.0	7.20	13.45	5.21	27.01	58.24	1037.7
3570.0	7.25	13.70	5.30	27.86	62.33	1064.1
3490.0	7.20	13.70	5.35	27.73	63.43	1076.9
3470.0	7.20	13.65	5.36	27.79	62.82	1080.3
3470.0		8.04	10.06		65.03	1080.3
3123.0		8.44	10.60		75.51	999.0
2776.0		8.90	11.06		87.61	908.6

续表 11.2.2

地球平均半径/km	S波速/(km/s)	P波速/(km/s)	密度/(g/cm³)	μ/(10^{10}N/m²)	κ/(10^{10}N/m²)	g/(cm/s²)
2429.0		9.31	11.46		99.33	810.6
2082.0		9.63	11.79		109.34	706.0
1735.0		9.88	12.06		117.72	596.0
1388.0		10.08	12.28		124.77	481.8
1318.6		10.11	12.32		125.93	458.4
1297.8		10.11	12.32		125.98	451.4
1283.9		11.17	12.33		127.58	446.7
1250.0		—	—		—	—
1250.0		—	—		—	—
1249.2		10.48	12.35		135.64	435.0
1214.5		10.76	12.36		143.16	423.2
1179.8		10.93	12.38		147.90	411.4
1145.1		11.04	12.40		151.13	399.6
1125.0		—	—		—	—
1110.4		11.09	12.41		152.63	387.8
1075.7		11.12	12.42		153.64	375.9
1041.0		11.13	12.44		154.10	364.0
1000.0		—	—		—	—
875.0		—	—		—	—
867.5		11.15	12.50		155.40	304.1
750.0		—	—		—	—
694.0		11.17	12.54		156.46	243.9
625.0		—	—		—	—
520.0		11.17	12.58		157.02	183.3
500.0		—	—		—	—
375.0		—	—		—	—
347.0		11.16	12.61		157.05	122.3
250.0		—	—		—	—
173.5		11.15	12.62		156.89	61.2
0.0		11.15	12.63		157.02	0.0

* 表中'—'指无确定值。

表 11.3.1　Gutenberg 大陆分层地球模型

层序号	层底深度/km	密度/(g/cm^3)	v_P/(km/s)	v_S/(km/s)
1	19	2.74	6.14	3.55
2	38	3.00	6.58	3.80
3	50	3.32	8.20	4.65
4	60	3.34	8.17	4.62
5	70	3.35	8.14	4.57
6	80	3.36	8.10	4.51
7	90	3.37	8.07	4.46
8	100	3.38	8.02	4.41
9	125	3.39	7.93	4.37
10	150	3.41	7.85	4.35
11	175	3.43	7.89	4.36
12	200	3.46	7.98	4.38
13	225	3.48	8.10	4.42
14	250	3.50	8.21	4.46
15	300	3.53	8.38	4.54
16	350	3.58	8.62	4.68
17	400	3.62	8.87	4.85
18	450	3.69	9.15	5.04
19	500	3.82	9.45	5.21
20	600	4.01	9.88	5.45
21	700	4.21	10.30	5.76
22	800	4.40	10.71	6.03
23	900	4.56	11.10	6.23
24	1000	4.63	11.35	6.32

表 11.3.2　大陆分层地球模型

深度/km	层厚度/km	α/(km/s)	β/(km/s)	ρ/(g/cm^3)	μ/(10^{11}N/m^2)	λ/(10^{11}N/m^2)
11.0	22	6.03	3.53	2.78	0.35	0.32
29.5	15	6.70	3.80	3.00	0.43	0.48
43.5	13	7.96	4.60	3.37	0.71	0.71
62.5	25	7.85	4.50	3.39	0.69	0.72
100.0	50	7.85	4.41	3.42	0.67	0.78
162.5	75	8.00	4.41	3.45	0.67	0.87
225.0	50	8.20	4.50	3.47	0.70	0.93
300.0	100	8.40	4.60	3.50	0.74	0.99

续表 11.3.2

深度/km	层厚度/km	α/(km/s)	β/(km/s)	ρ/(g/cm^3)	μ/(10^{11}N/m^2)	λ/(10^{11}N/m^2)
400.0	100	9.00	4.95	3.63	0.89	1.16
500.0	100	9.63	5.31	3.89	1.10	1.41
600.0	100	10.17	5.63	4.13	1.31	1.65
700.0	100	10.59	5.92	4.33	1.51	1.82
800.0	100	10.96	6.14	4.49	1.69	2.00
900.0	100	11.28	6.29	4.60	1.82	2.21
1025.0	150	11.46	6.38	4.69	1.91	2.34
1200.0	200	11.76	6.50	4.80	2.03	2.58
1400.0	200	12.02	6.61	4.91	2.15	2.80
1600.0	200	12.28	6.74	5.03	2.29	3.02
1800.0	200	12.54	6.85	5.13	2.41	3.25
2000.0	200	12.80	6.96	5.24	2.54	3.51
2200.0	200	13.02	7.00	5.34	2.62	3.82
2400.0	200	13.24	7.10	5.44	2.74	4.05
	∞	13.46	7.20	5.54	2.87	4.32

表 11.4　地壳为海洋的分层地球模型

深度/km	层厚度/km	α/(km/s)	β/(km/s)	ρ/(g/cm^3)	μ/(10^{11}N/m^2)	λ/(10^{11}N/m^2)
15.5	9	8.11	4.61	3.40	0.72	0.79
22.0	5	8.12	4.61	3.40	0.72	0.80
32.5	15	8.12	4.61	3.40	0.72	0.80
50.0	20	8.01	4.56	3.37	0.70	0.76
70.0	20	7.95	4.56	3.37	0.70	0.73
90.0	20	7.71	4.40	3.37	0.65	0.70
110.0	20	7.68	4.34	3.33	0.63	0.71
130.0	20	7.78	4.34	3.33	0.63	0.76
150.0	20	7.85	4.34	3.33	0.63	0.80
170.0	20	8.10	4.45	3.33	0.66	0.87
220.0	80	8.12	4.45	3.33	0.66	0.88
270.0	20	8.12	4.45	3.35	0.66	0.88
290.0	20	8.12	4.45	3.36	0.67	0.88
310.0	20	8.12	4.45	3.37	0.67	0.89
330.0	20	8.12	4.45	3.38	0.67	0.89
350.0	20	8.24	4.50	3.39	0.69	0.93
365.0	10	8.30	4.53	3.44	0.71	0.96

续表 11.4

深度/km	层厚度/km	α/(km/s)	β/(km/s)	ρ/(g/cm³)	μ/(10^{11}N/m²)	λ/(10^{11}N/m²)
380.0	20	8.36	4.56	3.50	0.73	0.99
402.5	25	8.75	4.80	3.68	0.85	1.13
425.0	20	9.15	5.04	3.88	0.99	1.28
440.0	10	9.43	5.22	3.90	1.06	1.35
455.0	20	9.76	5.40	3.92	1.14	1.45
477.5	25	9.77	5.40	3.93	1.15	1.46
502.5	25	9.78	5.40	3.95	1.15	1.47
527.5	25	9.78	5.40	3.96	1.15	1.48
552.5	25	9.78	5.40	3.99	1.16	1.49
577.5	25	9.79	5.40	4.02	1.17	1.51
602.5	25	9.79	5.40	4.06	1.18	1.52
627.5	25	9.80	5.40	4.09	1.19	1.54
652.5	25	9.80	5.40	4.12	1.20	1.55
677.5	25	10.16	5.60	4.17	1.31	1.69
702.5	25	10.49	5.80	4.21	1.42	1.80
727.5	25	10.82	6.10	4.26	1.58	1.81
752.5	25	11.12	6.20	4.30	1.65	2.01
777.7	25	11.14	6.21	4.48	1.72	2.10
802.5	25	11.15	6.21	4.63	1.79	2.19
827.5	25	11.17	6.22	4.80	1.85	2.27
852.5	25	11.18	6.23	4.94	1.92	2.34
877.5	25	11.22	6.25	4.94	1.93	2.37
902.5	25	11.27	6.28	4.95	1.95	2.38
927.5	25	11.31	6.30	4.95	1.96	2.41
952.5	25	11.35	6.32	4.95	1.98	2.42
977.5	25	11.39	6.34	4.95	1.99	2.45
1002.5	25	11.43	6.36	4.95	2.00	2.47
1027.5	25	11.48	6.38	4.96	2.01	2.50
1052.5	25	11.52	6.39	4.96	2.02	2.53
1077.5	25	11.56	6.41	4.96	2.03	2.56
	∞	11.60	6.42	4.96	2.05	2.58

表 11.5　地壳为地盾的分层地球模型

深度/km	层厚度/km	α/(km/s)	β/(km/s)	ρ/(g/cm^3)	μ/(10^{11}N/m^2)	λ/(10^{11}N/m^2)
19.0	5	6.40	3.70	3.08	0.42	0.42
27.8	13.5	6.70	3.92	3.42	0.53	0.48
37.5	5	8.15	4.75	3.42	0.77	0.73
50.0	20	8.16	4.75	3.42	0.77	0.73
70.0	20	8.21	4.75	3.42	0.77	0.76
90.0	20	8.26	4.75	3.42	0.77	0.79
110.0	20	8.32	4.75	3.42	0.77	0.82
130.0	20	8.30	4.70	3.40	0.75	0.84
150.0	20	8.28	4.58	3.40	0.71	0.91
170.0	20	8.28	4.54	3.40	0.70	0.93
190.0	20	8.28	4.54	3.41	0.70	0.93
210.0	20	8.28	4.54	3.42	0.70	0.94
280.0	120	8.28	4.54	3.45	0.71	0.95
350.0	20	8.31	4.54	3.45	0.71	0.96
365.0	10	8.51	4.64	3.45	0.74	1.01
380.0	20	8.70	4.75	3.45	0.78	1.05
402.5	25	8.74	4.75	3.66	0.83	1.14
524.0	20	8.76	4.75	3.88	0.88	1.23
440.0	10	9.04	5.00	3.90	0.98	1.24
455.0	20	9.49	5.25	3.92	1.08	1.37
477.5	25	9.50	5.25	3.93	1.09	1.38
502.5	25	9.52	5.26	3.95	1.09	1.39
527.5	25	9.53	5.26	3.96	1.10	1.40
552.5	25	9.58	5.29	3.99	1.11	1.43
577.5	25	9.63	5.31	4.02	1.14	1.46
602.5	25	9.68	5.34	4.06	1.16	1.49
627.5	25	9.74	5.37	4.09	1.18	1.52
652.5	25	9.78	5.39	4.12	1.20	1.55
677.5	25	10.01	5.52	4.17	1.27	1.64
702.5	25	10.18	5.63	4.21	1.34	1.69
727.5	25	10.19	5.75	4.26	1.41	1.74
752.5	25	10.49	5.85	4.30	1.47	1.79
777.5	25	10.68	5.95	4.48	1.58	1.93
802.5	25	10.85	6.04	4.63	1.69	2.07
827.5	25	11.03	6.14	4.80	1.81	2.21
852.5	25	11.18	6.23	4.94	1.92	2.34
877.5	25	11.22	6.25	4.94	1.93	2.37
902.5	25	11.27	6.28	4.95	1.95	2.38
927.5	25	11.31	6.30	4.95	1.96	2.41
952.5	25	11.35	6.32	4.95	1.98	2.42
977.5	25	11.39	6.34	4.95	1.99	2.45
1002.5	25	11.43	6.36	4.95	2.00	2.47
1027.5	25	11.48	6.38	4.96	2.01	2.50
1052.5	25	11.52	6.39	4.96	2.02	2.53
1077.5	25	11.56	6.41	4.96	2.03	2.56
	∞	11.60	6.42	4.96	2.05	2.58

§2　地震资料预处理的一些问题

对于人工爆炸与天然地震，所研究的信号多是瞬态的。设瞬态信号 $f(t)$ 的谱振幅为 $F(\omega)$，即 Fourier 变换对为

$$\left.\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t \\ f(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega \end{aligned}\right\} \tag{11.1}$$

式中 t 是时间，ω 是角频率，且

$$F(\omega) = |F(\omega)|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(\omega)} \tag{11.2}$$

式中 $|F(\omega)|$ 为谱振幅密度、$\varphi(\omega)$ 为谱相位延迟。由于 $f(t)$ 是实函数，故有

$$\left.\begin{aligned} F^{*}(\omega) &= F(-\omega) \\ |F(\omega)| &= |F(-\omega)| \\ \varphi(\omega) &= -\varphi(-\omega) \end{aligned}\right\} \tag{11.3}$$

式中"＊"表示共轭函数。

为定量地讨论地震数据中的信噪问题，可将地震图 $f(t)$ 数字化为离散的时间点，并设 $f(t)$ 不包含高于 Ω 的频率，这个 $f(t)$ 称为限带函数，2Ω 称为 $f(t)$ 的带宽。这样，把式(11.1)中的第二式写成

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-2\pi\Omega}^{2\pi\Omega} F(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega \tag{11.4}$$

由于 $F(\omega)$ 当 $-2\pi\Omega \leqslant \omega \leqslant 2\pi\Omega$ 时是确定的，它可由具有基本波长为 $4\pi\Omega$ 的 Fourier 级数来表达

$$F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega/2\Omega} \tag{11.5}$$

系数 F_n 由下式确定

$$F_n = \frac{1}{4\pi\Omega}\int_{-2\pi\Omega}^{2\pi\Omega} F(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega/2\Omega}\mathrm{d}\omega \tag{11.6}$$

将它与式(11.4)比较，可发现

$$F_n = \frac{f\left(\frac{n}{2\Omega}\right)}{2\Omega} \tag{11.7}$$

将式(11.7)代入式(11.5)得到$F(\omega)$,再代入式(11.4),可得到

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{4\pi\Omega}\sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n}{2\Omega}\right)\int_{-2\pi\Omega}^{2\pi\Omega}\exp\left(\frac{\mathrm{i}\omega n}{2\Omega} - \mathrm{i}\omega t\right)\mathrm{d}\omega \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n}{2\Omega}\right)\frac{\sin[\pi(2\Omega t - n)]}{\pi(2\Omega t - n)} \end{aligned} \tag{11.8}$$

当$t=\frac{m}{2\Omega}$(m 为一整数)时,等式两边都变成$f\left(\frac{m}{2\Omega}\right)$,这样,完全可以用间隔为$\frac{1}{2\Omega}$所取的离散采样(Nyquist 采样间隔)来描述不包含频率高于Ω的地震图$f(t)$,因而式(11.8)表达的内容称为采样定理。若$f(t)$的时间长度为T秒,则描述$f(t)$所需的采样总数为$2\Omega T$。研究表明,当信号与噪声都是有限带宽的白噪声时,对有用信息的极限量可由下式给出

$$\Omega T\log_2\frac{S^2+N^2}{N^2} \tag{11.9}$$

式中S^2和N^2分别表示信号与噪声的功率。

以小于$\frac{1}{2\Omega}$的间隔采样也是允许的,但数据量会过大。若采样间隔大于$\frac{1}{2\Omega}$,就会出现某种不希望有的信号重叠,给出已采样函数的伪频谱。图 11.1 表示频率为Ω,在间距相等、间隔大于$\frac{1}{2\Omega}$的离散时间上采样的正弦曲线。若把已采样的点平滑连接,这些点就显示出原始数据所不存在的周期性,此称为混淆(aliasing)。应该注意使混淆现象不出现。

作为线性系统,地震记录图可看作是经过一系列逻辑块的输出。例如对于远震体波,可认为地震图是一系列代表震源、接近震源的浅层结构、地球深处内部结构、近于接收点的浅层结构和记录仪器的逻辑块的输出。而对于面波的传播,可认为地震图是一系列简正振型组



图 11.1　混淆现象(虚线为假信号)

成的逻辑块输出等。以脉冲响应函数表示每个逻辑块的影响。显然，地震仪就是这逻辑块系列中的一块，为研究地动位移的真实情况，要用某种方法将仪器效应从记录中消除掉，例如取记录的 F 变换，再用地震仪的频率响应去除它，然后作该比率的 Fourier 逆变换。也就是说，定义逻辑块的脉冲响应为 $g(t)$，Fourier 变换为 $G(\omega)$，则该逻辑块的输出 $d(t)$就表示为输入 $u(t)$和脉冲响应的褶积

$$d(t) = u(t) * g(t) = \int_0^{\infty} u(t-\tau)g(\tau)\mathrm{d}\tau \qquad (11.10)$$

把 $u(t)$和 $d(t)$的 Fourier 变换分别写为 $U(\omega)$和 $D(\omega)$，得到

$$D(\omega) = U(\omega)G(\omega) \qquad (11.11)$$

再用输出复原输入，可得

$$u(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{D(\omega)}{G(\omega)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega \qquad (11.12)$$

或引入反滤波器的脉冲响应函数

$$g^{-1}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}}{G(\omega)}\mathrm{d}\omega \qquad (11.13)$$

再用反褶积复原输入，即

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d(t-\tau)g^{-1}(\tau)\mathrm{d}\tau \qquad (11.14)$$

另外，还可用递归滤波器作数字滤波而得到输入。

关于地震数据的测量，还应该讨论两个问题，一是关于初动的测量，二是关于相速度的测量及其精度。

为确定地震定位参数，了解震源断层面产状及现代构造活动，都需要测定地震波初动信号，利用式(11.9)，可得

$$\Delta t = \frac{1}{\Omega \log_2\left(1 + \frac{S^2}{N^2}\right)} \tag{11.15}$$

Δt 被认为是测量初动到时误差的量度。可看出，误差反比于频带宽 Ω 及信噪比的对数。当信噪比大时，信号振幅的增加只略略改善时间测量的精度。

至于相速度的测量，例如面波地震图，若认为它是单一振型组成的，则观测到的波 $f(x,t)$ 可用一简单表达式近似为

$$f(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |f(x,\omega)| \exp\left[-\mathrm{i}\omega\left(t - \frac{x}{c(\omega)}\right) + \mathrm{i}\varphi(\omega)\right]\mathrm{d}\omega \tag{11.16}$$

式中 $c(\omega)$ 是相速度，传播产生的相位延迟 $\frac{\omega x}{c(\omega)}$ 可通过对地震图作 Fourier 分析得到。因式(11.16)的 Fourier 变换可写成

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x,t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t = |f(x,\omega)| \exp\left[\mathrm{i}\varphi(\omega) + \mathrm{i}\,\frac{\omega x}{c(\omega)}\right] \tag{11.17}$$

故测量距离为 x_1 和 x_2 的两台间相位谱之差 $\frac{\omega}{c(\omega)}(x_1 - x_2) \pm 2n\pi$ 就可得出相速度 $c(\omega)$。

噪声如何影响相速度测量精度呢？设地震图 $d(t)$ 由信号 $\delta(t)$ 噪声 $n(t)$ 组成，则

$$d(t) = s(t) + n(t) \tag{11.18}$$

把 $s(t)$ 的 Fourier 变换写作 $|S(\omega)|\exp[\mathrm{i}\varphi_s(\omega)]$，$n(t)$ 的 Fourier 变换写作 $|N_T(\omega)|\exp[\mathrm{i}\varphi_n(\omega)]$（信号持续时间为 $2T$），则 $n(t)$ 的功率谱密度 $P(\omega)$ 与 $N_T(\omega)$ 的关系为

$$P(\omega) = \lim_{T \to \infty} \frac{|N_T(\omega)|^2}{2T} \tag{11.19}$$

地震图的 Fourier 变换 $D(\omega)$ 可写成

$$|D(\omega)|\exp[\mathrm{i}\varphi_d(\omega)] = |S(\omega)|\exp[\mathrm{i}\varphi_s(\omega)] + |N_T(\omega)|\exp[\mathrm{i}\varphi_n(\omega)] \tag{11.20}$$

当 $|N_T(\omega)|/|S(\omega)|$ 很小时，可写出

$$\varphi_d(\omega) \approx \varphi_s(\omega) + \frac{|N_T(\omega)|}{|S(\omega)|}\sin[\varphi_n(\omega) - \varphi_s(\omega)] \tag{11.21}$$

式中第二项是噪声引起的相位变化，若 $n(t)$ 与 $s(t)$ 不相关，$\varphi_n - \varphi_s$ 从 0 至 2π 随机均匀地分布，则 $\varphi_d(\omega)$ 的均方根变化为

$$\Delta\varphi_{\mathrm{RMS}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{|N_T(\omega)|}{|S(\omega)|} \tag{11.22}$$

具有相同信号和噪声电平的两个台站间相位差的均方根误差是 $|N_T(\omega)|/|S(\omega)|$，因而相速度测量的均方根误差为

$$\frac{\Delta c_{\mathrm{RMS}}}{c} = \frac{1}{2\pi}\frac{|N_T(\omega)|}{|S(\omega)|}\frac{\lambda}{\Delta x} \tag{11.23}$$

式中 λ 是波长，Δx 是测量相位差的两个台站的距离。可看出，相速度测量的误差反比于信号谱振幅值，而与波长成正比。因此，改善相速度测量的精度有两个基本办法：或提高信噪比 $\frac{|N_T(\omega)|}{|S(\omega)|}$，或减小 $\frac{\lambda}{\Delta x}$。使用多台方法（两台法或三台法）能较好改善测量精度。

§3　高频地震波的扩散因数与散射因数

高频波的能量沿射线管扩散，从第八章§4已知射线振幅 ξ_n 的解式(8.104)，利用它来计算射线的能量扩散问题。

设在点源 F 处作单位震源球，t_0 为从 F 点到单位球面上任一点的走时，位移随时间的变化为 $e^{-i\omega t}$，用如图 8.5 所示的射线坐标系 (t, i_h, φ)，可将位移分量写成

$$u_j = e_j \chi_j e^{-i\omega t_j},\ j = 1,2,3 \tag{11.24}$$

这里 χ_j 为与射线振幅 ξ_n 及介质参数有关的系数，且

$$\left.\begin{array}{lll} \boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{L}, & \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{N}, & \boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{M} \\ \hat{\boldsymbol{e}}_1 = \hat{\boldsymbol{t}}, & \hat{\boldsymbol{e}}_2 = \hat{\boldsymbol{i}}_h & \hat{\boldsymbol{e}}_3 = \hat{\boldsymbol{\varphi}} \end{array}\right\} \tag{11.25}$$

将从式(8.104)解出的 ξ_n 代入位函数式(8.50)，再代入位移式(8.43)中，得到高频位移公式

$$u_j(t) = |u_j(t_0)| G_j(t/t_0) e_j e^{-i\omega t} \tag{11.26}$$

式中

$$G_j(t/t_0) = \left[\frac{v_j(t_0)\rho(t_0)W(t_0)}{v_j(t)\rho(t)W(t)}\right]^{1/2}$$
$$= \frac{1}{r}\left|\frac{v_j(t_0)\rho(t_0)}{v_j(t)\rho(t)}\ \frac{\sin i_h}{\sin\theta\cos i}\left(\frac{\partial i_h}{\partial\theta}\right)_r\right|^{1/2} \tag{11.27}$$

$G_j(t/t_0)$ 称为扩散因数（The Divergence coefficient）。式中的 $\left(\frac{W(t_0)}{W(t)}\right)^{1/2}$ 是射线管的横切面之比的平方根表示沿射线管的几何扩散，由图 11.2 可看出，在极限情况下

$$\frac{W(t_0)}{W(t)} = \frac{(\delta i_h)(\sin i_h\delta\varphi)}{[(a\delta\Delta)(a\sin\Delta\delta\varphi)]\cos i_0} = \frac{\sin i_h}{a^2\sin\Delta\cos i_0}\left(\frac{\partial i_h}{\partial\theta}\right)_a \tag{11.28}$$

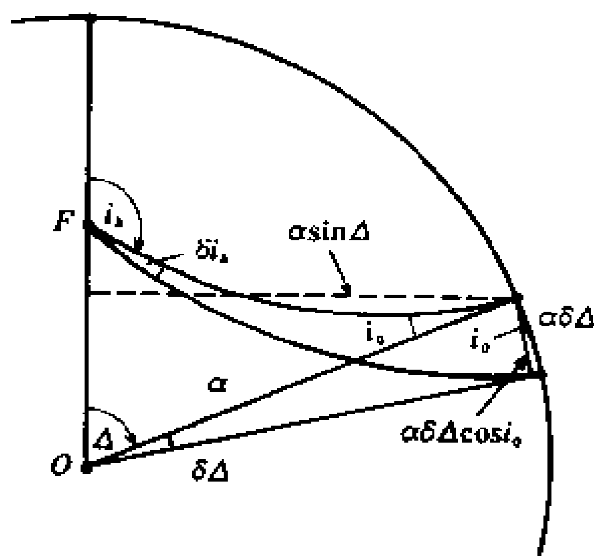


图 11.2　高频波的几何扩散

由于

$$p = \left(\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}\theta}\right)_r = \frac{r_h}{v_h}\sin i_h,\left(\frac{\partial i_h}{\partial\theta}\right)_r = \frac{v_h}{r_h}\frac{1}{\cos i_h}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial\theta^2}\right)_r$$

代入式(11.27)，可使 G_j 变成

$$G = \frac{v(r_h)}{r}\left|\frac{\rho(r_h)}{\rho(r)}\ \frac{1}{r_h v}\ \frac{\tan i_h}{\sin\theta\cos i}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial\theta^2}\right)_r\right|^{1/2} \tag{11.29}$$

从上式可知,走时的二次微商与波沿射线管的扩散因数成正比。

在球对称介质中,我们主要讨论的是直达 P、S 波能流。但在地表及核幔边界,有重要的反射波(图 11.3)。作高频射线振幅展开,也可得到位移振幅值为

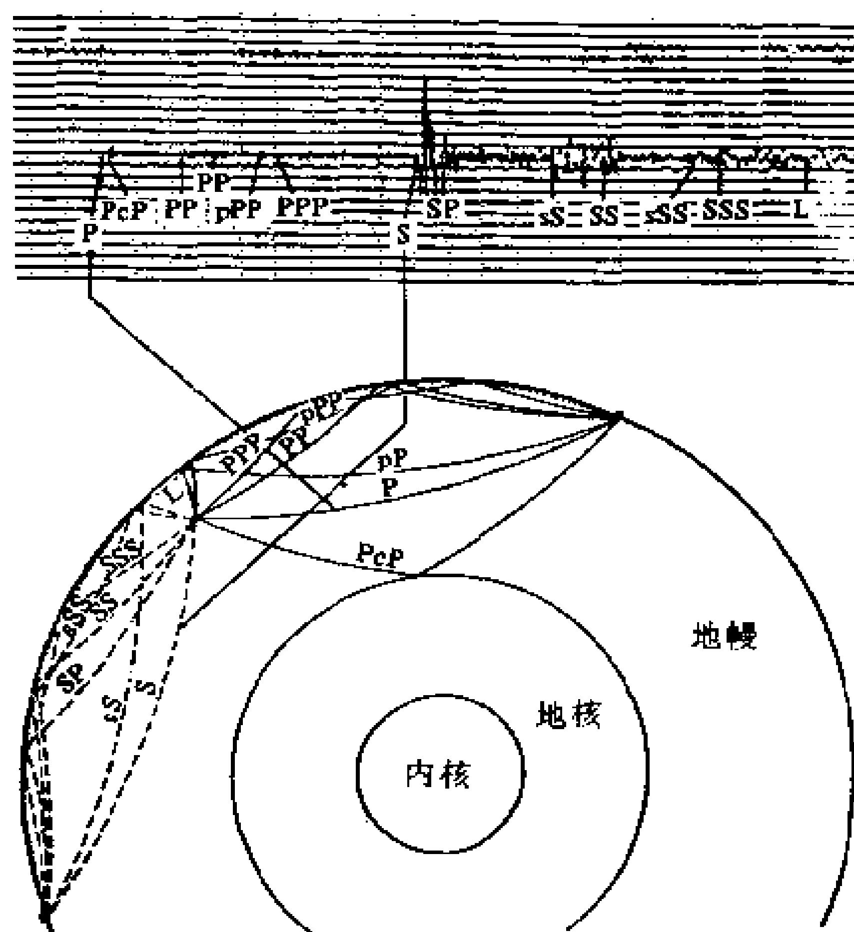


图 11.3 核幔波射线与震相

$$
\left.\begin{aligned}
u_{\mathrm{P}} &= u_R = \frac{P_0}{R}F_1 \\
u_{\mathrm{SV}} &= u_{i_h} = \frac{P_0}{R}F_2 \\
u_{\mathrm{SH}} &= u_{\varphi_h} = \frac{P_0}{R}F_3
\end{aligned}\right\} \tag{11.30}
$$

式中 $P_0=U_0S$，

$$\left.\begin{aligned}F_1&=\frac{1}{12\pi\beta_h}\left(\frac{\beta_h}{\alpha_h}\right)^3[6p_5P_2(\cos i_h)+2p_4P_2^1(\cos i_h)-p_2P_2^2(\cos i_h)]\\F_2&=\frac{1}{24\pi\beta_h}[6p_5\frac{\partial}{\partial i_h}P_2(\cos i_h)+2p_4\frac{\partial}{\partial i_h}P_2^1(\cos i_h)-p_2\frac{\partial}{\partial i_h}P_2^2(\cos i_h)]\\F_3&=\frac{1}{12\pi\beta_h}\frac{1}{\sin i_h}[p_3P_2^1(\cos i_h)-p_1P_2^2(\cos i_h)]\end{aligned}\right\}\tag{11.31}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}p_1&=(\sin\lambda\sin\delta\cos\delta)\sin2\varphi_h+(\cos\lambda\sin\delta)\cos2\varphi_h\\p_2&=(\cos\lambda\sin\delta)\sin2\varphi_h-(\sin\lambda\sin\delta\con\delta)\cos2\varphi_h\\p_3&=-(\cos\lambda\cos\delta)\sin\varphi_h+(\sin\lambda\cos2\delta)\cos\varphi_h\\p_4&=(\sin\lambda\cos2\delta)\sin\varphi_h+(\cos\lambda\cos\delta)\cos\varphi_h\\p_5&=\sin\lambda\sin\delta\cos\delta\end{aligned}\right\}\tag{11.32}$$

图 11.4a 表示 ScP 波的射线束$[(i_h,\varphi_h),(i_h+di_h,\varphi_h+d\varphi_h)]$在核幔边界 A 点反射并到达地表的 $P(a,\theta,\varphi_h)$点。考虑单位震源球 Q,SV 型入射波束的横切面积为 W_1,反射 P 型波束的横切面积为 W_2,它入射到地表的横切面积为 W_0。设在单位震源球内介质是均匀的,射线为直线,在球内射线束 QP_H 的能量密度为 E_H,P_H 处的横切面积为 W_H(图 11.4b),则在无衰减的情况下,有

$$\left.\begin{aligned}E_HW_H&=E_1W_1\\E_2W_2&=E_0W_0\end{aligned}\right\}\tag{11.33}$$

那么

$$\frac{E_0}{E_H}=\frac{E_0}{E_2}\frac{E_2}{E_1}\frac{E_1}{E_H}=\frac{E_2}{E_1}\frac{W_2}{W_1}\frac{W_H}{W_0}\tag{11.34}$$

而已知

$$\frac{W_H}{W_0}=\left(\frac{1}{a}\right)^2\frac{\sin i_h}{\sin\theta\cos i_0}\left|\frac{di_h}{d\theta}\right|\tag{11.35}$$

式中 i_0 是 ScP 在自由表面或 Moho 界面的入射角。至于$\frac{W_2}{W_1}$值依赖于

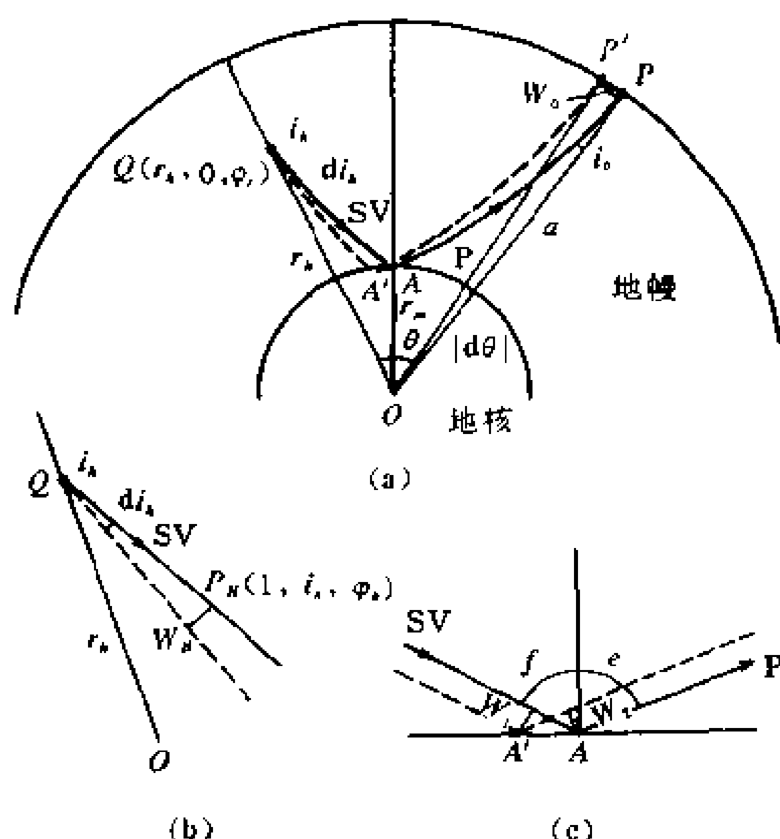


图 11.4 ScP 射线束

核一幔边界的条件，近似地用平面波入射到平界面的情况（图 11.4c），有

$$\frac{W_2}{W_1}=\frac{\cos e}{\cos f} \tag{11.36}$$

式中角 e 和 f 为 P、S 射线与法线的夹角。这样，

$$\frac{E_0}{E_H}=\frac{E_2\cos e}{E_1\cos f}\left(\frac{1}{a}\right)^2\frac{\sin i_h}{\sin\theta\cos i_0}\left|\frac{di_h}{d\theta}\right| \tag{11.37}$$

式中 $E_1\cos f$ 是入射 SV 波在单位时间内在核幔边界上单位面积所传入的能量，$E_2\cos e$ 是反射 P 波在单位时间内在核幔边界上单位面积所输出的能量，而一个周期内的能量密度值 $E=\frac{1}{2}\rho v^2\omega^2A^2$（$A$ 为振幅），则从式（11.37）可得出

$$\frac{A_0}{A_H}=ZG \tag{11.38}$$

式中
$$Z = \left(\frac{E_2 \cos e}{E_1 \cos f} \right)^{1/2} \tag{11.39}$$

$$G = \frac{1}{a} \left(\frac{\rho_h V_h}{\rho_0 V_0} \frac{\sin i_h}{\sin\theta \cos i_0} \left| \frac{\mathrm{d} i_h}{\mathrm{d}\theta} \right| \right)^{1/2} \tag{11.40}$$

这里 $V_h = \beta(r_h)$，$V_0 = \alpha(a)$。这样，由式(11.30)和(11.38)(令 $R=1$)得

$$u_{\mathrm{ScP}} = P_0 Z G F_2 \tag{11.41}$$

它与式(11.26)一样，位移值比例于扩散因数 G，当然，也与散射因数 Z 成比例，

若边界面上有多个反射波与透射波，则有

$$Z = \prod_j Z_j \tag{11.42}$$

这里的 Z_j 是入射到边界面单位面积上的能量与反射波(或透射波)能量之比的平方根，称 Z 及 Z_j 为散射因数(反射因数及折射因数)。

通过式(11.39)，可得到散射因数与位移振幅比的关系，将它们表示于表 11.6。比如设 E_1 是入射射线束单位横切面上在单位时间内的能流，入射波位移振幅为 A_1，相应的速度为 V_1，入射角为 i_1，入射介质的密度为 ρ_1，其在边界面上产生的波(反射与透射)的相应量为 A_2、V_2、i_2 和 ρ_2，运用式(11.39)及 Senll's 定律 $\sin e_2/V_2 = \sin e_1/V_1$，可得

$$Z = \left(\frac{E_2 \cos e_2}{E_1 \cos e_1} \right)^{1/2} = \left| \frac{A_2}{A_1} \right| \left(\frac{\rho_2 \sin 2e_2}{\rho_1 \sin 2e_1} \right)^{1/2} \tag{11.43}$$

对于反射情况，$\rho_2 = \rho_1$，对于同名反射，$e_2 = e_1$。入射在核幔边界的 SV 波还应符合能流守恒，即

$$[\mathrm{SP}(11)]^2 + [\mathrm{SS}(11)]^2 + [\mathrm{SP}(12)]^2 = 1 \tag{11.44}$$

及 Snell's 定律

$$p = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}\Delta} = \frac{r_h \sin i_h}{\beta_h} = \frac{r_m \sin f}{\beta_m} = \frac{r_m \sin e}{\alpha_m} = \frac{a \sin i_0}{\alpha_0} \tag{11.45}$$

表 11.6　散射因数与位移振幅比的关系

反　射（自由表面）	反　射（核幔边界）
$PP(1)=\left\|\dfrac{A^0}{A}\right\|$	$PP(11)=\left\|\dfrac{A_1}{A}\right\|$
$PS(1)=\left\|\dfrac{B^0}{B}\right\|\left(\dfrac{\sin 2f}{\sin 2e}\right)^{1/2}$	$PS(11)=\left\|\dfrac{B_1}{A}\right\|\left(\dfrac{\sin 2f}{\sin 2e}\right)^{1/2}$
$SP(1)=\left\|\dfrac{A^0}{B}\right\|\left(\dfrac{\sin 2e}{\sin 2f}\right)^{1/2}$	$SP(11)=\left\|\dfrac{A_1}{B}\right\|\left(\dfrac{\sin 2e}{\sin 2f}\right)^{1/2}$
$SS(1)=\left\|\dfrac{B^0}{B}\right\|$	$SS(11)=\left\|\dfrac{B_1}{B}\right\|$
折　射（核幔边界）	**折　射（核幔边界）**
$PP(12)=\left\|\dfrac{A'}{A}\right\|\left(\epsilon\dfrac{\sin 2e'}{\sin 2e}\right)^{1/2}$	$PP(21)=\left\|\dfrac{A''}{A}\right\|\left(\dfrac{1}{\epsilon}\dfrac{\sin 2e}{\sin 2e'}\right)^{1/2}$
$SP(12)=\left\|\dfrac{A'}{B}\right\|\left(\epsilon\dfrac{\sin 2e'}{\sin 2f}\right)^{1/2}$	$PS(21)=\left\|\dfrac{B''}{A}\right\|\left(\dfrac{1}{\epsilon}\dfrac{\sin 2f}{\sin 2e'}\right)^{1/2}$
反　射（核幔边界）	
$PP(22)=\left\|\dfrac{A_2}{A}\right\|$	

注：表中 ϵ 为地核密度与地幔密度之比。

再加上核幔边界的边界条件，可得到核幔边界的一系列散射因数 SP(11)，SS(11)，SP(12)等，它们与入射角 e、f 及介质参数的关系为第五章所述的平界面的散射因数的推广。表 11.7 列出地球介质中出现的一些主要震相的散射因数。图 11.5 是 ScP（SP(11)）和 ScS（SS(11)）随入射角 f 的变化图，其中 $\rho'/\rho=1.714$，$\beta/\alpha=0.535$，$\alpha'/\alpha=0.594$（α'，ρ'为核内介质参数）。

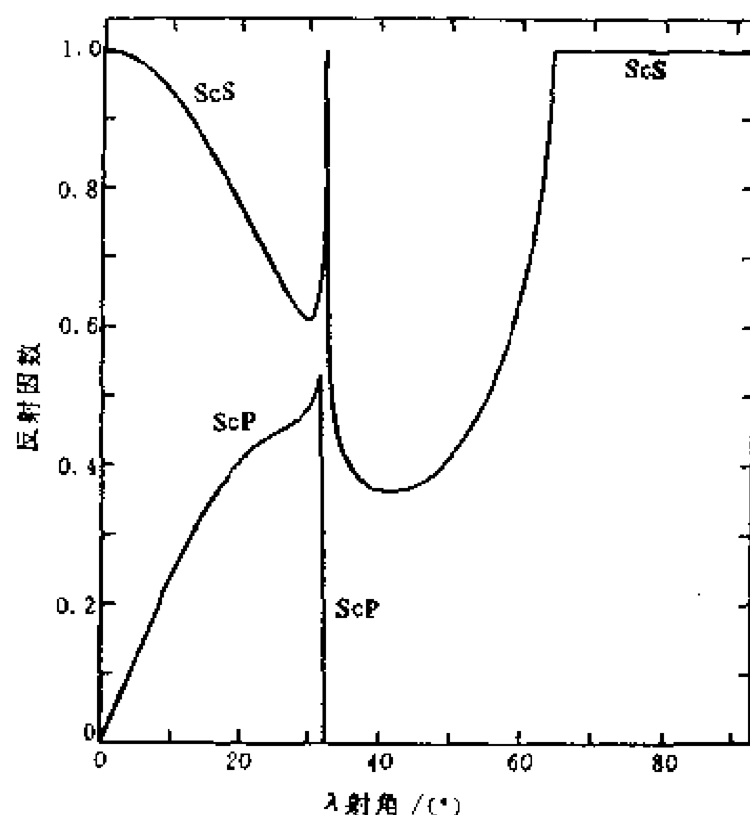


图 11.5 ScP 和 ScS 的反射因数

表 11.7 某些震相的反射因数

震相	Z	震相	Z
P	1	SPP	SP(1)·PP(1)
S	1	SPS	SP(1)·PS(1)
SH	1	SSP	SS(1)·SP(1)
PP	PP(1)	SSS	SS(1)·SS(1)
PS	PS(1)	SSSH	1
SP	SP(1)	PcP	PP(11)
SS	SS(1)	PcS	PS(11)
SSH	1	ScP	SP(11)
PPP	PP(1)·PP(1)	ScS	SS(11)
PPS	PP(1)·PS(1)	PKP	PP(12)·PP(21)
PSP	PS(1)·SP(1)	PKS	PP(12)·PS(21)
PSS	PS(1)·SS(1)	SKP	SP(12)·PP(21)
		SKS	SP(12)·PS(21)

§4 移动源的方向性函数

对于有限移动源，定义在台站及台站对蹠点的谱位移比为方向性函数(The directivity function)。根据位移式(4.34)式，方向性函数可写成

$$D_a(i_h,\varphi_h)=\frac{u_R(R,i_h,\varphi_h;\omega)}{u_R(R,\pi-i_h,\pi+\varphi_h;\omega)}$$

$$=\left[\frac{1+\left(\frac{V_f}{\alpha}\right)\cos\Theta}{1-\left(\frac{V_f}{\alpha}\right)\cos\Theta}\right]\left[\frac{\sin\left[\frac{\omega L}{2V_f}\left(1-\frac{V_f}{\alpha}\cos\Theta\right)\right]}{\sin\left[\frac{\omega L}{2V_f}\left(1+\frac{V_f}{\alpha}\cos\Theta\right)\right]}\right]e^{i\omega\frac{L}{\alpha}\cos\Theta}$$

(11.46)

式中参数可参看图4.5。方向性函数 D_a 的零点在频率为 $\frac{2\pi n}{t_{d_a}}$ 处，极点在频率为 $\frac{2\pi n}{t_{d_a}^*}$ 处($n=1,2,3,\cdots$)，这里

$$t_{d_a}=\frac{L}{V_f}\left(1-\frac{V_f}{\alpha}\cos\Theta\right),t_{d_a}^*=\frac{L}{V_f}\left(1+\frac{V_f}{\alpha}\cos\Theta\right)\quad(11.47)$$

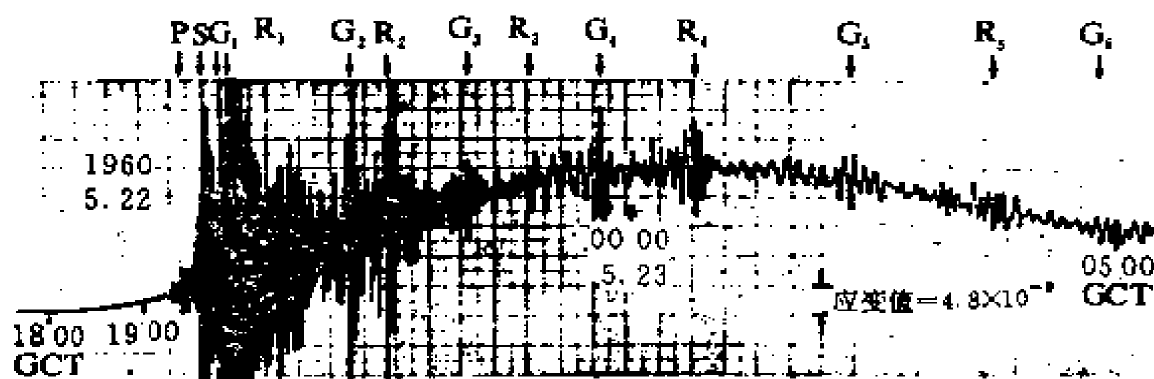


图11.6 1960年5月22日智利地震的长周期面波记录

可看出，利用 D_a 的特征，可求移动源参数 L、V_f 等。特别是对于大圆路径面波，用绕地球转偶数圈的瑞利面波 R_{2n} 与其相邻圈的奇数面波 R_{2n+1}(或 R_{2n-1})的谱位移相比，得到方向性函数，运用式(11.47)、

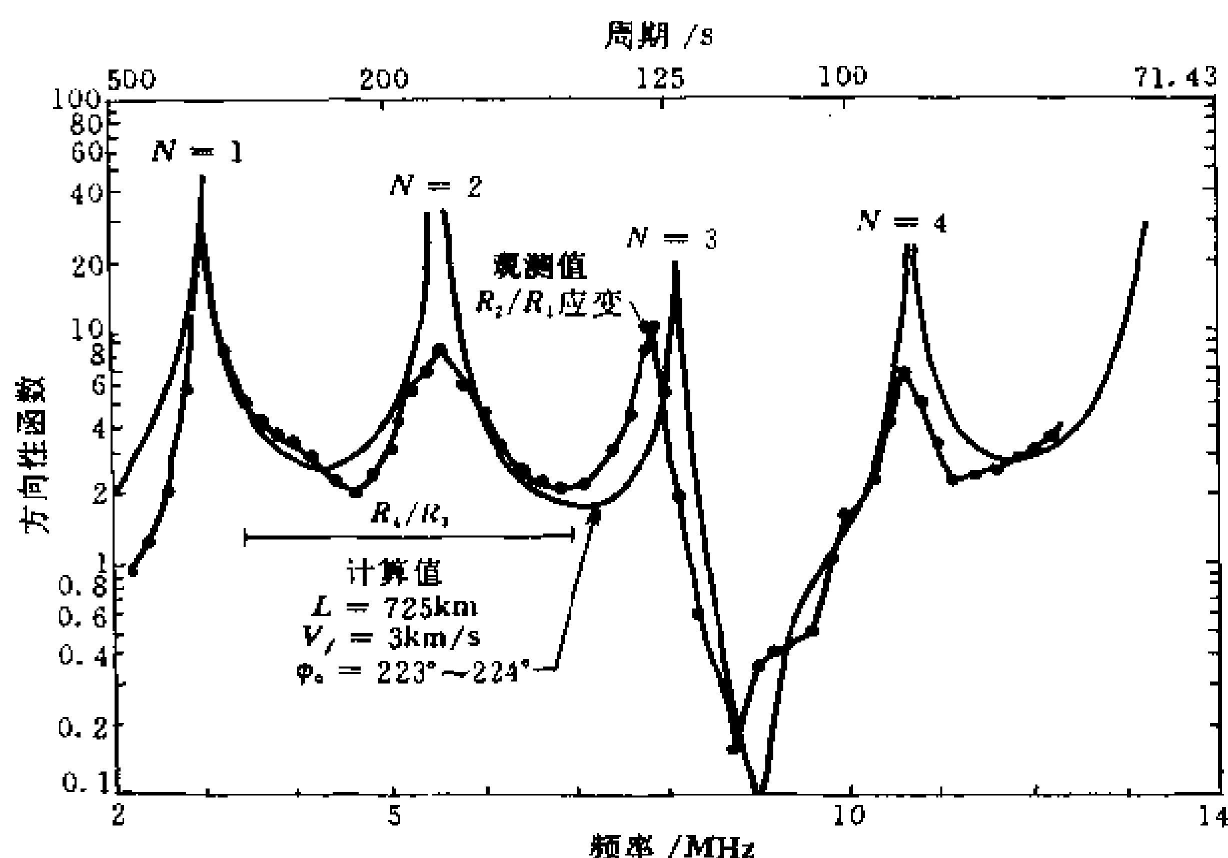


图 11.7 智利地震方向性函数的拟合

用 c_R 代替 α，就可求出移动源的有限移动速度 V_f 及移动源线度 L。这对于发生在不易进行震源处断层情况实地测量的地震更是方便。具体的作法是用 D_α 的理论值与观测值进行拟合来求得。图 11.6 是 1960 年 5 月 22 日智利地震的长周期面波记录，图 11.7 是其方向性函数拟合图，从中得到这次地震的 $L=725\text{km}$，$V_f=3\text{km/s}$。这种方法也是面波振幅理论的具体应用。

§5 自由振荡位移的数值计算

对于真实地球介质的自由振荡固有周期的计算必须运用数值积分方法，在求得本征周期解的同时还得到群速度值。

引入下列量纲为一的参数

$$\left.\begin{aligned}&\bar{r} = \frac{r}{a},\bar{\tau} = \frac{b}{a},\bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda_r},\bar{\mu} = \frac{\mu}{\mu_r}\\&\bar{\rho}_0 = \frac{\rho_0}{\rho_r},\bar{\omega} = \frac{\omega}{\omega_r},\bar{g} = \frac{g_0}{g_r},\bar{G} = \frac{G}{G_r}\end{aligned}\right\} \tag{11.48}$$

式中 a 为地球平均半径，b 为地核平均半径，μ_r、ρ_r 为刚度与密度的参考值

$$\left.\begin{aligned}&\omega_r = \left(\frac{1}{a}\right)\beta_r,\beta_r = \left(\frac{\mu_r}{\rho_r}\right)^{1/2}\\&g_r = \frac{\mu_r}{a\rho_r},G_r = \frac{\mu_r}{a^2\rho_r^2}\end{aligned}\right\} \tag{11.49}$$

对于扭转振荡，定义

$$y_2^* = \frac{a}{\mu_r}y_2 = \bar{\mu}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\bar{r}} - \frac{1}{\bar{r}}\right)y \tag{11.50}$$

而对于球型振荡，有

$$\left.\begin{aligned}&y_2^* = \frac{a}{\mu_r}y_2 = (\bar{\lambda}+2\bar{\mu})\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}\bar{r}} + \frac{\bar{\lambda}}{\bar{r}}[2y_1 - l(l+1)y_3]\\&y_4^* = \frac{a}{\mu_r}y_4 = \bar{\mu}\left[\frac{\mathrm{d}y_3}{\mathrm{d}\bar{r}} + \frac{y_2 - y_3}{\bar{r}}\right]\end{aligned}\right\} \tag{11.51}$$

对于扭转振荡，关于位移的方程组（参看式(7.10)）可写成

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}y_1(\bar{r})}{\mathrm{d}\bar{r}} = \frac{y_1(\bar{r})}{\bar{r}} + \frac{y_2^*(\bar{r})}{\bar{\mu}}\\&\frac{\mathrm{d}y_2^*(\bar{r})}{\mathrm{d}\bar{r}} = \left[\bar{\omega}^2\bar{\rho}_0 - \frac{\bar{\mu}(l-1)(l+2)}{\bar{r}^2}\right]y_1(\bar{r}) + \frac{3}{\bar{r}}y_2^*(\bar{r})\end{aligned}\right\} \tag{11.52}$$

符合的边界条件为

$$y_2^*(1) = y_2^*(\bar{\tau}) = 0 \tag{11.53}$$

用 $\bar{\omega}$ 的一个尝试值，从核幔边界面 $y_2^* = 0$ 开始，用 Runge－Kutta 方法数值积分直至地表，再校正尝试值，使它在地表符合 $y_2^* = 0$，并归一化使在地表的 $y_1 = 1$。

用方程式(7.88)，相速度和群速度可表达为

$$\bar{c}_L = \bar{\omega}\left(l + \frac{1}{2}\right)^{-1} \qquad \bar{U}_L = \frac{1}{\bar{c}_L}\left(\frac{\bar{I}_2^T}{\bar{I}^T}\right) \tag{11.54}$$

这里

$$\left.\begin{aligned} \bar{c}_L &= \frac{c_L}{\beta_r}, \bar{U}_L = \frac{U_L}{\beta_r} \\ \bar{I}^T &= \int_r^1 \bar{\rho}_0 \left[\frac{y_1(\bar{r})}{y_1(1)}\right]^2 \bar{r}^2 d\bar{r} \\ \bar{I}_2^T &= \int_r^1 \bar{\mu} \left[\frac{y_1(\bar{r})}{y_1(1)}\right]^2 d\bar{r} \end{aligned}\right\} \tag{11.55}$$

将 $\bar{I}^T$ 与 $\bar{I}_2^T$ 写成微分形式

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{d\bar{r}}\bar{I}^T &= \rho_0 r^2 \left[\frac{y_1(r)}{y_1(1)}\right]^2 \\ \frac{d}{d\bar{r}}\bar{I}_2^T &= \bar{\mu}\left[\frac{y_1(\bar{r})}{y_1(1)}\right]^2 \end{aligned}\right\} \tag{11.56}$$

可将它与式(11.52)联立求解，可以同样的精度得到对于给定本征频率的本征位移—应力值及群速度。

对于球型振荡，用 4 阶 Runge-Kutta 方法作数值积分，用与扭转振荡同样步骤可得本征位移与群速度值。

表 11.8 是对于 J-B 地球模型所计算的基谐与 1、2 阶的本征值及现测值(括号内数值)。图 11.8 是对于 $l=2, n=0,1,2,3$ 所计算的扭转型振荡的本征位移值(在地表已归一)。

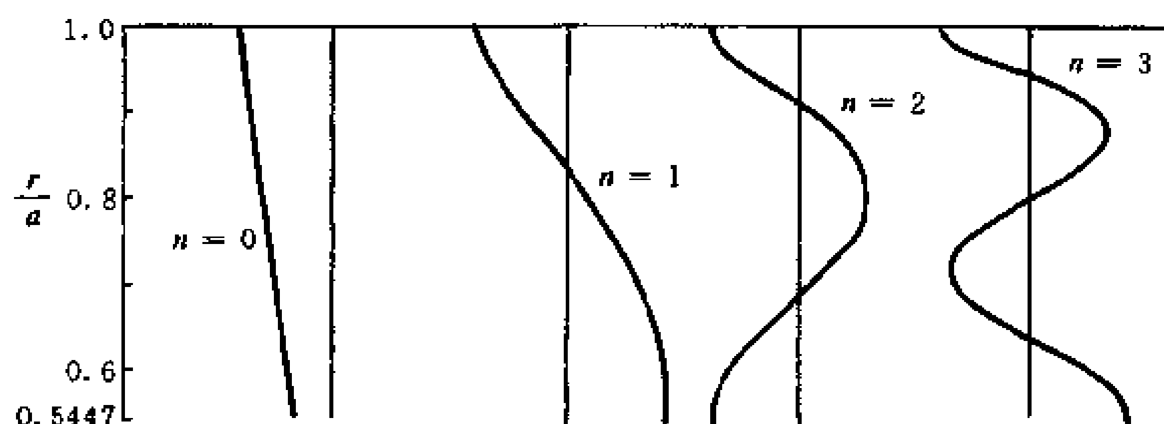


图 11.8 $l=2, n=0,1,2,3$ 时扭转型位移理论值

表 11.8 J-B 地球模型的自由振荡本征周期

l	扭转振荡本征周期/s			球型振荡本征周期/s		
	$n=0$	$n=1$	$n=2$	$n=0$	$n=1$	$n=2$
1		805(808)	452	—	2447(2486)	1062
2	2610(2579)	753	443	3206(3232)	1458(1469)	911
3	1690(1707)	690	431	2116(2134)	1056(1064)	798
4	1293(1306)	626	416	1531(1546)	846	720
5	1067(1076)	567	398	1179(1189)	723	655
6	918	515	379	955	651	590
7	811	471	359	806	599	531
8	729	435	339	704	550	482
9	665	404	320	632	503	443
10	613	378	303	578	460	410
11	569	356	286	537	420	383
12	532	337	272	502	386	359
13	499	320	259	473	355	340
14	471	304	247	448	330	321
15	447	291	236	426	311	303

利用能量积分表示的偏微商值，按

$$\Delta c = \int_0^a \left[\left(\frac{\partial c}{\partial \rho}\right)\Delta\rho + \left(\frac{\partial c}{\partial \alpha}\right)\Delta\alpha + \left(\frac{\partial c}{\partial \beta}\right)\Delta\beta\right]\mathrm{d}r \qquad (11.57)$$

就能反演计算相速度的变化 Δc。

有了本征值后，再讨论由剪切位错源激发的振荡位移谱的计算。对于扭转振荡，阶跃源函数所表示的剪切位错源在 $r=r_0, \theta=0$ 处所激发的位移谱已由式(7.41)表达。这里，我们引入量纲为一的参量

$$\left.\begin{aligned}
&\bar{t} = \frac{r_0}{a}, \bar{\mu}_0 = \frac{\mu(r_0)}{\mu_r}, \bar{\lambda}_0 = \frac{\lambda(r_0)}{\lambda_r} \\
&\bar{I}^{\mathrm{T}} = \int_t^1 \bar{\rho}_0 \bar{r}^2 \left[\frac{y_1(\bar{r})}{y_2(1)}\right]^{1/2} \mathrm{d}\bar{r} \\
&G_1(\bar{t}) = \frac{\bar{\mu}_0}{\bar{t}} \frac{2l+1}{l(l+1)} \frac{1}{\bar{I}^{\mathrm{T}}\bar{\omega}^2} \left[\frac{y_1^*(\bar{t})}{y_1(1)}\right] \\
&G_2(\bar{t}) = \frac{2l+1}{l(l+1)} \frac{1}{\bar{I}^{\mathrm{T}}\bar{\omega}^2} \left[\frac{y_2^*(\bar{t})}{y_1(1)}\right]
\end{aligned}\right\} \qquad (11.58)$$

及

$$
\left.\begin{aligned}
&y_8^*(\bar{t}) = \frac{2\bar{\mu}_0 y_3(\bar{t})}{\bar{t}} \\
&y_9^*(\bar{t}) = \frac{2\bar{\mu}_0}{\bar{t}}\left(\frac{3\bar{\lambda}_0 + 2\bar{\mu}_0}{\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}_0}\right)[l(l-1)y_3(\bar{t}) \\
&\qquad - 2y_1(\bar{t})] - \frac{4\bar{\mu}_0}{\bar{\lambda}_0 + 2\bar{\mu}_0} y_2^*(\bar{t}) \\
&F_1 = \frac{1}{2}\,\frac{(2l+1)}{\bar{\omega}^2 \bar{I}^S}\,\frac{y_8^* \bar{t}}{y_1(1)},\quad F_2 = F_1\,\frac{y_3(t)}{y_1(1)} \\
&F_3 = \frac{2l+1}{\bar{\omega}^2 \bar{I}^S}\,\frac{y_1^*(\bar{t})}{y_1(1)},\qquad F_4 = F_3\,\frac{y_3(\bar{t})}{y_1(1)} \\
&F_5 = -\frac{1}{4}\,\frac{2l+1}{\bar{\omega}^2 \bar{I}^S}\,\frac{y_9^*(\bar{t})}{y_1(1)},\quad F_6 = F_5\,\frac{y_3(\bar{t})}{y_1(1)} \\
&\bar{I}^S = \int_0^1 \bar{\rho}_0 \bar{r}^2 \left\{\left(\frac{y_1(\bar{r})}{y_1(1)}\right)^2 + l(l+1)\left(\frac{y_3(\bar{r})}{y_1(1)}\right)^2\right\} \mathrm{d}\bar{r}
\end{aligned}\right\} \tag{11.59}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
&H_1 = \frac{2P_l^2(\cos\theta)}{\sin\theta},\quad H_2 = \frac{\partial}{\partial\theta}P_l^2(\cos\theta) \\
&H_3 = \frac{P_l^1(\cos\theta)}{\sin\theta},\quad H_4 = \frac{\partial}{\partial\theta}P_l^1(\cos\theta),\quad H_5 = \frac{2H_2 - H_1\cos\theta}{\sin\theta} \\
&H_6 = \frac{[8 - l(l+1)\sin^2\theta]H_1 - 4H_2\cos\theta}{2\sin\theta} \\
&H_7 = P_l^2(\cos\theta),\quad H_8 = P_l^1(\cos\theta),\quad H_9 = P_l(\cos\theta) \\
&H_{10} = \frac{[4 - l(l+1)\sin^2\theta]H_1 - 2H_2\cos\theta}{2\sin\theta} = \frac{\partial^2 P_l^2}{\partial\theta^2} \\
&H_{11} = \frac{[1 - l(l+1)\sin^2\theta]H_3 - H_4\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\partial^2 P_l^1}{\partial\theta^2} \\
&H_{12} = \frac{H_4\cos\theta - H_3}{\sin\theta}
\end{aligned}\right\} \tag{11.60}
$$

则可将式(7.41)表示为在 $r=a$ 处有

$$
\left.\begin{aligned}
u_\theta &= \Omega(G_1H_1p_2^0 - G_2H_3p_4^0)\\
u_\varphi &= \Omega(G_1H_2p_1^0 - G_2H_4p_3^0)
\end{aligned}\right\}
\tag{11.61}
$$

并对所有可能的 l 和 n 求和。这里 $\Omega=U_0\mathrm{d}S/4\pi a^2$，为方便式中暂略去$(\cos\omega_n t)H(t)$项。相应的应变量为

$$
\left.\begin{aligned}
\varepsilon_{\theta\theta} &= -\varepsilon_{\varphi\varphi} = \bar{\Omega}(G_1H_5p_2^0 - \frac{1}{2}G_2H_1p_4^0)\\
\varepsilon_{\theta\varphi} &= \bar{\Omega}(G_1H_6p_1^0 + G_2H_2p_3^0)
\end{aligned}\right\}
\tag{11.62}
$$

这里 $\bar{\Omega}=\Omega/a$，函数 G_1 是垂直走滑源的径向函数，G_2 是垂直倾滑源的径向函数。

类似地对于球型振荡的激发位移式(7.65)，在 $r=a$ 处也可写成

$$
\left.\begin{aligned}
u_r &= \Omega(F_1H_7p_2^0 - F_3H_8p_4^0 + 2F_5H_9p_5)\\
u_\theta &= \Omega(F_2H_2p_2^0 - F_4H_4p_4^0 - 2F_6H_8p_5)\\
u_\varphi &= \Omega(F_2H_1p_1^0 - F_4H_3p_3^0)\\
\varepsilon_{\theta\theta} &= \bar{\Omega}[(F_1H_7 + F_2H_{10})p_2^0 - (F_3H_8 + F_4H_{11})p_4^0\\
&\quad + 2(F_5H_9 - F_6H_4)p_5]\\
\varepsilon_{\varphi\varphi} &= \bar{\Omega}\{[(F_1H_7 + F_2(H_{10} - H_6)]p_2^0\\
&\quad - (F_3H_8 + F_4H_{12})p_4^0 + 2[F_5H_9 - F_6(H_4 + H_7)]p_5\}\\
\varepsilon_{rr} &= -\frac{\sigma}{1-\sigma}(\varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{\varphi\varphi})\\
\varepsilon_{\theta\varphi} &= \bar{\Omega}(2F_2H_5p_1^0 + F_4H_1p_3^0)
\end{aligned}\right\}
\tag{11.63}
$$

这里 F_1 和 F_2 是垂直走滑源的位移垂直分量与水平至分量。F_3 和 F_4 为垂直倾滑源的位移垂直分量与水平分量。当本征频率与本征函数已知时，径向函数 G_1 和 G_2 及 $F_i(i=1,2,3,4,5,6)$的计算没有任何困难，那么，给定了地球构造模型，对于一定的震源深度及任意取向的剪切位错源，就能计算出在地球表面任意一点处的自由振荡谱位移振幅值。研究表明，$l\leqslant100,n\leqslant4$ 的多阶振型已与观测值很好地拟合，为震源机制及地球深部构造的探讨提供了有力的附加证据。图

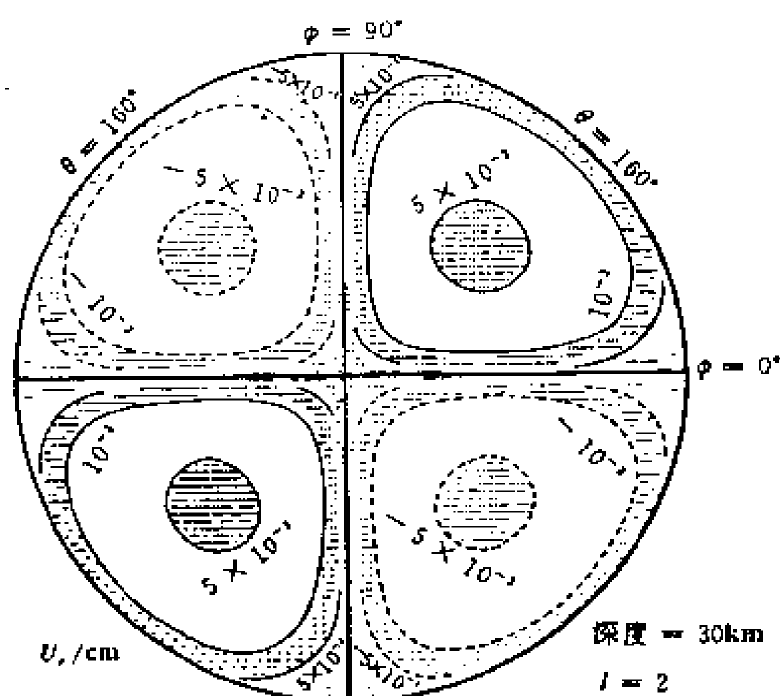


图 11.9　足球型振荡($l=2$)的 u_r 等值线(单位:cm)分布

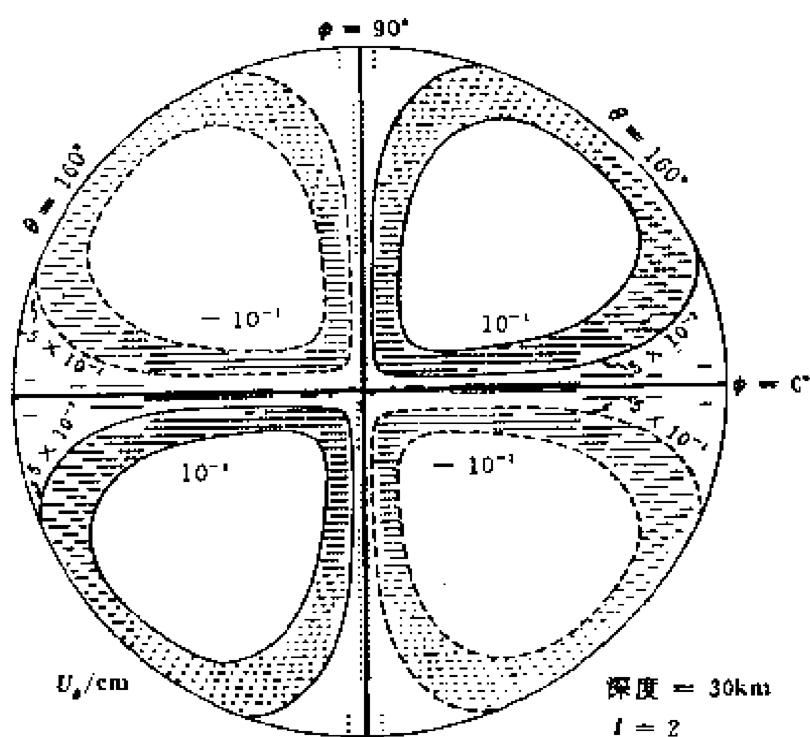


图 11.10　扭转振荡($l=2$)的 u_θ 等值线(单位:cm)分布

11.9 是用 J-B 地球模型，$h=30\text{km}$ 的垂直走滑源（$\Omega=2000\mu\text{m}$）计算的 $l=2$ 的球型振荡径向位移（足球型振型）u_r 的方位等值线图。图 11.10 和图 11.11 为相同情况的扭转振型的位移 u_θ 和 u_φ 的等值线图。图中的两条粗黑线为位移节线，细黑线为位移的正值，断的点线为位移的负值。这个例子所相当的震源区长度为 600km，宽度为 80km，位错幅度达 20m。

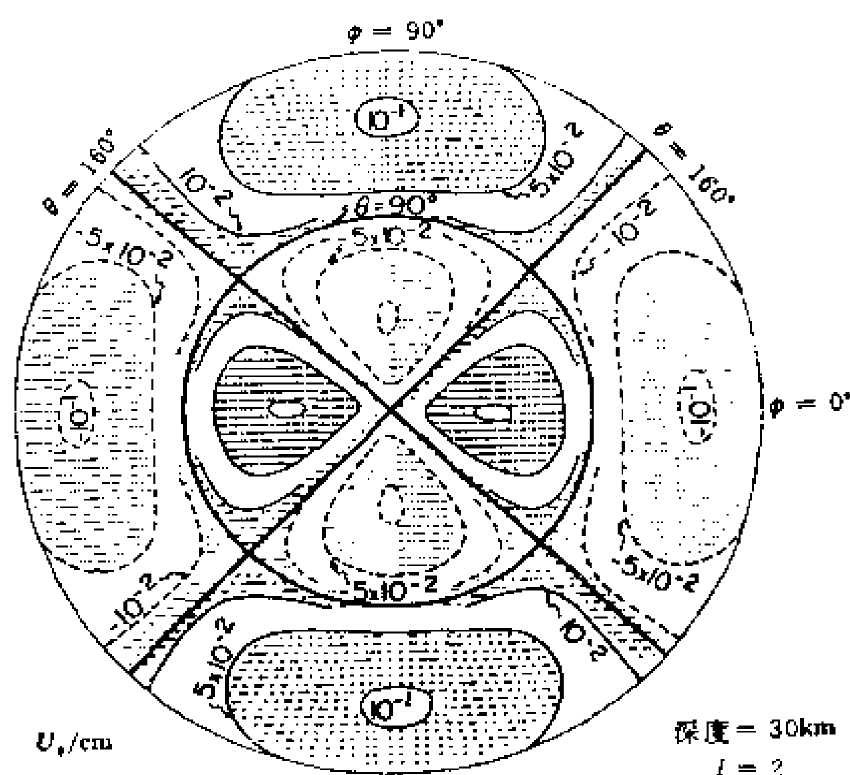


图 11.11　扭转振荡（$l=2$）的 u_φ 等值线（单位：cm）分布

§6　因果性频散面波与自由振荡波的衰减观测

对于泊松介质，$\alpha/\beta=\sqrt{3}$，令 $k^*=0$ 及 $k^*=\dfrac{1}{3}\mu^*$，由面波 Q_R 和 Q_L 计算理论 Q_α 与 α_β 模型（参看第九章 §6）。图 11.12 即表示由

从苏格兰经澳大利亚至千岛群岛的海洋路径观测的 Q_R（图中的圆点）与 Q_L（图中的"×"）得到的 Q_α 值与理论 Q_α（$2.25Q_\beta$ 及 $1.80Q_\beta$）的拟合。

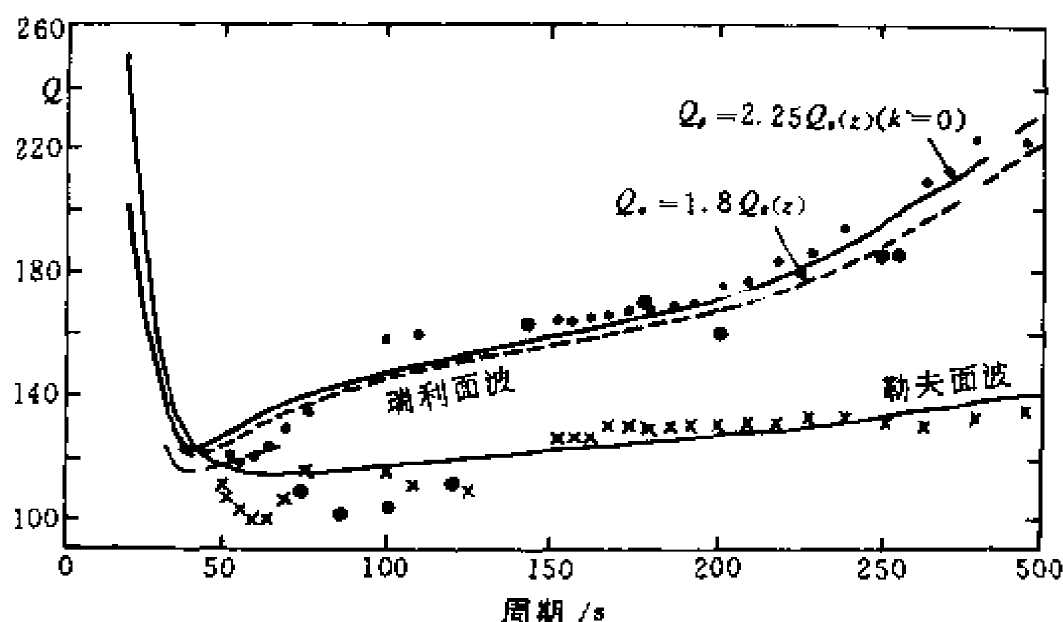


图 11.12 由 $Q_R(\omega)$ 及 $Q_L(\omega)$ 拟合 Q_α 曲线

对于弱衰减介质，$i\lambda^*$、$i\mu^*$、$i\alpha^*$、$i\beta^*$、$i\omega^*$ 及 iK^* 较小，对 $\omega(\alpha_s+i\alpha_s^*,\beta_s^*+i\beta_s^*)=\omega+i\omega^*$ 作关于 $\omega(\alpha_s,\beta_s)$ 的展开，那么当固定 K 时，有

$$\omega^*=\sum_{s=1}^{N}\left(\frac{\partial\omega}{\partial\alpha_s}\right)_{k,\beta}\alpha_s^*+\sum_{s=1}^{N}\left(\frac{\partial\omega}{\partial\beta_s}\right)_{k,\alpha}\beta_s^*+\cdots \tag{11.64}$$

利用 $\alpha^*=\dfrac{\alpha}{2Q_\alpha}$，$\beta^*=\dfrac{\beta}{2Q_\beta}$，$\omega^*=\dfrac{\omega}{2Q}$，得到自由振荡波的 Q 值为

$$\frac{1}{Q_T}=\sum_{s=1}^{N}\frac{\beta_s}{\omega_T}\left(\frac{\partial\omega_T}{\partial\beta_s}\right)_K\frac{1}{Q_{\beta,s}} \tag{11.65}$$

及

$$\frac{1}{Q_S}=\sum_{s=1}^{N}\frac{\alpha_s}{\omega_S}\left(\frac{\partial\omega_S}{\partial\alpha_s}\right)_{K,\beta}\frac{1}{Q_{\alpha,s}}+\sum_{s=1}^{N}\frac{\beta_s}{\omega_S}\left(\frac{\partial\omega_S}{\partial\beta_s}\right)_{K,\alpha}\frac{1}{Q_{\beta,s}} \tag{11.66}$$

这里 Q_T 为扭转型自由振荡的 Q 值，Q_S 为球型自由振荡的 Q 值，对于面波，$Q_T=Q_L$，$Q_S=Q_R$。

对于 N 层球地球衰减介质，已知每层的因果性体波频散为

$$\left.\begin{aligned}\alpha_s(\omega) &= \alpha_s(\omega_r)\left[1 - \frac{1}{\pi Q_{\alpha,s}}\ln\frac{\omega_r}{\omega}\right]\\ \beta_s(\omega) &= \beta_s(\omega_r)\left[1 - \frac{1}{\pi Q_{\beta,s}}\ln\frac{\omega_r}{\omega}\right]\end{aligned}\right\} \tag{11.67}$$

引入参考频率 ω_r，对于勒夫波有相速率 $c_L(\omega_r)$，每一层按因果律变更 $\alpha_s(\omega)$ 与 $\beta_s(\omega)$，并将与其相应的 $c_L(\omega)$ 展开且准确至 $Q_{\beta,s}$ 的一阶项，则由于滞弹性产生的因果性频散与弹性介质的频散之差为

$$\begin{aligned}\Delta c_L &= \sum_{s=1}^{N}\frac{\partial c_L}{\partial\beta_s}(\Delta\beta)_s = \sum_{s=1}^{N}\frac{\partial c_L}{\partial\beta_s}\left[\frac{\beta_s}{\pi Q_{\beta,s}}\ln\frac{\omega}{\omega_r}\right]\\ &= \frac{c_L(\omega)}{\pi}\ln\left(\frac{\omega}{\omega_r}\right)\sum_{s=1}^{N}\frac{\beta_s}{c_L}\left(\frac{\partial c_L}{\partial\beta}\right)_s\frac{1}{Q_{\beta,s}} = \frac{c_L(\omega)}{\pi Q_L(\omega)}\ln\left(\frac{\omega}{\omega_r}\right)\end{aligned} \tag{11.68}$$

或写成

$$\frac{\Delta c_L}{c_L} = \frac{1}{\pi Q_L}\ln\left(\frac{\omega}{\omega_r}\right) = -\frac{1}{\pi Q_L}\ln\left(\frac{T}{T_r}\right) \tag{11.69}$$

这里 $\Delta c_L = c_L(\omega) - c_L(\omega_r)$。

同理，对于瑞利面波有

$$\frac{\Delta c_R}{c_R} = \frac{1}{\pi Q_R}\ln\left(\frac{\omega}{\omega_r}\right) \tag{11.70}$$

对于弱衰减（Q_L 与 Q_R 的值很大），式(11.69)(和(11.70)可写成通式

$$c_m(\omega) = c_m(\omega_r)\left[1 - \frac{1}{\pi Q_m}\ln\frac{\omega_r}{\omega}\right],(m = \mathrm{R},\mathrm{L}) \tag{11.71}$$

或

$$c_m(T) = c_m(T_r)\left[1 - \frac{1}{\pi Q_m}\ln\left(\frac{T}{T_r}\right)\right] \tag{11.72}$$

对于地球介质，因果性频散的校正量 Δc_m 约为 0.5%～1.4%（图 11.13），且长周期波受滞性的影响远小于短周期波，故长周期面

波的相速度校正值较小。

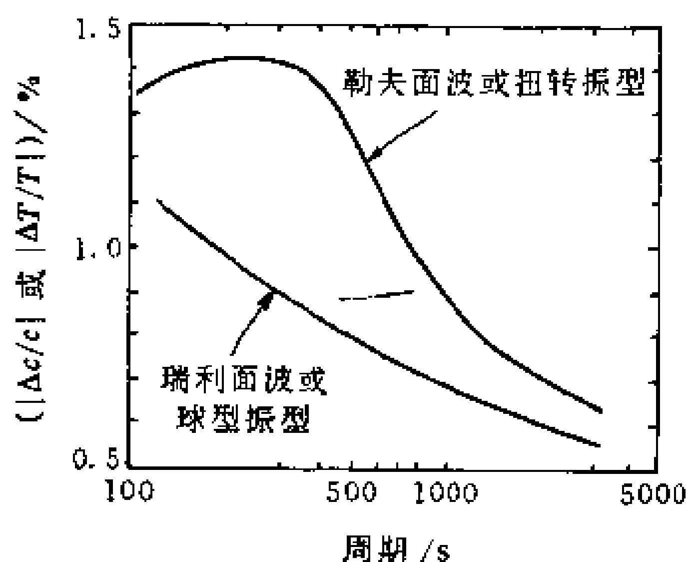


图 11.13　面波因果性频散校正值

由于给定频率$_{n}\omega_{l}$的自由振荡波的衰减为$e^{-\frac{\omega t}{2Q}}$,那么,在t时刻在固定点观测到的周期为T的自由振荡波的振幅$\xi(t)$为

$$\xi(t) = \xi(t_0)e^{-\frac{\pi}{QT}(t-t_0)} = \xi_{\max}e^{-\frac{t}{\tau_0}} \tag{11.73}$$

式中t_0为初始值,$\tau_0=\dfrac{QT}{\pi}$。通过测量给定谱线的振幅衰减来确定Q值。可以这样作,定义在时间区间t_b-t_a内有谱振幅衰减为

$$\xi_{ab} = \frac{1}{t_b - t_a}\int_{t_a}^{t_b}\xi(t)\mathrm{d}t = \tau_0\xi_{\max}\frac{e^{-\frac{t_a}{\tau_0}} - e^{-\frac{t_b}{\tau_0}}}{t_b - t_a} \tag{11.74}$$

而另一时间区间$t_d-t_c=t_b-t_a$同样有谱振幅衰减ξ_{cd},也可用$\xi(t)$的积分形式。写出两者之比,即

$$\frac{\xi_{ab}}{\xi_{cd}} = \frac{e^{-\frac{t_a}{\tau_0}} - e^{-\frac{t_b}{\tau_0}}}{e^{-\frac{t_c}{\tau_0}} - e^{-\frac{t_d}{\tau_0}}} = \exp\left[\frac{\tau_c - \tau_a}{\tau_0}\right] \tag{11.75}$$

将$\tau_0=\dfrac{QT}{\pi}$代入,得

$$Q = \frac{\pi}{T}\frac{(t_c - t_a)}{\ln(\xi_{ab}/\xi_{cd})} \tag{11.76}$$

在具体问题中，为保证谱线的分辨率，必须选时间区间

$$t_d - t_c = t_b - t_a > \frac{1}{\tau_1 F} > T \tag{11.77}$$

式中 F 为地球的自转频率，τ_1 为由于自转引起的球型振荡的谱线分裂参数，T 为给定自由振荡波的周期。图 11.14 是对于 1990 年 5 月 22 日智利地震从应变地震仪上分析出的 4 个相继谱线振幅的相对衰减值，时间区间为 20.35h，所选取的每条谱线峰值的频率区间为 0.296h，其 Q 值按式(11.76)计算。

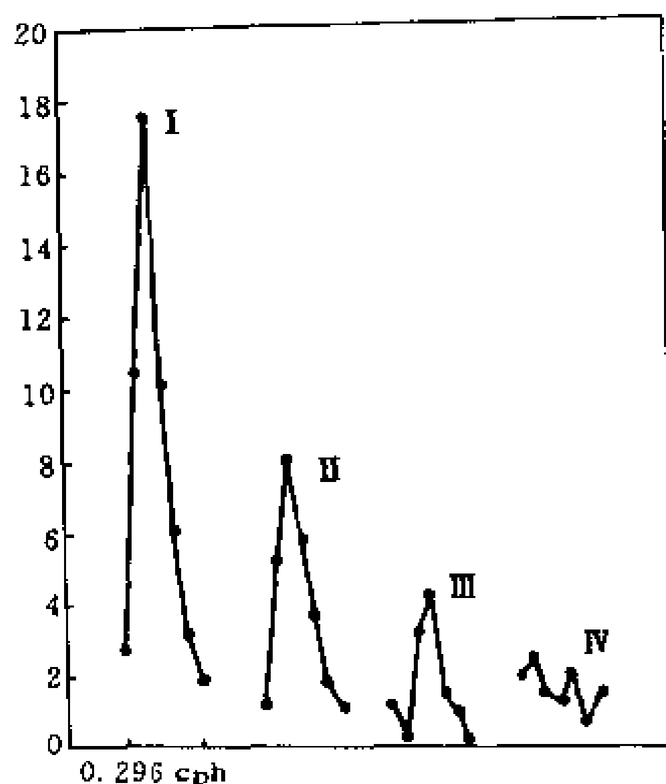


图 11.14　1990 年 5 月智利地震的 $_0T_5$ 的谱线衰减

应该注意到，像地震面波一样，地球的滞弹性对自由振荡波有时间域与谱域两方面的影响，即振幅随时间的衰减与谱周期的增长，后者也是不能忽略的。我们从琼斯公式(参看第九章 § 4)出发，对于给定的振型，有 $cT = \dfrac{2\pi a}{l+\dfrac{1}{2}}$，对它作微扰，得 $\dfrac{\Delta c}{c} = -\dfrac{\Delta T}{T} = \dfrac{\Delta \omega}{\omega}$，将它与式(11.72)联合，可得

$$\Delta({}_nT_l) = \frac{{}_nT_l}{\pi Q}\ln\left(\frac{{}_nT_l}{T_r}\right) \tag{11.78}$$

或

$${}_nT_l = {}_nT_l(T_r)\left[1 + \frac{1}{\pi Q}\ln\left(\frac{{}_nT_l}{T_r}\right)\right] \tag{11.79}$$

此式表示，滞弹性介质中自由振荡波与弹性介质中的相比，其周期增长，增长值为式(11.78)的$|\Delta T|$。例如对于${}_0T_2(Q\approx 300)$，若取$T_r=$ 1s(称为1s弹性地球模型)，可算得周期延长22s。

地震体波的衰减与自由振荡波的周期增长，都说明地球介质不是完全弹性体。此时的观测资料反映出地球介质的弹性参数、波速等都必须是频率的函数。在整个地震频段，因果性频散效应的值可达1%。若忽略它，就会造成由面波与自由振荡反演的地球模型和体波反演的地球模型之间发生矛盾。表11.9总结了由地震资料得到的地球的耗散效应的类型及公式，以使我们对地球介质对各类地震波的吸收状况有更系统的了解。

表 11.9 地球介质中地震波的衰减效应

	体波	面波	自由振荡波
谱衰减系数	$e^{-2\pi t^*/T}$ $t^* = \frac{1}{2}\int_{ray}\frac{ds}{Q_m(s)v_m(s)} \to \frac{\tau}{2Q_{av}}$	$e^{-\pi\Delta/QUT}$	$e^{-\pi t/Q({}_nT_l)}$
因果频散	当$T>T_r$时的相速度和群速度的延迟关系 $\Delta\tau = \frac{\tau}{\pi Q_{av}}\ln\left(\frac{T}{T_r}\right)$ 随走时与周期延迟增加	$c(T>T_r) = c(T_r)\times\left[1-\frac{1}{\pi Q}\ln\left(\frac{T}{T_r}\right)\right]$ T_r为参考周期 随周期增长滞弹性减小	$\Delta({}_nT_l) = \frac{{}_nT_l}{\pi Q}\ln\left(\frac{{}_nT_l}{T_r}\right)$ 滞弹性谱线相移 随周期增加

习题与思考题

1. 参考定量地震学第十一章关于地震数据分析的问题，总结你所遇到的数据预处理及相关内容。

2. 试总结本书在多处提到的地震波在均匀介质及径向非均匀介质的扩散因数与散射因数的内容。其中散射因数是作理论地震图直接所需要的基础要素。

3. 要实现自由振荡波的理论位移与观测值的对比，有赖于数值计算得出的理论位移值，试就本章§5的内容进行分析与总结。

4. 由于因果性频散值的求得(图11.13)，使得全球观测的面波频散资料的解释无矛盾，由此你能推断出地球介质的Q值分布状况吗？

参考文献

[1]Aki, K., P. G. Richards, Quantitative Seismology. Theory and Methods, vol. 1, 2, 1980, W. H. Freeman and Company.

[2]Bullen, K. E., B. A. Bolt, An Introduction to the Theory of Seismology, 1985, Cambridge University Press.

[3]Červený, V., R. Ravindra, Theory of Seismic Head Waves, 1971, University of Torento Press.

[4]Červený, V., I. Pšenčik, Ganssian beams and paraxial ray approximation in three-dimensional elastic inhomogeneous media, I, 1983, Jour. of Geophysics Zeitschrift für Geophysik, 53, 1, 1～15.

[5]Červený, V. P. Firbas, Numerical modelling and inversion of travel times of seismic body waves in homogeneous anisotropic media, 1984, Geophys. J. R. Astr. Soc., 76, 41～51.

[6]Crampin, S., An introduction to wave propagation in anisotropic media. 1984, Geophys. J. R. Astr. Soc., 76, 17～28.

[7]Chapman, C. H., A new method for computing synthetic seismograms, 1978, Geophys. J. R. Astr Soc., 54, 481～518.

[8]Chapman, C. H., Chu Jenyi and D. G. Lyness, The WKBJ seismogram algorithm, 1988, Seismological Algorithms, Computational Methods and Computer Programs I. 2, Academic Press.

[9]Kennett, B. L. N., Seismic Wave Propagation in Stratified Media, 1983, Cambridge University Press.

[10]Kline, M., I. W. Key, Electromagnetic theory and geometrical optics, 1965, Pure and Applied Mathematics, A Series of Texts and Monographs, vol. Ⅶ, Interscience Publishers.

[11]Malischewsky, P., Surface waves and Discontinuities, 1987, Developments in Solid Earth Geophysics, 16, Akademie-Verleg, Berlin Press.

[12]Menahem, A. B., S. J. Singh, Seismic Waves and Sources, 1981,

Springer-Verlag Press.
[13]Menke, W. , Geophysical Data Analycis: Discrete Inverse Theory, 1984, Academic Press.
[14]Tarantola, A. , Theoretical background for the inversion of seismic wave forms, including elastisity and attenunetion, 1981, Digital seismology and fine modeling of the lithosphere, International science series(physical sciences), vol. 42, Plenum Press. 157～189.
[15]傅淑芳、刘宝诚编,地震学教程,北京:地震出版社,1991.